第 33 卷 第 11 期 自 动 化 学 报 Vol. 33, No. 11
2007 年 11 月 ACTA AUTOMATICA SINICA November, 2007

区间变时滞不确定线性系统带记忆 H_∞ 状态反馈控制

郑 敏 [1] 费树岷 [1]

摘 要 一类存在范数有界不确定性的线性时变时滞系统, 其时变时滞仅给出时滞变化的上下界, 而对时滞变化率未作任何约束. 对于这类区间时变时滞系统, 给出了一种新型的 Lyapunov-Krasovskii 泛函讨论其稳定性, 通过分割平均时滞的方法减小保守性, 得到以线性矩阵不等式 (LMI) 形式给出的稳定性判据. 最后分析并给出了一种带记忆的 H_∞ 状态反馈控制器. 数值实例表明了本文方法的有效性.

关键词 区间时变时滞, 时滞系统, 线性矩阵不等式 (LMI), 带记忆 H_∞ 状态反馈控制
中图分类号 TP13

H_∞ State Feedback Control with Memory for Uncertain Linear Systems with Interval Time-varying Delay

ZHENG Min[1] FEI Shu-Min[1]

Abstract A new type of Lyapunov-Krasovskii functional based on fractioning the average delay approach is presented to analyze the stability of a class of linear systems with norm-bounded uncertainty and interval time-varying delay which belongs to a given interval and has no restriction on the delay-derivative. The delay-dependent conditions are proposed in terms of linear matrix inequality (LMI) and the conservatism is reduced through our delay fractioning method. Then the H_∞ state feedback controller with memory is presented through analyzing the stability of the closed-loop system. Numerical examples are also given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words Interval time-varying delay, time delay systems, LMI, H_∞ state feedback control with memory

1 引言

在控制系统中由于系统的量测, 信息的交换及传输等而造成滞后现象. 时滞的出现往往导致系统控制效果不佳, 甚至使得系统不稳定. 因此, 时滞系统的稳定性研究得到了广泛关注. 一方面探索保守性小且有效的稳定性分析方法; 另一方面研究时滞系统的控制综合问题. 近年来, 对于时滞系统的稳定性分析已经取得了较大发展[1~8], 对于变时滞系统以及存在不确定性的系统, 人们通常采用时域分析来研究这一问题. 在时域内, 一是基于 Lyapunov–Razumikhin 定理的方法; 二是基于 Lyapunov–Krasovskii 泛函的方法. 前者的优点在于无需选择复杂的 Lyapunov 函数, 且可以处理任意时滞变化率的时滞问题, 缺点是所得结果保守性大. 因此, 对保守性要求较高的系统通常用后者, 然而如何选取合适的 Lyapunov–Krasovskii 泛函是个难题, 因为不同形式的泛函可能导致不同的保守性, 另外不同的放大技巧, 不同形式的模型变换也将影响保守程度. 因此如何改进时滞系统的稳定性条件, 从而获得保守性更小、形式更简洁的结果是一个相当困难且重要的问题. Fridman 等[1, 2] 给出了一种基于 “descriptor form” 的 Lyapunov–Krasovskii 泛函分析方法, 由于能一次集中放大不等式, 结论的保守性大为改善. Xu 等[8] 针对固定单时滞线性系统, 给出了一种不需要放大任何交叉项的稳定性分析方法, 也因此获得了较好的保守性效果. Gu 等[4] 基于完整性泛函提出一种离散化方案, 解决了时变矩阵的计算难题, 虽然保守性得到改善, 但这种基于完整性泛函的判据过于繁琐, 随着离散程度的精细化矩阵变量急剧增加而引起计算负担. Peaucelle 等[3] 利用拓扑分离的概念代替 Lyapunov 理论讨论固定时滞系统的稳定性问题, 通过人为等分时滞的手段减小稳定性判据的保守性. 这种方法的难点在于如何寻找合适的分离算子, 且对变时滞情形难以推广. He 等[5] 给出一种添加松弛变量的有效方法, 虽然一定程度增加了计算量, 但能有效改善结论的保守性. 上述方法大都针对固定时滞或时滞变化率限制在 1 以内的变时滞系统, 对快速变化的变时滞问题不适用. Jiang 等[6, 7] 针对网络控制系统中存在的任意时变时滞问题, 利用模型变换技巧基于 Lyapunov– Krasovskii 泛函方法研究这一问题. 本文借鉴其模型变换技巧, 通过时滞分割手段进一步改善保守性, 被分割的时滞为时滞区间的中间值, 而非时滞最小值. 以往仅见对最小时滞的离散化方案, 而对最小时滞为零的变时滞系统, 则没有办法进行时滞分割, 也就无法通过时滞离散化减小保守性. 而本文方法无论何种情形下都能通过时滞分割来减小保守性, 同时在推导过程中无需添加松弛变量而不影响保守性, 最终结论以线性矩阵不等式 (LMI) 形式给出, 不仅保守性小, 且 LMI 中矩阵变量数目较少. 最后分析并给出了存在范数有界不确定性的变时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制器. 这种带记忆状态的控制器仅在固定时滞系统中得到应用, 在变时滞系统的控制中尚未见报道. 上述结论通过数值实例证实了其有效性.

2 问题的提出

考虑如下时变时滞系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = [A + \Delta A(t)]\boldsymbol{x}(t) + [A_1 + \Delta A_1(t)]\times \\ \qquad \boldsymbol{x}(t-h(t)) + [B + \Delta B(t)]\boldsymbol{u}(t) + B_w\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D_1\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), \qquad \forall\, t \in [-h_M, 0] \end{cases} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^{n_1}$ 为控制输入向量, $\boldsymbol{w}(t) \in \mathbf{R}^{n_2}$ 为干扰输入向量, A、A_1、B、B_w、C、D_1 为具有适当维数的已知常数矩阵, $\Delta A(t)$、$\Delta A_1(t)$、$\Delta B(t)$ 为未知的适当维数的时变参数不确定性, 且具有如下形式

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t) & \Delta A_1(t) & \Delta B(t)\end{bmatrix} = DF(t)\begin{bmatrix}G & G_1 & G_b\end{bmatrix} \tag{2}$$

收稿日期 2006-12-13 收修改稿日期 2007-4-7
Received December 13, 2006; in revised form April 7, 2007
国家自然科学基金 (60574006) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60574006)
1. 东南大学自动化研究所 南京 210096
1. Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096
DOI: 10.1360/aas-007-1211

这里 D、G、G_1、G_b 为适当维数的已知常数矩阵, $F(t)\in\mathbf{R}^{\alpha\times\beta}$ 为未知矩阵函数, 且满足

$$F(t)^{\mathrm{T}}F(t)\le I \tag{3}$$

$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为系统初始状态函数. $h(t)$ 为连续时变函数, 表示系统状态的时滞, 并满足

$$0\le h_m\le h(t)\le h_M \tag{4}$$

这里 h_m 和 h_M 为已知常数. 注意上式对时变时滞的描述中仅给出了时滞变化的上下界, 而未给出时滞变化率约束, 因此称之为区间时变时滞. 相应的系统 (1) 称为区间时变时滞不确定系统.

对于给定的常数 $\gamma>0$, 定义性能指标

$$J(\boldsymbol{w})=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{z}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t)-\gamma^2\boldsymbol{w}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}(t)]\mathrm{d}t \tag{5}$$

本文的目的：1) 给出当 $\boldsymbol{u}(t)=0$ 时系统 (1) 的时滞相关的有界实引理 (Bounded real lemma, BRL); 2) 设计带记忆的 H_∞ 状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)+K_m\boldsymbol{x}(t-h_a) \tag{6}$$

(h_a 由式 (9) 给出) 使得闭环系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A+BK+\Delta A(t)+\Delta B(t)K]\boldsymbol{x}(t)+\\ \qquad [A_1+\Delta A_1(t)]\boldsymbol{x}(t-h(t))+\\ \qquad [BK_m+\Delta B(t)K_m]\boldsymbol{x}(t-h_a)+B_w\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)=(C+D_1K)\boldsymbol{x}(t)+D_1K_m\boldsymbol{x}(t-h_a)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t),\qquad \forall\, t\in[-h_M,0]\end{cases} \tag{7}$$

内部是鲁棒稳定的 ($\boldsymbol{w}(t)=0$), 且满足 H_∞ 性能 $\|\boldsymbol{z}(t)\|_2<\gamma\|\boldsymbol{w}(t)\|_2$(其中 $\|\boldsymbol{.}\|_2$ 为 L_2 范数).

3 主要结果

3.1 时滞相关的有界实引理 (BRL)

首先考虑如下名义系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-h(t))+B_w\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t),\qquad \forall\, t\in[-h_M,0]\end{cases} \tag{8}$$

为研究该系统的时滞相关的 BRL, 类似文 [6] 定义如下两个时滞参数

$$h_a=(h_M+h_m)/2,\quad \delta=(h_M-h_m)/2 \tag{9}$$

这里, h_a,δ 分别表示时变时滞的平均值和时滞波动的幅度. 本文将给出一种时滞分割形式的 Lyapunov–Krasovskii 泛函来分析系统的稳定性, 这里被分割的时滞为 h_a, 而不是 h_m, 这也将进一步减小变时滞系统稳定性判据的保守性. 根据 Leibniz–Newton 公式, 系统 (8) 可以重新写成如下形式

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-h_a)+A_1\int_{t-h_a}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(\theta)\mathrm{d}\theta+\\ \qquad B_w\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t),\qquad \forall\, t\in[-h_M,0]\end{cases} \tag{10}$$

对于系统 (8), 有如下时滞相关的 BRL:

定理 1. 对给定的区间时变时滞系统 (8), 如果存在正定矩阵 P, Q_i, $R_i(i=1,2)$, $S\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 使得线性矩阵不等式

$$\Gamma<0 \tag{11}$$

成立, 则该系统是渐近稳定的, 且对所有非零向量 $\boldsymbol{w}(t)\in l_2[0,\infty)$ 满足 $\|\boldsymbol{z}(t)\|_2<\gamma\|\boldsymbol{w}(t)\|_2$ (矩阵 Γ 的定义见下页式 (15)).

证明. 选取如下基于分割时滞 h_a 形式的 Lyapunov–Krasovskii 泛函 (以分割数目 $r=2$ 为例)

$$V(\boldsymbol{x}_t)=V_{fa}(\boldsymbol{x}_t)+V_v(\boldsymbol{x}_t) \tag{12}$$

这里

$$V_{fa}=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{r}\int_{t-\frac{i}{r}h_a}^{t-\frac{i-1}{r}h_a}\boldsymbol{x}(s)^{\mathrm{T}}Q_i\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\\ \sum_{i=1}^{r}\frac{h_a}{r}\int_{t-\frac{i}{r}h_a}^{t-\frac{i-1}{r}h_a}\int_s^t\dot{\boldsymbol{x}}(\theta)^{\mathrm{T}}R_i\dot{\boldsymbol{x}}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s$$

$$V_v=\begin{cases}\delta\int_{t-h_a}^{t-h_m}\int_s^t\dot{\boldsymbol{x}}(\theta)^{\mathrm{T}}S\dot{\boldsymbol{x}}(\theta)\mathrm{d}(\theta)\mathrm{d}s & h_m\le h(t)<h_a\\ 0 & h(t)=h_a\\ \delta\int_{t-h_M}^{t-h_a}\int_s^t\dot{\boldsymbol{x}}(\theta)^{\mathrm{T}}S\dot{\boldsymbol{x}}(\theta)\mathrm{d}(\theta)\mathrm{d}s & h_a<h(t)\le h_a\end{cases}$$

显然, $h(t)$ 必然处于上述三种情形之一. 下面分三种情形进行讨论:

情形 1. $h_m\le h(t)<h_a$.

沿系统 (10) 对 $V(\boldsymbol{x}_t)$ 求导, 可得

$$\dot V(\boldsymbol{x}_t)=\dot V_{fa}(\boldsymbol{x}_t)+\dot V_v(\boldsymbol{x}_t)\le\boldsymbol{\eta}(t)^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{\eta}(t) \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}(t)^{\mathrm{T}}$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}(t-\frac{h_a}{2})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}(t-h_a)^{\mathrm{T}} & (\int_{t-h_a}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(\theta)\mathrm{d}(\theta))^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

Λ 见下页式 (14), $R_s=(\dfrac{h_a}{2})^2(R_1+R_2)+\delta^2S$.

考虑系统 (8) 的性能指标 (5) , 令初始值 $\phi=0,t\in[-h_M,0]$, 有

$$\Lambda=\begin{bmatrix} A^{\mathrm T}P+PA-Q_1+R_1+A^{\mathrm T}R_sA & R_1 & PA_1+A^{\mathrm T}R_sA_1 & PA_1+A^{\mathrm T}R_sA_1\\ * & Q_2-Q_1-R_1-R_2 & R_2 & 0\\ * & * & -Q_2-R_2+A_1^{\mathrm T}R_sA_1 & A_1^{\mathrm T}R_sA_1\\ * & * & * & A_1^{\mathrm T}R_sA_1-S\end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix} A^{\mathrm T}P+PA-Q_1+R_1+ \\ A^{\mathrm T}R_sA+C^{\mathrm T}C & R_1 & PA_1+A^{\mathrm T}R_sA_1 & PA_1+A^{\mathrm T}R_sA_1 & PB_w+A^{\mathrm T}R_sB_w\\ * & Q_2-Q_1-R_1-R_2 & R_2 & 0 & 0\\ * & * & -Q_2-R_2+A_1^{\mathrm T}R_sA_1 & A_1^{\mathrm T}R_sA_1 & A_1^{\mathrm T}R_sB_w\\ * & * & * & A_1^{\mathrm T}R_sA_1-S & A_1^{\mathrm T}R_sB_w\\ * & * & * & * & -\gamma^2I+B_w^{\mathrm T}R_sB_w\end{bmatrix} \tag{15}$$

$$J(\boldsymbol w)=\int_0^\infty[\boldsymbol z(t)^{\mathrm T}\boldsymbol z(t)-\gamma^2\boldsymbol w(t)^{\mathrm T}\boldsymbol w(t)+\dot V(t,\boldsymbol x_t)]\mathrm dt\le$$

$$\int_0^\infty\begin{bmatrix}\boldsymbol\eta(t)^{\mathrm T} & \boldsymbol w(t)^{\mathrm T}\end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix}\boldsymbol\eta(t)\\ \boldsymbol w(t)\end{bmatrix}\mathrm dt \tag{16}$$

其中 Γ 见式 (15), 显然, 当 $\Gamma<0$ 即式 (11) 成立时, $\Lambda<0$ 必然成立, 则存在正数 ϵ_2, 使得 $\dot V(\boldsymbol x_t)\le-\epsilon_2\boldsymbol x(t)^2$, 因此系统 (8) 是渐近稳定的; 同时式 (11) 成立时, 则 $J(\boldsymbol w)<0$, 即对所有非零向量 $\boldsymbol w(t)\in l_2[0,\infty)$ 满足 $\|\boldsymbol z(t)\|_2<\gamma\|\boldsymbol w(t)\|_2$.

情形 2. $h(t)=h_a$.

类似上述分析, 由于 $\dot V(\boldsymbol x_t)=0$, 在得到的形如 (13) 和 (16) 表达式中, Λ 和 Γ 分别为 (14) 和 (15) 的矩阵主子式, 因此只要式 (11) 成立, 系统 (8) 是渐近稳定的, 且满足 H_∞ 性能指标 γ.

情形 3. $h_a<h(t)\le h_M$.

推导过程与情形 1 类似, 在沿着系统对泛函求导过程中, 第一部分 $\dot V_{fa}(\boldsymbol x_t)$ 的形式与情形 1 完全相同, 第二部分

$$\dot V_v(\boldsymbol x_t)=\delta^2\dot{\boldsymbol x}(t)^{\mathrm T}S\dot{\boldsymbol x}(t)-\delta\int_{t-h_M}^{t-h_a}\dot{\boldsymbol x}(\theta)^{\mathrm T}S\dot{\boldsymbol x}(\theta)\mathrm d\theta\le$$

$$\delta^2\dot{\boldsymbol x}(t)^{\mathrm T}S\dot{\boldsymbol x}(t)-\delta\int_{t-h(t)}^{t-h_a}\dot{\boldsymbol x}(\theta)^{\mathrm T}S\dot{\boldsymbol x}(\theta)\mathrm d\theta\le$$

$$\delta^2\dot{\boldsymbol x}(t)^{\mathrm T}S\dot{\boldsymbol x}(t)-(\int_{t-h_a}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol x}(\theta))^{\mathrm T}S(\int_{t-h_a}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol x}(\theta))\mathrm d\theta$$

也可转化成完全相同的形式, 因此可以得到与情形 1 相同的结论, 在此不再赘述.

综上所述, 当式 (11) 成立时系统 (8) 是渐近稳定的, 且对所有非零向量 $\boldsymbol w(t)\in l_2[0,\infty)$, 满足 $\|\boldsymbol z(t)\|_2<\gamma\|\boldsymbol w(t)\|_2$. $\square$

再考虑如下形式的时滞系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol x}(t)=[A+\Delta A(t)]\boldsymbol x(t)+\\ \qquad [A_1+\Delta A_1(t)]\boldsymbol x(t-h(t))+\\ \qquad [A_2+\Delta A_2]\boldsymbol x(t-h_a)+B_w\boldsymbol w(t)\\ \boldsymbol z(t)=C\boldsymbol x(t)+C_1\boldsymbol x(t-h_a)\\ \boldsymbol x(t)=\boldsymbol\Phi(t),\quad\forall\, t\in[-h_M,0]\end{cases} \tag{17}$$

引理 1[5]**.** 令 U,V,F 为适当维数的实矩阵, 且 $F^{\mathrm T}F\le I$, 则对任意标量 $\epsilon>0$, 有如下不等式成立

$$UFV+(UFV)^{\mathrm T}\le\epsilon^{-1}UU^{\mathrm T}+\epsilon V^{\mathrm T}V$$

定理 2. 对给定的不确定线性时滞系统 (17), 如果存在一个标量 $\epsilon>0$, 正定矩阵 P, $Q_i,R_i(i=1,2)$, $S\in\mathbf R^{n\times n}$, 使得线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}\Omega & \Gamma_1 & \Gamma_2\\ * & -\epsilon I & 0\\ * & * & -\epsilon I\end{bmatrix}<0 \tag{18}$$

成立, 则该系统是鲁棒渐近稳定的, 且对所有非零向量 $\boldsymbol w(t)\in l_2[0,\infty)$ 满足 $\|\boldsymbol z(t)\|_2<\gamma\|\boldsymbol w(t)\|_2$. 其中

$$\Gamma_1=\begin{bmatrix}D^{\mathrm T}P & 0 & 0 & 0 & 0 & D^{\mathrm T}R_s\end{bmatrix}^{\mathrm T}$$

$$\Gamma_2=\begin{bmatrix}\epsilon G & 0 & \epsilon(G_1+G_bK_m) & \epsilon G_1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm T}$$

$R_s=(\dfrac{h_a}{2})^2(R_1+R_2)+\delta^2S$ (矩阵 Ω 见下页上方的式 (18a)).

$$\Omega = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + Q_1 - R_1 + C^{\mathrm{T}}C & R_1 & P(A_1 + A_2) + C^{\mathrm{T}}C_1 & PA_1 & PB_w & A^{\mathrm{T}}R_s \\ * & -Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2 - R_2 + C_1^{\mathrm{T}}C_1 & 0 & 0 & (A_1 + A_2)^{\mathrm{T}}R_s \\ * & * & * & -S & 0 & A_1^{\mathrm{T}}R_s \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & B_w^{\mathrm{T}}R_s \\ * & * & * & * & * & -R_s \end{bmatrix} \tag{18a}$$

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + Q_1 - R_1 & R_1 & PA_1 & PA_1 & A^{\mathrm{T}}R_s \\ * & -Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2 & R_2 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2 - R_2 & 0 & A_1^{\mathrm{T}}R_s \\ * & * & * & -S & A_1^{\mathrm{T}}R_s \\ * & * & * & * & -R_s \end{bmatrix} \tag{19a}$$

证明. 对于系统 (17) 取形如式 (12) 的 Lyapunov–Krasovskii 泛函, 具体分析过程与前文类似, 沿着系统对泛函求导, 可以得到 $\dot{V}(\boldsymbol{x}_t) \le \boldsymbol{\eta}(t)^{\mathrm{T}}\tilde{\Lambda}\boldsymbol{\eta}(t)$ (其中 $\boldsymbol{\eta}$ 同式 (13) 中定义, $\tilde{\Lambda}$ 具体形式略), 再考虑性能指标 (5), 有 $J(\boldsymbol{w}) \le \int_0^{\infty} \begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}(t)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{w}(t)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tilde{\Gamma} \begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}(t) \\ \boldsymbol{w}(t)\end{bmatrix} \mathrm{d}t$, 因此欲使 $J_T < 0$, 只要 $\tilde{\Gamma} < 0$. 根据 Schur 补充引理, 又等价于 $\tilde{\Omega} < 0$ (将 Ω 中的 A, A_1, A_2 替换为 $A + \Delta A, A_1 + \Delta A_1, A_2 + \Delta A_2$, 即为 $\tilde{\Omega}$). 再根据引理 1, 可以得到定理 2 的结论. □

推论 1. 对于区间时变时滞不确定系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + \Delta A(t))\boldsymbol{x}(t) + (A_1 + \Delta A_1(t))\boldsymbol{x}(t - h(t))$ (变量定义同上), 如果存在一个标量 $\epsilon > 0$, 正定矩阵 P, $Q_i, R_i (i = 1, 2)$, $S \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 使得线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & \tilde{\Gamma_1} & \tilde{\Gamma_2} \\ * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

成立, 则该系统是鲁棒渐近稳定的. 其中

$$\tilde{\Gamma_1} = \begin{bmatrix} D^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & D^{\mathrm{T}}R_s \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\Gamma_2} = \begin{bmatrix} \epsilon G & 0 & \epsilon G_1 & \epsilon G_1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

矩阵 Ω 见本页上方的式 (19a).

3.2 状态反馈鲁棒 H_∞ 控制

下面的定理将给出系统 (1) 的鲁棒 H_∞ 控制结论.

定理 3. 对于区间时变时滞不确定时滞系统 (1), 如果存在一个标量 $\epsilon > 0$, 正定矩阵 $\tilde{P}$, $\tilde{Q}_i, \tilde{R}_i (i = 1, 2)$, $Y, \tilde{S} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 及矩阵 $\tilde{K}, \tilde{K_m} \in \mathbf{R}^{n_1\times n}$, 使得

$$\tilde{P}Y^{-1}\tilde{P} = (\frac{h_a}{2})^2(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2) + \delta^2\tilde{S} \tag{20}$$

及线性矩阵不等式 (21)(见下页上方) 成立, 则可取形如 (6) 的带记忆状态反馈控制器, 使得系统 (1) 是鲁棒渐近稳定的. 且对所有非零向量 $\boldsymbol{w}(t) \in l_2[0, \infty)$ 满足 $\|\boldsymbol{z}(t)\|_2 < \gamma\|\boldsymbol{w}(t)\|_2$. 而且 (6) 的增益矩阵为 $K = \tilde{K}\tilde{P}^{-1}$, $K_m = \tilde{P}^{-1}$. 式 (21) 中, $\Pi_1 = (A\tilde{P} + B\tilde{K})^{\mathrm{T}} + (A\tilde{P} + B\tilde{K}) + \tilde{Q}_1 - \tilde{R}_1$, $\Pi_2 = -\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 - \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2$.

证明. 根据定理 2, 将式 (18a) 中的 A, A_2 分别替换为 $A + BK, BK_m$; C, C_1 分别替换为 $C + DK, DK_m$; G 替换为 $G + G_bK$. 然后在不等式 (18) 的左边两侧同乘以对角矩阵 $\mathrm{diag}\{\tilde{P}, \tilde{P}, \tilde{P}, \tilde{P}, I, R_s^{-1}, I, I\}, \tilde{P} = P^{-1}$, 并记 $\tilde{Q}_1 = \tilde{P}Q_1\tilde{P}$, $\tilde{Q}_2 = \tilde{P}Q_2\tilde{P}$, $\tilde{R}_1 = \tilde{P}R_1\tilde{P}$, $\tilde{R}_2 = \tilde{P}R_2\tilde{P}$, $\tilde{S} = \tilde{P}S\tilde{P}$, $\tilde{K} = K\tilde{P}$, $\tilde{K}_m = K_m\tilde{P}$, $Y = R_s^{-1}$, 再利用 Schur 补充引理, 可以得到定理 3 的结论. □

注 1. 如果令 $K_m = 0$, 则可以得到一般的无记忆状态反馈控制器, 将式 (21) 中 $\tilde{K}_m$ 取为零即可得到相应的控制结论. 不难看出带记忆状态控制器相应的不等式可解性更好.

注 2. 对于线性矩阵不等式 (21) 在非凸约束 (20) 下的求解问题, 可以利用简单的调整参数法, 即作如下矩阵限制：令 $Y = \alpha\tilde{P} (\alpha > 0)$, 所以 $Y^{-1} = \alpha\tilde{P}^{-1}$, 又因为 $Y = R_s^{-1}, \tilde{P}Y^{-1}\tilde{P} = \tilde{R}_s$, 所以 $\tilde{P} = \alpha\tilde{R}_s = \alpha((\frac{h_a}{2})^2(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2) + \delta^2\tilde{S})$, 将 $\tilde{P} = \alpha\tilde{R}_s$ 和 $Y = \alpha^2\tilde{R}_s$ 代入式 (21), 通过不同的 α 进行求解.

4 数值实例

下面通过对文献 [6] 和 [7] 中的实例进行验证比较来说明本文方法的有效性.

例 1. 考虑如下不确定性时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 + \delta_1 & 0 \\ 0 & -1 + \delta_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 + \gamma_1 & 0 \\ -1 & -1 + \gamma_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t - h(t))$$

这里 $\left|\delta_1\right| \le 1.6$, $\left|\delta_2\right| \le 0.05$, $\left|\gamma_1\right| \le 0.1$, $\left|\gamma_2\right| \le 0.3$, 且 $h(t)$ 为连续函数. 选取

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & \tilde{R}_1 & A_1\tilde{P}+B\tilde{K}_m & A_1\tilde{P} & B_w & (A\tilde{P}+B\tilde{K})^{\mathrm{T}} & \epsilon D & (G\tilde{P}+G_b\tilde{K})^{\mathrm{T}} & (C\tilde{P}+D_1\tilde{K})^{\mathrm{T}} \\ * & \Pi_2 & \tilde{R}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tilde{Q}_2-\tilde{R}_2 & 0 & 0 & (A_1\tilde{P}+B\tilde{K}_m)^{\mathrm{T}} & 0 & (G_1\tilde{P}+G_b\tilde{K}_m)^{\mathrm{T}} & (D_1\tilde{K}_m)^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -\tilde{S} & 0 & \tilde{P}A_1^{\mathrm{T}} & 0 & \tilde{P}G_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & B_w^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Y & -\epsilon D & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\epsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

$$D=\begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0 & 0.04\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}160 & 0\\ 0 & 1.25\end{bmatrix}, G_1=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 7.5\end{bmatrix},$$

文献 [2] 给出的上界为 0.7692, 而文献 [6] 给出的当 $h_m=0$ 时, 时滞界为 0.8654 (见表 1 所示), 更重要的是其能够处理 h_m 不为零的情形, 而本文推论 1 在 $r=2$ 粗略划分的情况下, 给出的时滞上界较前者更大, 通过对表 1 中所示的数值进行比较, 不难看出本文方法保守性更小.

表 1　最大允许时滞界

Table 1　Maximum allowable delay bounds

h_m	h_M ([6])	h_M (本文推论 1)
0	0.8654	0.8934
0.10	0.8873	0.9222
0.50	0.9832	1.0494
1.00	1.1336	1.2415
1.2051	1.2051	1.3303
1.4366	–	1.4367

例 2. 考虑形如 (1) 的系统, 矩阵参数见文献 [7].

已知变时滞 $1.2 \le h(t) \le 1.8$, 应用本文定理 3, 并取 $\alpha=0.1$, $\beta=0.00001$, $\gamma=0.015$ 时, 控制增益矩阵为

$$K=\begin{bmatrix}2.8177 & 0.6227 & -0.0487\\ -0.5418 & -3.5221 & 1.4075\\ -0.8697 & 1.1716 & -3.6851\end{bmatrix},$$

$$K_m=\begin{bmatrix}-0.1463 & -0.0086 & -0.0263\\ -0.0110 & 0.1280 & -0.0895\\ -0.0011 & -0.0481 & 0.0677\end{bmatrix}.$$

而在相应条件下, 文献 [7] 无可行解, 可见本文方法更为有效.

5　结论

本文针对一类区间时变时滞系统, 通过时滞分割法改善传统的 Lyapunov–Krasovskii 泛函稳定性方法的保守性. 尤其是被分割时滞为时滞区间的中间值, 而不是时滞下界, 克服了当时滞下界为零时没有时滞划分的缺陷, 同时泛函中的矩阵变量数目较少, 一定程度克服了因为时滞分割带来的计算负担. 最后研究了一类不确定时变时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 给出一种带记忆状态的反馈控制器, 实例表明了该法的有效性.

References

1 Fridman E, Shaked U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(2): 253∼270

2 Fridman E, Shaked U. Delay dependent stability and H_∞: constant and time-varying delays. *International Journal of Control*, 2003, **76**(1): 48∼60

3 Gouaisbaut F, Peaucelle D. Delay-dependent robust stability of time delay systems [Online], available: http://www.laas.fr/Peaucelle/papers/ROCOND06_2.pdf, July 8, 2006

4 Gu K G. Discretization schemes for Lyapunov-Krasovskii functionals in time-delay systems. *Kybernetika*, 2001, **37**(4): 479∼504

5 He Y, Wu M, She J H, Liu G P. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays. *Systems and Control Letters*, 2004, **51**(1): 57∼65

6 Jiang X F, Han Q L. Delay-dependent robust stability for uncertain linear systems with interval time-varying delay. *Automatica*, 2006, **42**(6): 1059∼1965

7 Jiang X F, Han Q L. On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay. *Automatica*, 2005, **41**(12): 2099∼2106

8 Xu S Y, Lam J. Improved delay-dependent stabilty criteria for time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(3): 384∼387

郑 敏　东南大学自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为时滞系统的分析与综合, 遥操作系统. 本文通信作者.
E-mail: zhengmin203@163.com
(**ZHENG Min**　Ph. D. candidate at Institute of Automation, Southeast University. His research interest covers analysis and synthesis of time delay systems and teleoperation systems. Corresponding author of this paper.)

费树岷　东南大学自动化研究所教授. 主要研究方向为非线性控制系统设计与综合, 鲁棒控制, 时滞系统分析与综合.
E-mail: smfei@seu.edu.cn
(**FEI Shu-Min**　Professor at Institute of Automation, Southeast University. His research interest covers analysis and synthesis of nolinear control systems, time delay systems, and robust control.)