

基于 LMI 的参数随机变化系统的 概率密度函数控制

陈海永¹ 王宏²

摘要 针对模型参数在有界区域内随机变化的系统, 基于平方根 B 样条模型, 提出了输出概率密度函数 (Probability density function, PDF) 跟踪控制策略. 目标是控制系统输出的概率密度函数跟踪给定的概率密度函数. 通过 B 样条逼近建立了输出 PDF 和权值之间的对应关系, 把 PDF 的跟踪转化为权值的跟踪, 同时系统转化为 MIMO 系统, 从而权值向量的跟踪就转化为 MIMO 系统的跟踪问题, 接着给出了系统输出概率密度函数跟踪给定概率密度函数的控制器存在的充分条件, 通过求解线性矩阵不等式完成状态反馈和输出反馈跟踪控制器的设计, 得到了系统具有 H_∞ 范数界 Gamma 鲁棒镇定的结果. 仿真结果表明本文提出的控制算法是有效的.

关键词 概率密度函数控制, 平方根 B 样条, 随机控制, 跟踪控制
中图分类号 TP13

PDF Control of Stochastic Parameter System Using Linear Matrix Inequalities

CHEN Hai-Yong¹ WANG Hong²

Abstract This paper presents a probability density function (PDF) tracking control strategy for stochastic parameter system based on a square root B-spline model for the output probability density functions. The objective is to control the PDF of system output to follow a desired PDF. Using the B-spline approximation the tracking problem of PDFs is transferred to the tracking of given weights values which correspond to the given PDF. At the same time, the system is transferred to a MIMO system, whose output is the weight value vector. As a result, the tracking of given weights values is transformed to a tracking problem of a MIMO system. Furthermore, a sufficient condition of the PDF of system output to follow a desired PDF is given and the control strategy is obtained by solving several linear matrix inequalities. A simulated example is used to demonstrate the efficiency of the proposed approach and encouraging results have been gained.

Key words Probability density functions control, square root B-spline, stochastic control, tracking control

1 引言

早期的随机系统控制的成果主要集中于对输出变量本身统计特性的研究, 如最小方差控制^[1], 自校正控制^[2], 线性高斯二次型^[3] 和马尔可夫参数过程控制^[4] 等. 这些控制系统的控制目标是系统输出的均值和方差满足相应的性能指标. 在这些传统的方法中, 一般假设系统中的随机变量服从高斯分布. 但是, 这种假设不符合一些工业应用, 在这些工业应用中,

随机变量的分布与系统的动态变化密切相关, 并不满足高斯分布假设. 如造纸中的纤维长度分布^[5], 高炉的火焰分布^[6], 一些化工过程的分子量分布等^[7]. 1996 年王宏教授针对随机变量不服从高斯分布的一般有界动态随机系统, 提出了输出概率密度函数 (Probability density function, PDF) 形状控制策略, 这个策略与以往的随机控制策略不同, 它的控制目标是设计控制输入, 使得系统输出的概率密度函数跟踪给定的概率密度函数. 近十年来关于概率密度函数控制已经形成了一系列的建模和控制算法, 正在形成一个逐渐完善的研究框架^[8, 9]. 最初, 研究内容主要是基于 B 样条模型和输入输出模型的建模和控制算法, 包括线性 B 样条, 平方根 B 样条, 有理 B 样条方法, 有理平方根 B 样条^[10] 等, 同时给出了基于这种新型的随机系统模型的鲁棒控制、自适应控制和非线性控制算法^[11]. 2002 年提出了对随机输出进行熵值极小化控制^[12] 和对闭环系统跟踪误差进行熵值极小化控制^[13], 并实现了在线的造纸过程样机运行实验^[14].

近年来, 随机分布控制又出现了一些新的模型和控制策略. 应用多层感知器 (MLP) 神经网络逼近输出概率密度函数, 避免了多输入多输出情况下 B 样条基函数数量过多和逼近精度之间的矛盾^[15]. 针对之前的 PDF 控制通过数值优化实现, 会导致控制器设计的困难, 且由于数值解法产生的闭环结构不固定, 对闭环性能的分析如鲁棒性和稳定性都很难进行的问题, 文献 [9] 提出了 Pseudo-PID 控制策略, 利用 LMI 技术实现了不确定系统模型的跟踪问题, 并且具有良好的鲁棒性. 针对概率密度函数本身固有的非负性和归一性约束, 2005 年提出了有理平方根 B 样条模型^[16]. 针对有界参数随机变化的系统, 文献 [17] 用 Laplace 变换的思想, 得到了系统输出和随机参数的概率密度函数变换式之间的简单的数学关系, 并引入了一个新的指标函数, 最小化指标函数得到最优控制输入序列, 实现了系统输出的概率密度函数跟踪目标分布. 但是, 采用线性 ARMAX 模型, 概率密度函数的形状仅是噪声的概率密度函数在空间上的平移, 不能够实现分布形状的任意控制^[17].

本文针对模型参数随机变化的系统, 提出了输出 PDF 跟踪控制器设计问题. 通过 B 样条逼近建立了输出 PDF 和权值之间的对应关系, 由于基函数都是事先定义的, 所以 PDF 的逼近转化为权值的逼近, 也就是说, 权值代表了输出概率密度函数的形状, 同时系统转化为 MIMO 系统, 从而权值向量的跟踪就转化为 MIMO 系统的跟踪问题. 接着给出了系统输出概率密度函数渐进跟踪给定概率密度函数的控制存在的充分条件, 通过求解线性矩阵不等式完成状态反馈跟踪控制器的设计, 实现了给定概率密度函数的跟踪控制, 最后给出了仿真结果, 证实了控制算法的有效性.

2 模型表示

记 $y(t) \in [a, b]$ 为一致有界随机过程并假定其为随机系统在 t 时刻的输出, 记 $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ 为控制 $y(t)$ 分布形状的控制输入向量, 在任意时刻, $y(t)$ 可以用它的概率密度函数 $\gamma(y, \mathbf{u}(t))$ 来表述, 其定义式如下

$$P(a \leq y(t) < \xi, \gamma(y, \mathbf{u}(t))) = \int_a^\xi \gamma(y, \mathbf{u}(t)) dy \quad (1)$$

其中 $P(a \leq y(t) < \xi, \gamma(y, \mathbf{u}(t)))$ 表示系统在 $\mathbf{u}(t)$ 作用下输出落在区间 $[a, \xi]$ 内的概率, 即 $y(t)$ 的概率密度函数 $\gamma(y, \mathbf{u}(t))$ 的形状由 $\mathbf{u}(t)$ 控制. 假定区间 $[a, b]$ 为已知, 输出概率密度函数 $\gamma(y, \mathbf{u}(t))$ 连续且有界, 由 B 样条逼近原理可知, 可以考虑

收稿日期 2006-7-13 收修改稿日期 2006-9-20
Received July 13, 2006; in revised form September 20, 2006
国家自然科学基金 (60472065, 60534010) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60472065, 60534010)
1. 中国科学院自动化研究所 北京 100080 2. 东北大学自动化研究中心 沈阳 110004
1. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080 2. Research Center of Automation, Northeastern University, Shenyang 110004
DOI: 10.1360/aas-007-1216

用 B 样条来逼近概率密度函数的平方根 $\sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))}$. 假定已经取定了 n 个 B 样条, 对应的权值为 $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则这种逼近在无逼近误差的条件下为

$$\sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))} = \sum_{i=1}^n \omega_i B_i(y) \quad (2)$$

由于概率密度函数需要满足如下的隐含条件

$$\int_a^b \gamma(y, \mathbf{u}(t)) dy = 1 \quad (3)$$

也就是说 ω_i 一定能够用一组数 $\omega_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 表示, 这意味着 n 个权值只有 $n-1$ 个是独立的. 一些工业应用中, 比如, 造纸中的纤维长度分布不符合高斯分布的假设, 它的分布与系统的动态变化密切相关, 一般来说, 概率密度函数动态改变可以用非线性偏微分方程的解来表达, 通过对这种系统的分析和在运行点的线性化, 系统的模型可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{v} &= E\mathbf{x} \\ \sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))} &= \mathbf{c}_0(y)\mathbf{v} + \omega_n B_n(y) \end{aligned} \quad (4)$$

这里, \mathbf{x}, y 表示状态向量和输出.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0(y) &= [B_1(y), B_2(y), \dots, B_{n-1}(y)] \\ \mathbf{v} &= [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}] \\ \mathbf{c}(y) &= \mathbf{c}_0(y) - \frac{B_n(y)}{\int_a^b B_n(y) dy} \int_a^b \mathbf{c}(y) dy \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $A \in \mathbf{R}^{l \times l}$, $B \in \mathbf{R}^{l \times m}$, $E \in \mathbf{R}^{(n-1) \times l}$ 为已知的参数矩阵, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ 为系统的控制输入, \mathbf{v} 是权值向量, $\mathbf{c}_0(y)$ 是基函数向量.

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{-\Sigma_1 \mathbf{v} + \sqrt{\mathbf{v}^T (\Sigma_1^T \Sigma_1 - \Sigma_2 \Sigma_0) \mathbf{v}}}{\Sigma_2} \\ \Sigma_0 &= \int_a^b \mathbf{c}_0^T(y) \mathbf{c}_0(y) dy \\ \Sigma_1 &= \int_a^b \mathbf{c}_0^T(y) B_n(y) dy \\ \Sigma_2 &= \int_a^b B_n^2(y) dy \end{aligned} \quad (6)$$

式 (4) 是运用平方根 B 样条对概率密度函数进行逼近, 避免了逼近时导致部分 PDF 为负的情况^[8]. 式 (4) 反映了权系数系统的状态变量与控制输入之间的关系, 也描述了 B 样条函数对输出概率密度函数平方根的逼近. 同时揭示了随机分布控制的线性系统模型和传统的系统模型之间的继承关系.

由上面的描述可知, 一旦选定了一组基函数, 那么 $\mathbf{c}_0(y)$ 已知, 由于有界区间 $[a, b]$ 为已知, 所以 $\mathbf{c}(y), l(y), \Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ 均已知.

得到平方根模型的表示后, 下一步要做的是设计合适的控制算法使得系统的输出概率密度函数的平方根 $\sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))}$ 跟踪给定的概率密度函数的平方根 $\sqrt{g(y)}$. 为此, 假设给定的函数 $g(y)$ 属于下面的函数空间

$$\begin{aligned} \sqrt{g(y)} \in \Omega &= \left\{ f \mid f = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \mathbf{c}_i(y) + \omega_n B_n(y) \right\} \\ \|\mathbf{g}(y)\| &< +\infty \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{c}_i(y)$ 是矢量 $\mathbf{c}(y)$ 中的第 i 个元素, $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为任意的正数. 由式 (7) 可知, 对于函数 $g(y)$, 存在一个矢量 $\mathbf{v}_g \in \mathbf{R}^{n-1}$ 使得下面的等式成立

$$\sqrt{g(y)} = \mathbf{c}_0 \mathbf{v}_g + \omega_n B_n(y) \quad (8)$$

这样, 由系统 (4) 可知, 使得系统的输出概率密度函数的平方根 $\sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))}$ 跟踪给定的概率密度函数的平方根 $\sqrt{g(y)}$ 就相当于设计合适的控制算法使得权值向量 \mathbf{v} 跟踪给定的概率密度函数 $\sqrt{g(y)}$ 对应的权值向量 \mathbf{v}_g . 这时系统 (4) 形式上等价于传统的 MIMO 系统. 如果假设系统的参数在某个有界区间随机变化, 并且考虑系统受到有界输入干扰的影响, 则系统 (4) 可以表示如下

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (A + \Delta A)\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{w} \\ \mathbf{v} &= E\mathbf{x} \\ \sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))} &= \mathbf{c}_0(y)\mathbf{v} + \omega_n B_n(y) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 ΔA 是由系统的参数随机变化引起的不确定性, 式 (9) 的其他部分的定义如式 (4). ΔA 可以描述为

$$\Delta A = E_a \Theta_a F_a \quad (10)$$

式 (10) 中 E_a, F_a 为相应维数的常值矩阵; Θ_a 为相应维数的矩阵, 其元素随机变化, 且有 $\Theta_a^T \Theta_a \leq I$; $\mathbf{w}(t)$ 为有界输入干扰. 由系统 (9) 组成的概率密度函数跟踪增广系统为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (A + \Delta A)\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{q}} &= E\mathbf{x} - \mathbf{v}_g \\ \sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))} &= \mathbf{c}_0(y)\mathbf{v} + \omega_n B_n(y) \end{aligned} \quad (11)$$

可以把式 (11) 组合成下面的形式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \begin{bmatrix} A + \Delta A & 0 \\ E & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \mathbf{w}_2(t) \\ \sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))} &= \mathbf{c}_0(y)\mathbf{v} + \omega_n B_n(y) \end{aligned} \quad (12)$$

上式中, $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ -\mathbf{v}_g \end{bmatrix}$, 控制器可以采用下面两种形式: 状态观测器的形式和输出反馈的形式. 状态反馈和输出反馈分别为

$$\mathbf{u}(t) = [K_x \ K_q] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = K_x \mathbf{x} + K_q \mathbf{q} \quad (13a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_g + K_y \mathbf{v} = \mathbf{v}_g + K_y E \mathbf{x} \quad (13b)$$

当实际系统的状态可测的时候, 可以采用状态反馈控制器, 即式 (13a) 来实现系统的 PDF 控制, 否则, 采用输出反馈控制器实现控制作用.

3 输出反馈跟踪控制器设计

由上面的叙述可知, 在系统的状态可测量的情况下, 可以采用状态反馈控制器来实现系统的 PDF 控制. 但是, 在 PDF 控制的实际应用中, 系统的状态往往是不可测的, 故难以应用状态反馈控制率对系统进行控制, 所以, 有必要避开

直接采用系统状态的控制器设计方法,这就引出了基于输出反馈的方法.由式(11)可知

$$\mathbf{c}_0^T(y)\sqrt{\gamma(y)} = \mathbf{c}_0^T(y)\mathbf{c}_0(y)\mathbf{v} + \mathbf{c}_0^T(y)\omega_n B_n(y)$$

因为 $y(t) \in [a, b]$, 所以

$$\int_a^b \mathbf{c}_0^T(y)\sqrt{\gamma(y)}dy = \left(\int_a^b \mathbf{c}_0^T(y)\mathbf{c}_0(y)dy \right) \mathbf{v} + \int_a^b \mathbf{c}_0^T(y)\omega_n B_n(y)dy \quad (14)$$

由式(14)可知,当系统的概率密度函数 $\gamma(y)$ 可测的时候,由于基函数向量 $\mathbf{c}(y)$ 已知,那么权向量 \mathbf{v} 自然就得到了,这说明当系统的概率密度函数可测的时候,式(12)所示的权向量也是可测的.这就形成了运用输出反馈实现 PDF 控制的基础.采用输出反馈

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_g + K_y E \mathbf{x}(t) \quad (15)$$

则系统(12)转化为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (A + \Delta A + BHE)\mathbf{x} + B\mathbf{v}_g + \mathbf{w} \\ \mathbf{v} &= E\mathbf{x} \\ \dot{q}(t) &= E\mathbf{x}(t) - \mathbf{v}_g \\ \sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))} &= \mathbf{c}_0(y)\mathbf{v} + \omega_n B_n(y) \end{aligned} \quad (16)$$

由式(16)可以看出,为了实现给定的概率密度函数的鲁棒跟踪,只需要使得下面的系统鲁棒镇定,并且满足一定的鲁棒性能指标即可.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{pmatrix} A + \Delta A + BHE & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1(t) \\ -\mathbf{v}_g \end{pmatrix} \\ \sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}(t))} &= \mathbf{c}_0(y)\mathbf{v} + \omega_n B_n(y) \\ \mathbf{w}_1(t) &= B\mathbf{v}_g + \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

为了表示方便,令 $\bar{A} = \begin{pmatrix} A + \Delta A + BHE & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1(t) \\ -\mathbf{v}_g \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$.

定理 1. 对于概率密度函数跟踪控制系统(12),如果存在正定矩阵 P_c , $\bar{P} = \begin{pmatrix} P_c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,使得下面的线性矩阵不等式(LMI)

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} + 2E^T E + I < 0 \quad (18)$$

$$P_c P_c - \gamma^2 < 0 \quad (19)$$

$$2 - \gamma^2 < 0 \quad (20)$$

成立,其中 $\bar{A}^T P + P \bar{A} = A^T P_c + (r_x B^T P_c)^T B^T P_c + P_c A + r_x P_c B B^T P_c + P_c E_a^T E_a + F_a^T F_a$,则系统(12)存在输出反馈控制率 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_g + K_y \mathbf{v}$,使得系统(12)在控制器(20)作用下具有 H_∞ 范数界 γ 鲁棒镇定,其中 $K_y = r_y B^T P_c E^{-1}$.

证明. 构造下面 Lyapunov 函数

$$V(t) = \mathbf{z}^T \begin{pmatrix} P_c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{z} \quad (21)$$

对式(21)求关于时间 t 的导数,得

$$\dot{V}(t) = \mathbf{z}^T \left(\bar{A}^T \begin{pmatrix} P_c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{A} \right) \mathbf{z}$$

要使 $\dot{V}(t) < 0$,只需要 $\bar{A}^T \begin{pmatrix} P_c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{A} < 0$,

要使得上式 < 0 ,只需要下面不等式成立

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (A + \Delta A + BHE)^T P_c + & 0 \\ P_c(A + \Delta A + BHE) & 0 \end{pmatrix} < 0 \Leftrightarrow \\ & (A + \Delta A + BHE)^T P_c + P_c(A + \Delta A + BHE) < 0 \Rightarrow \\ & (A + BHE)^T P_c + P_c(A + BHE) + P_c E_a^T E_a P_c + \\ & F_a^T F_a < 0 \end{aligned}$$

令 $K_y = r_y B^T P_c E^{-1}$,可以求得 P_c ,得到输出反馈(15),使得自治系统(12)渐近稳定.令被控输出向量 $\mathbf{p}(t) = E\mathbf{x}(t) - \mathbf{v}_g$,证明系统(12)在零初始条件下,在输出反馈(15)作用下,对于任意的外部有界干扰 $\mathbf{w}_2(t)$,被控输出向量 $\mathbf{p}(t)$ 满足 $\|\mathbf{p}(t)\|_2 < \gamma \|\mathbf{w}_2(t)\|_2$,此时有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \mathbf{z}^T(t)(\bar{A}^T P + P \bar{A})\mathbf{z}(t) + \\ & \mathbf{w}_2^T(t) P \mathbf{z}(t) + \mathbf{z}^T(t) P \mathbf{w}_2(t) = \\ & \mathbf{z}^T(t)(\bar{A}^T P + P \bar{A})\mathbf{z}(t) + \mathbf{w}_1^T P_c \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P_c \mathbf{w}_1 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (\mathbf{p}^T \mathbf{p} - \gamma^2 \mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_2) dt = \\ & \int_0^\infty (\mathbf{p}^T \mathbf{p} - \gamma^2 \mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_2 + \dot{V}(t)) dt - V(\infty) + V(0) \leq \\ & \int_0^\infty (\mathbf{p}^T \mathbf{p} - \gamma^2 \mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_2 + \dot{V}(t)) dt < \\ & \int_0^\infty \mathbf{f}(t) dt < \int_0^\infty \mathbf{g}(t) dt \\ \mathbf{f}(t) &= \mathbf{x}^T(t)(A^T P_c + (r_y B^T P_c)^T B^T P_c + P_c A + \\ & r_y P_c B B^T P_c + P_c E_a^T E_a + F_a^T F_a)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T E^T E \mathbf{x} - \\ & \mathbf{x}^T E^T \mathbf{v}_g - \mathbf{v}_g^T E \mathbf{x} + \mathbf{v}_g^T \mathbf{v}_g - \gamma^2 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_g^T \mathbf{v}_g) + \\ & \mathbf{w}_1^T P_c \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P_c \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{g}(t) &= \mathbf{x}^T(t)(A^T P_c + (r_y B^T P_c)^T B^T P_c + P_c A + \\ & r_y P_c B B^T P_c + P_c E_a^T E_a + F_a^T F_a)\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T E^T E \mathbf{x} + \\ & 2\mathbf{v}_g^T \mathbf{v}_g - \gamma^2 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_g^T \mathbf{v}_g) + \mathbf{w}_1^T P_c P_c \mathbf{w}_1 + \mathbf{x}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

易见,只要下面三个不等式成立,那么式(12)是具有 H_∞ 范数界 γ 鲁棒镇定系统.

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} + 2E^T E + I < 0$$

$$P_c P_c - \gamma^2 < 0$$

$$2 - \gamma^2 < 0$$

□

4 控制算法仿真

为了验证所采用的算法的可行性,下面对所提出的算法进行仿真.采用如下 B 样条基函数构成的平方根 B 样

条模型构成系统 (12). B 样条逼近所需要的 B 样条定义如下:

$$\begin{aligned} B_1(y) &= 0.5(y-2)^2 I_1 + (-y^2 + 7y - 11.5) I_2 + 0.5(y-5)^2 I_3 \\ B_2(y) &= 0.5(y-3)^2 I_2 + (-y^2 + 9y - 19.5) I_3 + 0.5(y-6)^2 I_4 \\ B_3(y) &= 0.5(y-4)^2 I_3 + (-y^2 + 11y - 29.5) I_4 + 0.5(y-7)^2 I_5 \end{aligned}$$

式中

$$I_i = \begin{cases} 1 & y \in [i+1, i+2] \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5$$

系统 (12) 模型参数矩阵为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 1.2 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}, \\ E a &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad F a = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

式中 m 在 $[0, 1]$ 区间内随机变化.

目标概率密度函数所对应的目标权值为: $\mathbf{v}_g = [1.1 \quad 1.45]^T$. $E a, F a$ 组成了不确定性部分 ΔA . 取 $r_y = 0.01, \gamma = 1.5$, 从而得到控制器

$$K_y = \begin{bmatrix} 0.0392 & -0.0170 \\ 0.0023 & 0.0043 \end{bmatrix}$$

图 1 是平方根 B 样条逼近下目标权值对应的概率密度函数. 在控制算法的作用下, 得到了系统输出概率密度函数, 如图 2 所示. 目标概率密度函数和系统输出的概率密度函数之差如图 3 所示. 从仿真的结果可以看出, 输出 PDF 能够较好地逼近目标概率密度函数. 从上面的例子可以看出, 当控制器的维数 m 和 B 样条的个数 n 存在关系 $m = n - 1$ 时, 控制系统能够取得良好的跟踪效果, 但是当 $m < n - 1$ 时, 一般来说, 系统难以取得良好的跟踪效果. 然而, 如果系统在有限的时间内是可控的, 那么系统能够很好地跟踪目标概率密度函数.

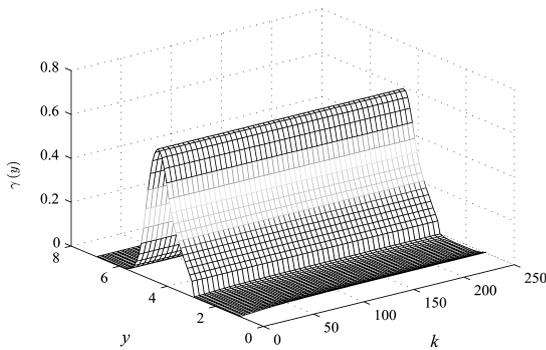


图 1 目标权值对应的概率密度函数

Fig. 1 PDF corresponding to desired weights values

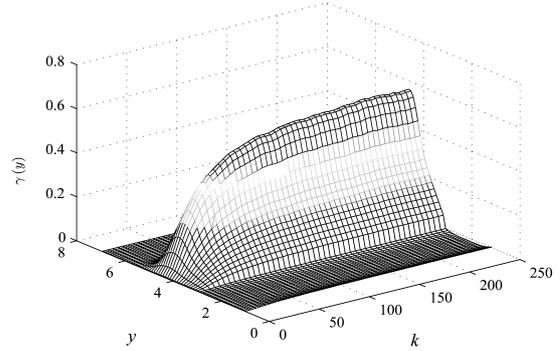


图 2 控制器 (15) 作用下的 PDF

Fig. 2 PDF of system output based on controller (15)

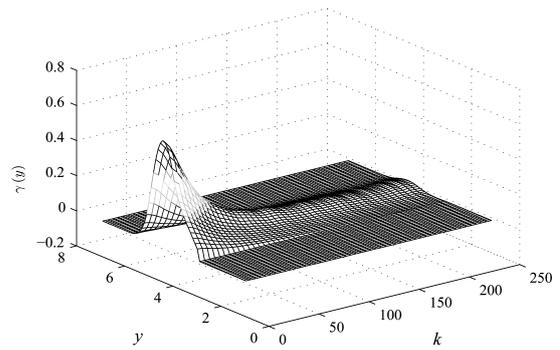


图 3 控制器 (15) 作用下的 PDF 误差

Fig. 3 PDF error of Figs. 1 and 2 based on controller (15)

5 结论

本文研究了参数随机变化的一类非高斯随机系统的概率密度函数跟踪问题. 首先利用平方根 B 样条逼近, 把非高斯随机系统转化为多输入多输出系统, 接着给出了系统输出概率密度函数跟踪给定概率密度函数的控制存在的充分条件, 进而完成了状态反馈和输出反馈跟踪控制器的设计, 得到了系统具有 H_∞ 范数界 γ 鲁棒镇定的结果, 使得输出的权值逼近给定的目标权值, 从而实现目标概率密度函数的跟踪. 从仿真结果可以看出, 提出的控制算法能很好地实现概率密度函数跟踪.

References

- 1 Astrom K J. *Introduction to Stochastic Control Theory*. New York: Academic Press, 1970
- 2 Wellstead P E, Zarrop M B. *Self-Tuning Systems: Control and Signal Processing*. New York: John Wiley & Sons, 1991
- 3 Brown M, Harris C J. Neurofuzzy adaptive modeling and control. In: *Proceedings of Prentice-Hall, Hemel-Hempstead*. Englewood: 1994
- 4 Gajic Z R, Losada R. Monotonicity of algebraic Lyapunov iterations for optimal control of jump parameter linear systems. In: *Proceedings of American Control Conference*. Philadelphia, USA: 1998. 746~750
- 5 Wang H. *Bounded Dynamic Stochastic Systems: Modeling and Control*. London: Springer-Verlag, 2000

- 6 Sun X B, Wang H. Closed loop control of gas jet flames distribution using probability density function shaping techniques. In: Proceedings of American Control Conference. USA: 2004
- 7 Cao L L, Yue H. Modelling and control of molecular weight distribution for a polycondensation process. In: Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Intelligent Control. China: IEEE, 2004. 137~142
- 8 Wang Hong, Yue Hong. Output PDF control of stochastic distribution systems: modeling, control and applications. *Control Engineering of China*, 2003, **10**(3): 193~197
(王宏, 岳红. 随机系统输出分布的建模、控制与应用. *控制工程*, 2003, **10**(3): 193~197)
- 9 Guo L, Wang H. PID controller design for output PDFs of stochastic systems using linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 2005, **35**(1): 65~71
- 10 Zhou Jing-Lin, Yue Hong, Wang Hong. Shaping of output PDF based on the rational square-root B-spline model. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(3): 343~351
(周靖林, 岳红, 王宏. 基于有理平方根 B 样条模型的概率密度函数形状控制. *自动化学报*, 2005, **31**(3): 343~351)
- 11 Guo L, Wang H. Applying nonlinear generalized constrained Pi strategy to PDF tracking control through square root B-spline models. *International Journal of Control*, 2004, **77**(17): 1481~1492
- 12 Wang H. Minimum entropy control of non-Gaussian dynamic stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(2): 398~503
- 13 Yue H, Wang H. Minimum tracking error entropy control for non-Gaussian stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(1): 118~122
- 14 Yue H, Jiao J, Brown E, Wang H. Real-time entropy control of stochastic systems for an improved paper web formation. *Journal of Measurement and Control*, 2001, **34**(5): 134~139
- 15 Wang H. Multivariable output probability density function control for non-Gaussian stochastic systems using simple MLP neural networks. In: Proceedings of Intelligent Control Systems and Signal Processing. Faro, Portugal: 2003. 84~89
- 16 Zhou J L, Wang H. Optimal tracking control of the output probability density functions: square root B-spline model. *Control Theory and Applications*, 2005, **22**(3): 369~376
- 17 Wang Y J, Wang H. Output PDFs control for linear stochastic systems with arbitrarily bounded random parameters: a new application of the Laplace transform. In: Proceedings of the American Control Conference. Anchorage, USA: 2002. 4262~4267

陈海永 中国科学院自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为一般随机系统的建模和控制, 鲁棒控制. E-mail: haiyong.chen@ia.ac.cn
(CHEN Hai-Yong Ph. D. candidate at Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers modeling and control in general stochastic distribution systems and robust control.)

王宏 博士, 曼彻斯特大学教授, 控制中心主任, 东北大学长江学者. 主要研究方向为随机分布控制, 故障检测和诊断, 神经网络建模和控制. 本文通信作者. E-mail: hong.wang@manchester.ac.uk
(WANG Hong Ph. D., professor, director of Control Systems Centre, University of Manchester, Changjiang Scholars of Northeastern University. His research interest covers stochastic distribution control, fault detection and diagnosis, and neural network modeling and control. Corresponding author of this paper.)