第 33 卷 第 11 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 33, No. 11
2007 年 11 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　November, 2007

带有界扰动的一类非线性系统的鲁棒控制

傅 勤 [1,2]　曲文波 [1,3]　杨成梧 [1]

摘　要　对带有界扰动的一类非线性系统进行了状态反馈控制设计. 当状态反馈控制律作用于该系统时, 系统的状态能够收敛到原点的一个小邻域内.

关键词　非线性系统, 状态反馈, 鲁棒控制
中图分类号　TP13

Robust Control for a Class of Nonlinear Systems with Bounded Disturbance

FU Qin[1,2]　QU Wen-Bo[1,3]　YANG Cheng-Wu[1]

Abstract　In this paper, state feedback control design for a class of nonlinear systems with bounded disturbance is given. When the state feedback control laws are applied to the systems, the states of closed-loop systems can converge to a small region of the origin.

Key words　Nonlinear systems, state feedback, robust control

1　引言

在实际工程中, 对非线性系统建立精确的模型常常较为困难, 甚至是不可能的. 因此, 研究不确定条件下对非线性系统的控制问题具有重要的实际意义[1].

本文研究一类非线性系统的鲁棒控制问题. 当不确定条件为有界扰动时, 我们找到状态反馈控制律, 使得从原点的某邻域出发的闭环系统的解始终保持在该邻域内, 且收敛到原点的一个小邻域内. 我们得到的状态反馈控制律与扰动的界无关, 因此, 扰动的界可以是未知的.

2　问题描述

考虑如下形式的非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\varphi(u) + \boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}$ 分别是系统的状态和输入, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$, $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是足够光滑函数[2], $\varphi(0) = 0$, $\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^n$ 是扰动. 当 $\varphi(u) = u$ 时, 即为带扰动的线性系统. 定义范数 $\|\cdot\|$ 为通常的 2- 范数, 即 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, $\|A\| = \sqrt{\rho(A^{\mathrm{T}}A)}$. 记 I 为 n 阶单位阵. 对系统 (1) 作如下假设:

收稿日期 2006-5-9　收修改稿日期 2007-4-29
Received May 9, 2006; in revised form April 29, 2007
江苏省高校自然科学研究项目 (04KJD110168, 06KJB110107), 苏州科技学院重点学科基金资助
Supported by Science Foundation from the Ministry of Education of Jiangsu Province (04KJD110168, 06KJB110107), Key Academic Foundation of University of Science and Technology of Suzhou
1. 南京理工大学动力工程学院 南京 210094　2. 苏州科技学院应用数学系 苏州 215009　3. 上海商学院数学系 上海 200235
1. School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094　2. Department of Applied Mathematics, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou 215009　3. Department of Mathematics, Shanghai Business School, Shanghai 200235
DOI: 10.1360/aas-007-1209

假设 1. $(A,\boldsymbol{b})$ 是能稳的.

假设 2. $\|\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x})\| \le \rho, \rho$ 是常数 (可能未知).

假设 3. $\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = 0, \cdots, \varphi^{(m-1)}(0) = 0$, 而 $\varphi^{(m)}(0) \neq 0$, m 为某个正奇数.

注 1. 考虑系统是小的扰动的情况, 即扰动的界 ρ 小于某个正数, 这个正数后面给出.

由假设 1 得

引理 1[3]**.** 存在 n 阶对称正定阵 P 和 n 维行向量 $\boldsymbol{K}$, 使得

$$P(A - \boldsymbol{bK}) + (A - \boldsymbol{bK})^{\mathrm{T}}P = -I \tag{2}$$

系统 (1) 的鲁棒状态反馈控制问题: 设计一个反馈控制律

$$u = \alpha(\boldsymbol{x}),\quad \alpha(\boldsymbol{0}) = 0$$

使得

1) 当 $\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 时, 原点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\varphi(\alpha(\boldsymbol{x}))$$

的渐近稳定平衡点.

2) 当 $\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$, 且 $\|\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x})\| \le \rho$ 时, 从原点的某邻域内出发的闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\varphi(\alpha(\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x})$$

的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 始终保持在该邻域内, 且收敛到原点的某个小邻域内.

3　主要结论

定理 1. 假设 1～3 成立, 则系统 (1) 的状态反馈控制律为

$$u = \alpha(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{m!(-\boldsymbol{Kx})}{\varphi^{(m)}(0)}\Big)^{\frac{1}{m}} \tag{3}$$

证明. 任意取定 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的邻域 $D = \{\boldsymbol{x} | \|\boldsymbol{x}\| < L\}, L$ 是正常数. 由式 (3) 得, u 在 D 上有界, 所以 $\varphi^{(m+1)}(u)$ 在 D 上也有界, 设

$$|\varphi^{(m+1)}(u)| \le S \tag{4}$$

S 是正常数.

由假设 3, 用泰勒展开公式得

$$\varphi(u) = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}u^m + \frac{\varphi^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!}u^{m+1} \tag{5}$$

其中 ζ 介于 0 与 u 之间.

构造 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$$

1) 当 $\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 时, 将式 (3), (5) 代入式 (1), 利用式 (2) 得

$$\dot{V} = -\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\frac{\varphi^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!}\Big(\frac{m!(-\boldsymbol{Kx})}{\varphi^{(m)}(0)}\Big)^{\frac{m+1}{m}}$$

由式 (4) 得

$$\dot{V} \leq -\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\frac{\|P\|\|\boldsymbol{b}\|S}{(m+1)!}(\frac{m!\|\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\|}{\varphi^{(m)}(0)})^{\frac{m+1}{m}}\|\boldsymbol{x}\|^{2+\frac{1}{m}}$$

所以, 当 $\|\boldsymbol{x}\| < M$ 时

$$\dot{V} \leq 0$$

仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时等号成立.
其中

$$M = (\frac{(m+1)!}{2\|P\|\|\boldsymbol{b}\|S})^m(\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!\|\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\|})^{m+1}$$

记 $N = \min\{L, M\}$, $W = \{\boldsymbol{x}|\|\boldsymbol{x}\| < N\}$, 则从 W 出发的闭环系统的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$$

所以 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\varphi(\alpha(\boldsymbol{x})$$

的渐近稳定平衡点.

2) 当 $\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$, $\|\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x})\| \leq \rho$ 时, 将式 (3), (5) 代入式 (1), 利用式 (2) 得

$$\dot{V} = -\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Pb\frac{\varphi^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!}(\frac{m!(-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})}{\varphi^{(m)}(0)})^{\frac{m+1}{m}} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x})$$

由假设 2 及基本不等式得

$$\dot{V} \leq -\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\frac{\|P\|\|b\|S}{(m+1)!}(\frac{m!\|\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\|}{\varphi^{(m)}(0)})^{\frac{m+1}{m}}\|\boldsymbol{x}\|^{2+\frac{1}{m}} + \frac{1}{4}\|\boldsymbol{x}\|^2 + 4\|P\|^2\rho^2$$

当 $\|\boldsymbol{x}\| < \frac{M}{4^m}$ 时,

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2 + 4\|P\|^2\rho^2 \tag{6}$$

记 $E = \min\{N, \frac{M}{4^m}\}$, $F = \{\boldsymbol{x}|\|\boldsymbol{x}\| < E\}$, 由式 (6), 当

$$\rho < H = \frac{E}{2\sqrt{2}\|P\|}$$

时, 有

$$\dot{V} < 0 \ (x \notin F)$$

所以, 从 F 内出发的闭环系统的解始终保持在 F 内.

因为 P 对称正定, 记 P 的最小特征值为 λ_1, 最大特征值为 λ_2, 则有

$$\lambda_1\|\boldsymbol{x}\|^2 \leq \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} \leq \lambda_2\|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{7}$$

且 $\|P\| = \lambda_2$, 从式 (6), (7) 得

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2\lambda_2}V + 4\lambda_2^2\rho^2$$

由 [4] 中引理 1, 得

$$V(\boldsymbol{x}(t)) \leq V(\boldsymbol{x}(0))\exp(-\frac{1}{2\lambda_2}t) + 8\lambda_2^3\rho^2$$

由式 (7)

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}(V(\boldsymbol{x}(0))\exp(-\frac{1}{2\lambda_2}t) + 8\lambda_2^3\rho^2)$$

所以解 $\boldsymbol{x}(t)$ 收敛到与 ρ 有关的原点的一个小邻域内, 且 ρ 越小, 该邻域越小.

注意到 $F \subseteq W$, 取 F 为原点的某邻域. □

注 2. H 即为注 1 中的某个正数, 仅与标称系统和任意取定的 L 有关. 如何选取 L, 使得 H 尽可能大, 这由 $\varphi(u)$ 的具体表达式而定.

4 结论

本文考虑了一类带有界扰动的非线性系统的鲁棒控制问题. 当扰动的界不大时, 我们得到了状态反馈控制律. 满足假设 3 条件的函数很多, 包含了足够光滑的所有奇函数. 所以, 研究此类系统的控制问题, 具有很大的意义.

References

1 Mei Sheng-Wei, Shen Tie-Long, Liu Zhi-Kang. *Modern Robust Control Theory and Application*. Beijing: Tsinghua University Press, 2003
(梅生伟, 申铁龙, 刘志康. 现代鲁棒控制理论与应用. 北京: 清华大学出版社, 2003)

2 Khalil H K [Writer], Zhu Yi-Sheng, Dong Hui, Li Zuo-Zhou [Translator]. *Nonlinear Systems (Third Edition)*. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005
(哈里尔 [著], 朱义胜, 董辉, 李作洲 [译]. 非线性系统 (第三版). 北京: 电子工业出版社, 2005)

3 Wang De-Jin. *H_2/H_∞ Optimal Control Theory*. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001
(王德进. H_2/H_∞ 优化控制理论. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001)

4 Zhou Shao-Sheng, Fei Shu-Min, Feng Chun-Bo. Control of muli-input cascade nonlinear systems with bounded disturbance. *Journal of Southeast University*, 1999, **29**(6): 1∼4
(周绍生, 费树岷, 冯纯泊. 带有界扰动的多输入非线性串级系统的控制. 东南大学学报, 1999, **29**(6): 1∼4)

傅 勤 南京理工大学动力工程学院博士研究生, 苏州科技学院应用数学系讲师. 主要研究方向为分散控制与非线性系统鲁棒控制. 本文通信作者. E-mail: fuqin925@sina.com
(**FU Qin** Ph. D. candidate in School of Power Engineering at Nanjing University of Science and Technology, lecturer in Department of Applied Mathematics at University of Science and Technology of Suzhou. His research interest covers decentralized control and robust control of nonlinear systems. Corresponding author of this paper.)

曲文波 南京理工大学动力工程学院博士后, 上海商学院数学系教授. 主要研究方向为广义系统与鲁棒控制.
E-mail: quwenbo@mail.usts.edu.cn
(**QU Wen-Bo** Postdoctor in School of Power Engineering at Nanjing University of Science and Technology, professor in Department of Mathematics at Shanghai Business School. His research interest covers descriptor systems and robust control.)

杨成梧 教授. 主要研究方向为 2D 系统, 广义系统, 采样系统.
(**YANG Cheng-Wu** Professor. His research interest covers 2D systems, descriptor systems, and sampled-data systems.)