第 33 卷 第 11 期 自 动 化 学 报 Vol. 33, No. 11
2007 年 11 月 ACTA AUTOMATICA SINICA November, 2007

一类非线性系统镇定的有界反馈后推法

张 端 [1] 俞 立 [1] 欧林林 [1] 余世明 [1]

摘 要 执行器饱和问题在控制工程中广泛存在. 针对该问题, 改进了有界反馈后推法, 使其可应用于一类较广泛的非线性系统镇定问题. 相对其他有界反馈后推法, 该方法设计的反馈界更小并在一定范围内可调节, 且反馈控制律可以是光滑函数.

关键词 后推法, 有界反馈, 非线性系统
中图分类号 TP271.6

Stabilizing a Class of Nonlinear Systems by Bounded Feedback Backstepping

ZHANG Duan[1] YU Li[1] OU Lin-Lin[1]
YU Shi-Ming[1]

Abstract Actuator saturation is commonly encountered in control engineering. Towards this problem, the technique of bounded feedback backstepping is improved in this note such that bounded feedback backstepping can be used to stabilize a more general class of nonlinear systems. The bounds of the new feedback controllers are less than those of the controllers designed by other methods, and these bounds can be adjusted in some range. Additionally, we can design feedback controllers as smooth functions.

Key words Backstepping, bounded feedback, nonlinear system

1 引言

20 世纪 90 年代非线性控制最重要进展之一是后推设计法 (Backstepping). 后推法作为设计工具是在文献 [1~3] 工作的基础上发展起来的. 后推设计法的出现, 引起控制界的高度重视. 在短短十几年内, 迅速成为非线性控制中最常用的方法之一, 被应用到渐近稳定, 鲁棒控制, 自适应控制等领域中[4~8].

在设计控制器时, 通常会要求系统输入受限于某一范围, 即执行器饱和, 这在控制工程中广泛存在. 因此, 研究输入受限的控制系统在工程上有现实意义.

应用后推法设计有界反馈的研究成果较少. 这方面最早的成果是 Freeman 和 Praly[9] 用后推法设计有界反馈, 实现一类仿射非线性系统的镇定. 2004 年, Mazenc 和 Iggidr[10] 用后推法实现了一类非仿射系统的全局渐近稳定. 2005 年, Mazenc 和 Bowong [11] 对一类时变非线性系统运用后推法设计了有界反馈.

本文对一类非线性系统研究如何利用后推法设计有界反馈以实现系统的镇定. 与文献 [9, 10] 比较, 该方法主要有以下不同: 1) 适用于一类更广泛的非线性系统, 同时限制条件也较宽 (见注 1 和注 2); 2) 从结果看, 反馈控制律的界有较大幅度的下降 (见注 7); 3) 可以设计光滑的 Lyapunov 函数和控制律, 以真正适用于多步后推设计 (见注 8).

本文结构安排如下：第 1 节介绍研究问题的背景; 第 2 节描述所研究的非线性控制系统和限制条件, 并与文献 [9, 10] 作对比; 第 3 节给出有界控制器的设计方法, 并与文献 [9, 10] 的结果作比较.

2 问题的提出

考虑以下系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, z)\\ \dot{z} &= h(\boldsymbol{x}, z) + g(\boldsymbol{x}, z)u\end{aligned} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n-1}$ 和 $z \in \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R}$ 是输入, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, z) = (f_1(\boldsymbol{x}, z), \cdots, f_{n-1}(\boldsymbol{x}, z))^{\mathrm{T}}$, $h(\boldsymbol{x}, z)$ 和 $g(\boldsymbol{x}, z)$ 均是光滑的, $f(\mathbf{0}, 0) = 0$, $h(\mathbf{0}, 0) = 0$, 而 $g(\boldsymbol{x}, z) \neq 0$ 对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 和 $z \in \mathbf{R}$ 成立, 并且 $\inf_{\boldsymbol{x}, z} |g(\boldsymbol{x}, z)| \neq 0$.

直接找出使系统 (1) 渐近稳定的反馈控制律往往比较困难. 后推法 (Backstepping) 为系统 (1) 的控制器和 Lyapunov 函数设计提供了一种较为简便可行的方法. 依照这一方法, 可以把设计工作分为两步, 并且假设第一步工作已经完成, 即假设已找到 Lyapunov 函数 $V_1(\boldsymbol{x})$ 和虚控制 $z_v(\boldsymbol{x})$, 使得 $V_1(\boldsymbol{x})$ 能判定 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, z)$ 渐近稳定; 第二步, 在 $V_1(\boldsymbol{x})$ 的基础上构造新的 Lyapunov 函数 $V_2(\boldsymbol{x}, z)$ 和控制律 $u(\boldsymbol{x}, z)$, 使 $V_2(\boldsymbol{x}, z)$ 能判定闭环系统渐近稳定.

对系统 (1) 需要作 3 项假设, 其中假设 1 是为利用后推法而设置的; 假设 2 和假设 3 是为实现有界反馈而设置的. 本文用 C^1 表示一阶偏导数存在并且连续的函数, C^2 表示二阶偏导数存在并且连续的函数, 而光滑函数表示任意阶偏导数存在并且连续的函数.

假设 1. 存在正定的 C^2 函数 $V_1(\boldsymbol{x})$, 正定的 C^1 函数 $W(\boldsymbol{x})$ 和光滑控制律 $z_v(\boldsymbol{x})$, 满足在 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 处 $z_v(\mathbf{0}) = 0$

$$B_1 \le z_v(\boldsymbol{x}) \le B_2 \tag{2}$$

并且已知

$$\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, z_v(\boldsymbol{x}))} V_1(\boldsymbol{x}) \le -W(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

这里 $\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, z_v(\boldsymbol{x}))} V_1(\boldsymbol{x})$ 表示 $V_1(\boldsymbol{x})$ 沿向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, z)$ 的李导数.

假设 2. 存在非负函数 $K_1(z)$ 和正函数 $K_2(z)$, 它们在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少, 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 并满足

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, z) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, z_v(\boldsymbol{x}))} V_1(x) \le S_1(\boldsymbol{x}, z) + S_2(\boldsymbol{x}, z)\\ &S_1(\boldsymbol{x}, z) \le W(\boldsymbol{x})\\ &T(\boldsymbol{x}, z) = \frac{S_2(\boldsymbol{x}, z)}{z - z_v(\boldsymbol{x})}\\ &|T(\boldsymbol{x}, z)| \le K_1(z)\end{aligned} \tag{4}$$

其中, $S_2(\boldsymbol{x}, z)$ 是光滑的, $S_1(\boldsymbol{x}, z) \le W(\boldsymbol{x})$ 的等号当且仅当在 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 时成立 (不论 z 取何值), 而关于 $K_2(z)$ 有不等式

$$\left|\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, z)} z_v(\boldsymbol{x})\right| \le K_2(z) \tag{5}$$

收稿日期 2006-8-21 收修改稿日期 2007-1-17
Received August 21, 2006; in revised form January 17, 2007
国家自然科学基金 (60604015), 国家杰出青年基金 (60525304), 国家高科技研究发展计划 (863 计划)(2006AA04Z178), 浙江大学工业控制技术国家重点实验室开放基金 (0708009) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60604015), National Natural Science Funds of P. R. China for Distinguished Young Scholar (60525304), National High Technology Research and Development Program of China (863 Program)(2006AA04Z178), and Open Scheme of National Key Laboratory of Industrial Control Techonology, Zhejiang University (0708009)
1. 浙江工业大学自动化系 杭州 310032
1. Department of Automation, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032
DOI: 10.1360/aas-007-1200

由假设 1 可知存在实数 B 使下面不等式成立

$$K_1\left(z_v(\boldsymbol{x})\right) \le K_1(B),\ K_2\left(z_v(\boldsymbol{x})\right) \le K_2(B),\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n-1} \tag{6}$$

假设 3. 函数 $h(\boldsymbol{x},z)/g(\boldsymbol{x},z)$ 的绝对值有上界, 即

$$\max\left|\frac{h(\boldsymbol{x},z)}{g(\boldsymbol{x},z)}\right| < H_M \tag{7}$$

注 1. 文献 [9, 10] 均研究了非线性系统的有界反馈后推法, 文献 [9] 所考察的系统是文献 [10] 所考察系统的特例, 而文献 [10] 所考察的系统又是本文所考察系统的特例. 当 $g(\boldsymbol{x},z)=1$ 时, 系统 (1) 为文献 [10] 分析的系统; 进一步, 当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z)$ 具有仿射形式时, 即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z)=\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})z$ 时, 系统 (1) 成为文献 [9] 分析的系统.

注 2. 文献 [10] 给出的第二个假设是

$$\left|\frac{\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z_v(\boldsymbol{x}))}V(\boldsymbol{x})}{z-z_v(\boldsymbol{x})}\right| \le K_1(\,|z|\,)$$
$$\left|\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z)}z_v(\boldsymbol{x})\right| \le K_2(\,|z|\,)$$

它们是假设 2 当 $S_1(\boldsymbol{x},z)=0$ 和 K_1, K_2 是对称函数时的特殊情况.

由注 1 和注 2 知, 本文所讨论的系统相对文献 [9, 10] 较为一般化, 适用面较广.

注 3. 系统 (1) 是如下系统的特例

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z_1)\\
&\dot{z}_1 = h_1(\boldsymbol{x},z_1)+g_1(\boldsymbol{x},z_1)z_2\\
&\quad\vdots\\
&\dot{z}_m = h_m(\boldsymbol{x},z_1,\cdots,z_m)+g_m(\boldsymbol{x},z_1,\cdots,z_m)u
\end{aligned} \tag{8}$$

仿照系统 (1) 的方式, 对系统 (8) 作适当的限制和假设, 把 $z_i(i=1,2,\cdots,m)$ 作为系统中第 $i+1$ 个方程的虚控制, 则经过 m 步后推设计, 在满足一定光滑条件的基础上 (见注 8), 同样能够设计有界的反馈控制律.

3　主要结果

本节在假设 1~3 的基础上, 研究系统 (1) 的镇定问题, 并与文献 [9, 10] 的结果做比较.

定理 1. 如果系统 Σ 满足假设 1~3, 则存在函数 $\Delta(z,z_v)$ 和 Lyapunov 函数

$$V_2(\boldsymbol{x},z) = V_1(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\Delta^2(z,z_v) \tag{9}$$

以及使闭环系统全局渐近稳定的反馈控制律

$$u = -\frac{h(\boldsymbol{x},z)}{g(\boldsymbol{x},z)} - \frac{1}{g(\boldsymbol{x},z)\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z}}\left\{\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z_v}\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z)}z_v(\boldsymbol{x}) + \frac{z-z_v}{\Delta(z,z_v)}\left[T(\boldsymbol{x},z)+R(z-z_v)\right]\right\},\quad \forall\Delta(z,z_v)\neq 0 \tag{10}$$

其中, $(z-z_v)/\Delta(z,z_v)$ 在 $\Delta(z,z_v)=0$ 时用 $\lim_{\Delta(z,z_v)\to 0}[(z-z_v)/\Delta(z,z_v)]$ 替代; $R(s)$ 是使 $sR(s)$ 正定的函数并且 $|R(z-z_v)|\le R_M$ (见注 5), R_M 是已知的正实数. 并且按下面方式构造的 $\Delta(z,z_v)$ 可以使控制律 u 有界

$$\Delta(z,z_v) = \alpha(z-z_v)+\int_{z_v}^{z}\frac{\frac{R_M+K_1(\tau)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(\tau)}{\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)}\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

其中 α 和 δ 满足

$$\begin{aligned}
&0<\frac{\frac{R_M+K_1(0)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(0)}{\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)}=\delta\le 1\\
&\alpha>-1,\ \ \alpha+\delta>0
\end{aligned} \tag{12}$$

注 4. 系统 (1) 要求 $g(\boldsymbol{x},z)\neq 0$ 对所有 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n-1}$ 和 $z\in\mathbf{R}$ 成立, 并且 $\inf_{\boldsymbol{x},z}|g(\boldsymbol{x},z)|\neq 0$ 成立, 表明存在实数 $g_m>0$ 使得 $|g(\boldsymbol{x},z)|>g_m$.

注 5. 可以按照下面两种方法定义 $R(s)$ 以确保 $sR(s)$ 正定并满足 $|R(z-z_v)|\le R_M$, 其中第一个函数是光滑的.

$$R(s)=R_M\sin[k\cdot\tan^{-1}(s)],\quad k>0$$

$$R(s)=R_M\mathrm{sgn}(s),\quad \mathrm{sgn}(s)=\begin{cases}-1 & s<0\\ 0 & s=0\\ 1 & s>0\end{cases}$$

证明. 首先考虑函数 $\Delta(z,z_v)$ 的零点. 由式 (12) 和 $K_1(\cdot)$ 及 $K_2(\,\cdot\,)$ 的定义有

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta(z,z_v)}{z-z_v}\ge\alpha+\frac{\frac{R_M+K_1(0)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(0)}{\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)}=\alpha+\delta>0\\
&z-z_v\neq 0
\end{aligned} \tag{13}$$

故 $\Delta(z,z_v)=0$ 必有 $z-z_v=0$; 而从式 (11) 直接得出 $z-z_v=0$ 则 $\Delta(z,z_v)=0$. 故 $\Delta(z,z_v)=0$ 与 $z-z_v=0$ 等价.

$V_1(\boldsymbol{x})$ 是正定函数, 仅在 $\boldsymbol{x}=0$ 时, $V_1(\boldsymbol{x})=0$; 而在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时, $z_v(\boldsymbol{x})=0$. 故只有 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 并且 $z=0$, 才有 $V_2(\boldsymbol{x},z)=0$; 其余情况下 $V_2(\boldsymbol{x},z)>0$, 说明 $V_2(\boldsymbol{x},z)$ 是正定函数. $V_1(\boldsymbol{x})$ 是径向无穷大函数; 而从 $\Delta(z,z_v)$ 的定义式 (11) 和式 (13), 容易得出当 $z\to\infty$ 时, 鉴于 z_v 有界即 $z-z_v\to\infty$ 时, $\Delta(z,z_v)\to\infty$, 这样可断定 $V_2(\boldsymbol{x},z)$ 是径向无穷大函数.

由假设 1,

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 = {}&\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z_v(\boldsymbol{x}))}V_1(\boldsymbol{x})+\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z_v(\boldsymbol{x}))}V_1(\boldsymbol{x})\le\\
&-\left(W(\boldsymbol{x})-S_1(\boldsymbol{x})\right)+T(\boldsymbol{x},z)\left(z-z_v(\boldsymbol{x})\right)
\end{aligned}$$

令 $\hat{u}=h(\boldsymbol{x},z)+g(\boldsymbol{x},z)u$, 沿系统轨迹函数 $V_2(\boldsymbol{x},z)$ 关于时间的导数是

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_2=\dot{V}_1+\Delta(z,z_v)\frac{\mathrm{d}\Delta(z,z_v)}{\mathrm{d}t}\le\\
&-\left(W(\boldsymbol{x})-S_1(\boldsymbol{x})\right)+T(\boldsymbol{x},z)\left(z-z_v\right)+\\
&\Delta(z,z_v)\cdot\left\{\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z}\hat{u}+\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z_v}\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z)}z_v(\boldsymbol{x})\right\}=\\
&-\left(W(\boldsymbol{x})-S_1(\boldsymbol{x})\right)+\left(z-z_v\right)\cdot\\
&\left\{T(\boldsymbol{x},z)+\frac{\Delta(z,z_v)}{z-z_v}\cdot\left[\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z}\hat{u}+\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z_v}\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z)}z_v(\boldsymbol{x})\right]\right\}\\
&\forall z-z_v\neq 0
\end{aligned}$$

为使闭环系统全局渐近稳定, 可以选取

$$\hat{u} = -1\Big/\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z}\left\{\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z_v}\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z)}z_v(\boldsymbol{x}) + \frac{z-z_v}{\Delta(z,z_v)}\left[T(\boldsymbol{x},z)+R(z-z_v)\right]\right\},\quad \forall\Delta(z,z_v)\neq 0 \tag{14}$$

其中当 $\Delta(z,z_v) = 0$ 时, $(z-z_v)/\Delta(z,z_v)$ 用 $\lim_{\Delta(z,z_v)\to 0}[(z-z_v)/\Delta(z,z_v)]$ 替代 (稍后计算该极限). 此时, 输入 u 的形式就是式 (10), 并且

$$\dot{V}_2(\boldsymbol{x},z) \le -(W(\boldsymbol{x})-S_1(\boldsymbol{x})) - (z-z_v)R(z-z_v) \le 0$$

其中第二个小于等于号中的等号仅在 $\boldsymbol{x}=0$ 时成立, 系统是全局渐近稳定的.

在估计 $\hat{u}$ 的界之前, 先对式 (14) 作三点说明:

1) 从式 (13) 得出

$$0 < \frac{z-z_v}{\Delta(z,z_v)} \le \frac{1}{\alpha+\delta},\quad \Delta(z,z_v)\neq 0 \tag{15}$$

由式 (11) 和式 (12) 可得出 $\Delta(z,z_v)\to 0$ 等价于 $z-z_v\to 0$, 并且

$$\lim_{\Delta(z,z_v)\to 0}\frac{z-z_v}{\Delta(z,z_v)} = \lim_{z-z_v\to 0}\frac{z-z_v}{\Delta(z,z_v)} = 1\Bigg/\left[\alpha + \frac{\frac{R_M+K_1(z_v)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(z_v)}{\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)}\right]$$

再由式 (15) 或式 (12), 上述极限满足 $0 \le \lim_{\Delta(z,z_v)\to 0}\frac{z-z_v}{\Delta(z,z_v)} \le \frac{1}{\alpha+\delta}$.

2) 计算式 (14) 中的 $\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z}$, 则

$$\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z} = \alpha + \frac{\frac{R_M+K_1(z)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(z)}{\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)} > 0 \tag{16}$$

因此, 式 (14) 中的 $1\Big/\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z}$ 有意义.

3) 计算式 (14) 中的 $\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z_v}$

$$\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z_v} = -\alpha - \frac{\frac{R_M+K_1(z_v)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(z_v)}{\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)}$$

进一步得出

$$0<\alpha+\delta=\alpha+\frac{\frac{R_M+K_1(0)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(0)}{\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)} \le -\frac{\partial\Delta(z,z_v)}{\partial z_v} \le \alpha + \frac{\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)}{\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)} = \alpha+1 \tag{17}$$

利用上面三点讨论, 现在重新考察 $\hat{u}$, 由式 (14) ∼ (17), 当 $\alpha > -1$ 时,

$$|\hat{u}| \le \frac{\frac{R_M+K_1(z)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)\cdot K_2(z)}{\alpha+\left[\frac{R_M+K_1(z)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)\cdot K_2(z)\right]\Big/\left[\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)\cdot K_2(B)\right]} = \frac{1}{\alpha\Big/\left[\frac{R_M+K_1(z)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(z)\right]+1\Big/\left[\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)\right]} \tag{18}$$

式 (12) 要求 $\alpha > -1$, 在此范围内分段讨论 $|\hat{u}|$ 的界. 当 $\alpha \ge 0$ 时从式 (18) 得出

$$|\hat{u}| \le \frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta} + (\alpha+1)K_2(B),\quad \alpha \ge 0 \tag{19}$$

当 $-1 < \alpha < 0$ 时从式 (18) 得出

$$|\hat{u}| \le \frac{1}{\alpha\Big/\left[\frac{R_M+K_1(0)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(0)\right]+1\Big/\left[\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)\right]} = \frac{1}{\alpha\Big/\left[\delta\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+\delta(\alpha+1)K_2(B)\right]+1\Big/\left[\frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+\delta}+(\alpha+1)K_2(B)\right]} = \frac{\delta[R_M+K_1(B)]}{(\alpha+\delta)^2} + \frac{\delta(\alpha+1)}{\alpha+\delta}K_2(B),\quad -1<\alpha<0 \tag{20}$$

从式 (19) 和式 (20) 知 $\hat{u}$ 是有界的. 进而由注 4 及式 (10) 和式 (14) 可知, u 是有界的.

至此尚未说明如何确定参数 α 和 δ, 我们将结合上界的讨论给出三种解决方法:

方法 1. 首先考虑 $\delta = 1$, 由式 (12) 知, 必有

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= K_1(B),\quad \forall\, 0\le\tau\le B\\ K_2(\tau) &= K_2(B),\quad \forall\, 0\le\tau\le B \end{aligned} \tag{21}$$

对不满足式 (21) 的 $K_1(\cdot)$ 和 $K_2(\cdot)$ 可修改其在区间 $[0,B)$ 上的值使其满足式 (21) 及假设 2, 并且此时对任何 $\alpha > -1$, 式 (12) 成立. 这样, 在式 (19) 中可以取 $\delta = 1$ 和 $\alpha = 0$ 并得出

$$|\hat{u}| \le R_M + K_1(B) + K_2(B) \tag{22}$$

在 $-1<\alpha<0$ 和 $0<\delta\le 1$ 的情况下考察式 (20), 由于式 (12) 保证了 $1\ge\delta>\alpha+\delta>0$ 以及 $0>\alpha\delta>\alpha>-\delta$,

$$\frac{\delta[R_M+K_1(B)]}{(\alpha+\delta)^2} + \frac{\delta(\alpha+1)}{\alpha+\delta}K_2(B) = \frac{\delta[R_M+K_1(B)]}{(\alpha+\delta)^2} + \frac{\alpha\delta+\delta}{\alpha+\delta}K_2(B) > R_M+K_1(B)+K_2(B),\quad -1<\alpha<0$$

所以为了得到较小的反馈界, 本文将集中讨论 $\alpha\ge 0$ 的情况.

方法 2. 在 $\alpha \ge 0$ 条件下, 考察通过调节 α 进一步降低 $|\hat{u}|$ 的上界的可能性, 限定 $\delta = 1$ (当然要求式 (21) 成立, 而式 (12) 也自然满足). 由式 (19) 令

$$\xi_1(\alpha) = \frac{R_M+K_1(B)}{\alpha+1} + (\alpha+1)\cdot K_2(B) \tag{23}$$

在 $\mathrm{d}\xi_1/\mathrm{d}\alpha = 0$ 时, 有 $\alpha = \pm\sqrt{\frac{R_M+K_1(B)}{K_2(B)}} - 1$, 结合 $\alpha+\delta>0$ 的要求, 得到唯一的极值在

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_M+K_1(B)}{K_2(B)}} - 1 \tag{24}$$

处. 再考虑到当 $\alpha\to+\infty$ 时 $\xi_1\to+\infty$, 可以断定: 当 $R_M+K_1(B)\ge K_2(B)$ 时, 若 α 满足式 (24), $\xi_1(\alpha)$ 取到最小值, 将式 (24) 代入式 (23) 得到的上界为

$$|\hat{u}| \le \xi_1(\alpha) = 2\sqrt{[R_M+K_1(B)]\,K_2(B)} \tag{25}$$

当 $R_M + K_1(B) < K_2(B)$ 时, 式 (24) 小于 0, 所以 $\xi_1(\alpha)$ 的最小值在 $\alpha = 0$ 处, $|\hat{u}|$ 的上界可以用式 (22) 表示. 此外, 当 $R_M + K_1(B) \geq K_2(B)$ 时, 式 (25) 给出的界应小于等于式 (22) 给出的界.

方法 3. 不限定 $\delta = 1$. 由式 (12) 定义函数

$$F(\alpha,\delta) = R_M + K_1(0) + (\alpha+1)(\alpha+\delta)K_2(0) - \delta[R_M + K_1(B)] - (\alpha+1)(\alpha+\delta)\delta K_2(B) \tag{26}$$

在 $\alpha \geq 0$ 范围内考虑反馈界. 当 $\alpha \geq 0$ 并且 $\delta = 0$ 时, $F(\alpha, 0) > 0$; 当 $\alpha \geq 0$ 并且 $\delta = 1$ 时, $F(\alpha, 1) \leq 0$. 所以对任意 $\alpha \geq 0$, 在 $0 < \delta \leq 1$ 范围内一定存在一个 $\delta(\alpha)$ 满足 $F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$, 即对任意 $\alpha \geq 0$ 可求出 $0 < \delta(\alpha) \leq 1$ 满足式 (12). 在此基础上讨论反馈界, 参照式 (19) 令

$$\xi_2(\alpha) = \frac{R_M + K_1(B)}{\alpha + \delta(\alpha)} + (\alpha+1)K_2(B), \ \ \alpha \geq 0 \tag{27}$$

利用 $\mathrm{d}\xi_2/\mathrm{d}\alpha = 0$ 和 $\mathrm{d}^2\xi_2/\mathrm{d}\alpha^2 > 0$, 求得 ξ_2 各个极小值和相应的 α, 剔除不合理的极小值 (要求 ξ_2 的极小值大于 0, 相应的 α 为非负实数), 并考察边界情况即 $\alpha = 0$ 和 $\xi_2(0)$, 加以比较, 求出 ξ_2 的最小值和相应的 α (方法 3 涉及较复杂的符号计算和数值计算, 可借助 Matlab 完成.). □

注 6. 方法 1 主要说明由于 $\alpha < 0$ 时所得的反馈界较 $\alpha = 0$ 时更大, 故为得到较小的界只需考虑 $\alpha \geq 0$ 的情况. 于是方法 2 和方法 3 讨论时的反馈界. 方法 2 的特点是要求 $\delta = 1$, 并且 $K_1(\tau)$ 和 $K_2(\tau)$ 满足特定的条件, 见式 (21); 而方法 3 对 δ, $K_1(\tau)$ 和 $K_2(\tau)$ 没有附加限制. 此外, 方法 3 虽然不要求 $\delta = 1$, 但其求出的反馈界不一定小于方法 2 给出的界。其原因是对给定的 δ, 特别是对 $\delta = 1$, 从式 (12) 可能无法得到 α 的实数解; 而方法 2 通过对 $K_1(\cdot)$ 和 $K_2(\cdot)$ 的适当处理, 保证了式 (12) 有无穷个实数解.

注 7. 将本文给出的界与文献 [10] 作一个对比. 该文献给出的反馈界是

$$|\hat{u}| \leq R_M + K_1(4B) + K_2(4B) \tag{28}$$

鉴于 $K_1(\cdot)$ 和 $K_2(\cdot)$ 是单调增加的, 式 (22) 和式 (25) 能够保证本文给出的反馈界至少不大于式 (28) 所表示的界. 同时, 在方法 2 和方法 3 中可以通过适当地调整 α (或 α 和 δ) 在一定范围内调整反馈界.

注 8. 本文的方法与文献 [9, 10] 的另外一个不同之处是可以设计光滑反馈, 适用于多步后推设计. 考察式 (10), 其中含有 $\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},z)}z_v(\boldsymbol{x})$. 这隐含了一个事实: 对系统 (8) 做多步后推设计所得的控制律中含有对各虚控制的高阶偏导数. 文献 [9, 10] 所设计 Lyapunov 函数仅存在一阶连续偏导数, 造成多步后推时很大的困难, 如出现系统轨迹不连续的情况. 究其原因有两方面, 1) 带积分的 Lyapunov 函数在积分号内出现绝对值符号, 以及函数 $\max(\cdot,\cdot)$ 和 $\min(\cdot,\cdot)$; 2) 函数 $R(z-z_v)$ 不连续. 本文的 Lyapunov 函数不出现绝对值符号, 并可选取光滑的 $K_1(\cdot)$ 和 $K_2(\cdot)$ (对方法 3 较方便; 对方法 1 和方法 2 虽然受限于式 (21), 仍能达成此目标); 所构造的 Lyapunov 函数形式上较简单, 并避免了出现 $\max(\cdot,\cdot)$ 和 $\min(\cdot,\cdot)$ 等不可微的函数; 选取了光滑的 $R(z-z_v)$ (见注 5). 因此, 按本文的方法可以给出了光滑反馈, 方便了多步后推设计.

4 结论

对一类非线性系统, 本文提出了新的有界反馈后推法, 设计了新的 Lyapunov 函数和控制律, 经与相关文献比较, 所设计反馈控制律的界有较大幅度下降, 所给出的光滑控制律保证了可以进行多步后推设计. 该方法适合于处理控制器设计中执行器饱和的问题.

References

1 Tsinias J. Suffcient Lyapunov-like conditions for stabilization. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1989, **2**(4): 343~357

2 Tsinias J. Existence of control Lyapunov functions and applications to state feedback stabilizability of nonlinear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1991, **29**(2): 457~473

3 Sontag E D, Sussmann H J. Further comments on the stabilizability on the angular velocity of a rigid body. *Systems & Control Letters*, 1988, **12**(3): 213~217

4 Isidori A. *Nonlinear Control Systems II: Communications and Control Engineering Series*. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1999

5 Kokotovic P, Arcak M. Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica*, 2001, **37**(5): 637~662

6 Smyshlyaev A, Krstic M. Backstepping observers for a class of parabolic PDEs. *Systems & Control Letters*, 2005, **54**(10): 624~632

7 Krishnamurthy P, Khorrami F. High-gain output-feedback control for nonlinear systems based on multiple time scaling. *Systems & Control Letters*, 2007, **56**(1): 7~15

8 Nesic D, Teel A R. Stabilization of sampled-data nonlinear systems via backstepping on their Euler approximate model. *Automatica*, 2006, **42**(10): 1801~1808

9 Freeman R A, Praly L. Integrator backstepping for bounded controls and control rates. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(2): 258~262

10 Mazenc F, Iggidr A. Backstepping with bounded feedbacks. *Systems and Control Letters*, 2004, **51**(3): 235~245

11 Mazenc F, Bowong S. Backstepping with bounded feedbacks for time-varying systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2005, **43**(3): 856~871

张 端 浙江工业大学自动化系讲师. 主要研究方向为非线性控制.
E-mail: dzhang@zjut.edu.cn
(**ZHANG Duan** Lecturer at Department of Automation, Zhejiang University of Technology. His research interest is nonlinear control.)

俞 立 浙江工业大学自动化系教授. 主要研究方向为鲁棒控制, 时滞系统和网络控制系统. E-mail: lyu@ia.ac.cn
(**YU Li** Professor at Department of Automation, Zhejiang University of Technology. His research interest covers robust control, time-delay systems, and networked control systems.)

欧林林 浙江工业大学自动化系讲师. 主要研究方向为时滞系统的稳定性分析和设计, 过程鲁棒控制理论与应用.
E-mail: linlinou@zjut.edu.cn
(**OU Lin-Lin** Lecturer at Department of Automation, Zhejiang University of Technology. Her research interest covers stability analysis and robust control of time-delayed systems and industrial process control.)

余世明 浙江工业大学自动化系教授. 主要研究方向为预测控制. 本文通信作者. E-mail: ysm@zjut.edu.cn
(**YU Shi-Ming** Professor at Department of Automation, Zhejiang University of Technology. His research interest is predictive control. Corresponding author of this paper.)