

线性分式扰动下奇异系统鲁棒滤波递推算法

张光磊¹ 周彤¹

摘要 研究了线性分式扰动下线性奇异系统的状态估计问题,给出了一种 Kalman 形式的递推滤波算法.研究表明,线性分式不确定性可以表示为一系列加性不确定性的交集.本文讨论了如何寻找保守性最弱的加性不确定性来近似该交集,并证明了该问题在鲁棒滤波过程中可以转化为凸优化问题.数值仿真验证了上述算法的有效性.对于具有结构约束的线性分式不确定性,该算法的性能优于现有算法.

关键词 Kalman 滤波, 奇异系统, 线性分式不确定性, 鲁棒性
中图分类号 TP13

A Recursive Robust Filtering Algorithm for Descriptor Systems Subject to Linear Fractional Uncertainties

ZHANG Guang-Lei¹ ZHOU Tong¹

Abstract This paper deals with a robust state estimation problem of descriptor systems subject to linear fractional disturbances, and proposes a Kalman type recursive filtering algorithm. It is proved that the linear fractional uncertainties can be equivalently represented by the intersection of a series of additive uncertainties. The problem of finding the least conservative set of additive uncertainties to approximate this intersection can be converted to a convex optimization one in the process of robust filtering. Numerical simulation results have also been reported which confirm the efficiency of the proposed algorithm. Moreover, for structured linear fractional uncertainties, the algorithm is shown to perform better than the available one.

Key words Kalman filtering, descriptor system, linear fractional uncertainty, robustness

1 引言

相对一般的状态空间模型,奇异(也称广义)系统模型具有更普遍的研究意义和应用范围.近年来,线性奇异系统在控制和滤波方面的理论得到了广泛的重视,并且已经成功地应用于经济学^[1]、电路学^[2]、机器人学^[3]以及航天学^[4]等领域.本文主要研究的是存在线性分式不确定性的奇异系统鲁棒滤波问题.

当系统模型参数或结构与实际系统不一致时,名义模型上的 Kalman 滤波的效果可能较差,有时甚至会导致发散,即估计误差随时间不断增大.为了降低滤波效果对模型误差的敏感性,鲁棒性成为滤波器设计中重要性能指标之一.针对各种模型不确定性假设,在不同的鲁棒性能评价指标函数的基础上,人们已经提出了各种行之有效的线性系统鲁棒滤波算法.常用的有 H_∞ 滤波^[5]、保性

能算法 (Guaranteed-cost)^[6] 和集值估计方法 (Set-valued)^[7] 等.基于有界加法扰动模型的规范最小二乘 (Regularized least square, RLS) 问题的解, Sayed 在文 [8] 中提出了一种 Kalman 滤波形式的递推鲁棒滤波框架,它无需在线检验任何条件就可以保证滤波的收敛性,计算复杂度近似于一般 Kalman 滤波,且效果优于上述几种算法. Sayed 在文 [9] 中给出其滤波理论的完整数学证明.文 [10] 将系统模型推广至线性奇异系统,给出了一种奇异系统递推鲁棒滤波算法(称为 DR 滤波算法).

本文将文 [10] 中的系统参数扰动模型从简单的加法扰动模型推广至线性分式扰动模型,并用最接近真实不确定性的加法扰动模型来近似原线性分式扰动模型,再利用已有结论给出该近似扰动模型下鲁棒滤波的递推算法.

本文内容安排如下:第 1 节为问题的研究意义和背景介绍;第 2 节为问题描述,指出了鲁棒滤波问题与 RLS 问题之间的联系;第 3 节为主要结果,通过求解一个凸优化问题,得到了近似于线性分式扰动模型的次优无结构加法扰动模型;第 4 节利用所得近似模型和文 [10] 中结论,给出具体的递推算法;第 5 节为数值仿真对比试验,在相同条件下与文 [10] 中的 DR 滤波算法相比,本文算法的稳态滤波误差减小了 10% 左右;最后给出本文结论.

收稿日期 2007-3-22 收修改稿日期 2007-6-18
Received March 22, 2007; in revised form June 18, 2007
国家自然科学基金 (60574008, 60625305), 教育部博士点基金 (20050003096) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60574008, 60625305), Doctoral Foundation of Chinese State Education Commission (20050003096)
1. 清华大学自动化系 北京 100084
1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084
DOI: 10.1360/aas-007-1150

2 鲁棒滤波与 RLS 的等价性

考虑如下线性奇异系统

$$\begin{cases} \bar{E}_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} = \bar{F}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{w}_i, & i = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{z}_i = \bar{H}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n, \mathbf{z}_i \in \mathbf{R}^p, \mathbf{w}_i \in \mathbf{R}^m, \mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^p$ 分别为系统状态, 观测值, 过程噪声和观测噪声. $\bar{E}_{i+1} = E_{i+1} + \delta E_{i+1}, \bar{F}_i = F_i + \delta F_i, \bar{H}_i = H_i + \delta H_i, E_{i+1} \in \mathbf{R}^{m \times n}, F_i \in \mathbf{R}^{m \times n}, H_i \in \mathbf{R}^{p \times n}$ 为已知的名义系统矩阵, $\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_i$ 为相应的不确定性. 初始状态、过程噪声和观测噪声 $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i\}$ 为不相关的零均值白噪声, 其方差为

$$\text{cov} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^T & \mathbf{w}_i^T & \mathbf{v}_i^T \end{bmatrix}^T \right) = \text{diag} (P_0, Q_i \delta_{ij}, R_i \delta_{ij}) \quad (2)$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}, P_0, Q_i, R_i$ 为已知对称正定矩阵. 假设不确定性模型为如下的有结构约束的线性分式扰动模型

$$\begin{aligned} \delta E_i &= M_{e,i} \Delta_{e,i} (I - D_{e,i} \Delta_{e,i})^{-1} N_{e,i} \\ \delta F_i &= M_{f,i} \Delta_{f,i} (I - D_{f,i} \Delta_{f,i})^{-1} N_{f,i} \\ \delta H_i &= M_{h,i} \Delta_{h,i} (I - D_{h,i} \Delta_{h,i})^{-1} N_{h,i} \end{aligned} \quad (3)$$

其中不确定块的结构为

$$\begin{aligned} \Delta_{e,i} &= \text{diag} \{ \Delta_{e,i}^1, \Delta_{e,i+1}^2, \dots, \Delta_{e,i}^{r_{e,i}} \} \\ \Delta_{f,i} &= \text{diag} \{ \Delta_{f,i}^1, \Delta_{f,i}^2, \dots, \Delta_{f,i}^{r_{f,i}} \} \\ \Delta_{h,i} &= \text{diag} \{ \Delta_{h,i}^1, \Delta_{h,i}^2, \dots, \Delta_{h,i}^{r_{h,i}} \} \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\Delta_{f,i}^j \in \mathbf{R}^{m_{f,i}^j \times n_{f,i}^j}, \Delta_{h,i}^j \in \mathbf{R}^{m_{h,i}^j \times n_{h,i}^j}, \Delta_{e,i}^j \in \mathbf{R}^{m_{e,i}^j \times n_{e,i}^j}$, 且为范数不大于 1 的不确定矩阵. $M_{e,i}, D_{e,i}, N_{e,i}, M_{f,i}, D_{f,i}, N_{f,i}, M_{h,i}, D_{h,i}, N_{h,i}$ 为维数匹配的已知矩阵.

文 [10] 中指出, 奇异系统的名义模型 Kalman 滤波和鲁棒滤波分别等价于如下问题

$$\min_{\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}\}} \left[\|\mathbf{E}_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \|\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{H}_i\mathbf{x}_{i+1}\|_{R_{i+1}^{-1}}^2 \right] \quad (5)$$

$$\min_{\mathbf{x}_0} \max_{\delta H_0} \left[\|\mathbf{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \|\mathbf{z}_0 - \bar{H}_0\mathbf{x}_0\|_{R_0^{-1}}^2 \right] \quad (6)$$

$$\min_{\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}\}} \max_{\delta} \left[\|\bar{E}_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} - \bar{F}\mathbf{x}_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \|\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|\mathbf{z}_{i+1} - \bar{H}_i\mathbf{x}_{i+1}\|_{R_{i+1}^{-1}}^2 \right] \quad (7)$$

其中 $\delta = \{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1}\}, \|\mathbf{v}\|_P^2$ 表示 $\mathbf{v}^T P \mathbf{v}$, 当 $P = I$ 时可简写成 $\|\mathbf{v}\|^2$. 式 (5) 代表名义模型

Kalman 滤波, 式 (6) 和 (7) 分别代表鲁棒滤波的初始条件和递推过程.

在不确定模型 (3) 的假设下, 初始条件 (6) 和递推过程 (7) 均等价于如下 RLS 问题

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\delta A, \delta \mathbf{b}} \left[\|\mathbf{x}\|_Q^2 + \|\bar{A}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}}\|_W^2 \right] \quad (8)$$

其中 $\bar{A} = A + \delta A, \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$, 并且

$$[\delta A, \delta \mathbf{b}] = H \Delta (I - D \Delta)^{-1} [N_a, N_b] \quad (9)$$

其中 $\Delta = \text{diag} \{ \Delta_1, \dots, \Delta_r \}, \|\Delta_i\| \leq 1, \Delta_i \in \mathbf{R}^{m_i \times n_i}, i = 1, \dots, r, \sum_{i=1}^r m_i = s, \sum_{i=1}^r n_i = t$.

初始条件 (6) 与问题 (8) 之间的映射关系如下

$$\begin{aligned} A &\leftarrow H_0 & \mathbf{b} &\leftarrow \mathbf{z}_0 & \mathbf{x} &\leftarrow \mathbf{x}_0 \\ \delta A &\leftarrow \delta H_0 & \delta \mathbf{b} &\leftarrow 0 & \Delta &\leftarrow \Delta_{h,0} \\ N_a &\leftarrow N_{h,0} & N_b &\leftarrow 0 & D &\leftarrow D_{h,0} \\ H &\leftarrow M_{h,0} & W &\leftarrow R_0^{-1} & Q &\leftarrow P_0^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

递推过程 (7) 与问题 (8) 之间的映射关系如下

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix}, \mathbf{b} &\leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{\mathbf{x}}_{i|i} \\ \mathbf{z}_{i+1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{x} &\leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_{i|i} \\ \mathbf{x}_{i+1} \end{bmatrix}, \delta A &\leftarrow \begin{bmatrix} -\delta F_i & \delta E_{i+1} \\ 0 & \delta H_{i+1} \end{bmatrix} \\ \delta \mathbf{b} &\leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i \hat{\mathbf{x}}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, W &\leftarrow \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \\ H &\leftarrow \begin{bmatrix} M_{f,i} & M_{e,i+1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{h,i+1} \end{bmatrix} \\ N_a &\leftarrow \begin{bmatrix} -N_{f,i} & 0 \\ 0 & N_{e,i+1} \\ 0 & N_{h,i+1} \end{bmatrix}, N_b &\leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{\mathbf{x}}_{i|i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ Q &\leftarrow \text{diag} \{ P_{i|i}^{-1}, 0 \} \\ \Delta &\leftarrow \text{diag} \{ \Delta_{f,i}, \Delta_{e,i+1}, \Delta_{h,i+1} \} \\ D &\leftarrow \text{diag} \{ D_{f,i}, D_{e,i+1}, D_{h,i+1} \} \end{aligned} \quad (11)$$

可见线性分式扰动下的奇异系统鲁棒滤波问题转化为相应扰动下 RLS 问题 (8) 的求解.

3 线性分式扰动下 RLS 问题的解

对于无结构约束的加法扰动下的 RLS 问题, 文 [8] 中已有如下结论:

引理 1^[8]. 假定问题 (8) 中的不确定性可表示为如下无结构 ($r = 1$) 加法扰动模型

$$[\delta A, \delta \mathbf{b}] = H \Delta [N_a, N_b] \quad (12)$$

其中 $\|\Delta\| \leq 1$, $\Delta \in \mathbf{R}^{s \times t}$. 则其解析解为

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{Q} + A^T \hat{W} A)^{-1} (A^T \hat{W} \mathbf{b} + \hat{\lambda} N_a^T N_b) \quad (13)$$

其中 $\hat{Q} = Q + \hat{\lambda} N_a^T N_a$, $\hat{W} = W + WH \times (\hat{\lambda} I - H^T W H)^\dagger H^T W$, $\hat{\lambda}$ 为如下优化问题的解

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda \geq \|H^T W H\|} G(\lambda) \quad (14)$$

其中

$$G(\lambda) = \|\mathbf{x}(\lambda)\|_Q^2 + \lambda \|N_a \mathbf{x}(\lambda) - N_b\|^2 + \|\mathbf{A} \mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{b}\|_{W(\lambda)}^2 \quad (15)$$

$$\mathbf{x}(\lambda) = [Q(\lambda) + A^T W(\lambda) A]^{-1} [A^T W(\lambda) \mathbf{b} + \lambda N_a^T N_b] \quad (16)$$

$$Q(\lambda) = Q + \lambda N_a^T N_a \quad (17)$$

$$W(\lambda) = W + WH (\lambda I - H^T W H)^\dagger H^T W \quad (18)$$

其中 $(*)^\dagger$ 表示矩阵的伪逆.

文 [9] 中已经在数学上严格证明了 $G(\lambda)$ 在 $[\|H^T W H\|, \infty)$ 上为单峰函数, 因此通过一维搜索就可以找到全局最优值. 而实际应用过程中往往采用如下经验公式来代替最优值

$$\hat{\lambda} = (1 + \alpha) \cdot \|H^T W H\| \quad (19)$$

其中经验值 α 的通常取值范围为 $(0, 1)$.

然而, 一般性的线性分式扰动下 RLS 问题的解目前尚无解析形式. 由于任意结构的线性分式扰动都可以化成分块对角结构形式, 下面将仅考虑具有分块对角结构的线性分式扰动模型.

记 $N_a \mathbf{x} - N_b$, $\Delta(I - D\Delta)^{-1}(N_a \mathbf{x} - N_b)$ 分别为 \mathbf{u} 和 \mathbf{y} . 根据定义可知,

$$\mathbf{y} = \Delta(\mathbf{u} + D\mathbf{y}) \quad (20)$$

定义 $\mathbf{q} = \mathbf{u} + D\mathbf{y}$, $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_r^T]^T$, $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \dots, \mathbf{q}_r^T]^T$, $\mathbf{y}_i \in \mathbf{R}^{m_i}$, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, r$.

由矩阵范数的性质得出, 存在满足式 (20) 且范数不超过 1 的 Δ 的充分必要条件为

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i \leq \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i, \quad i = 1, \dots, r \quad (21)$$

引入标量变量 β_1, \dots, β_r , 上式等价于

$$\sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i \leq \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i, \quad \forall \beta_i \geq 0 \quad (22)$$

进一步写成矩阵形式

$$\mathbf{y}^T B_m \mathbf{y} \leq \mathbf{q}^T B_n \mathbf{q} \quad (23)$$

其中 $B_m = \text{diag}\{\beta_1 I_{m_1}, \dots, \beta_r I_{m_r}\}$, $B_n = \text{diag}\{\beta_1 I_{n_1}, \dots, \beta_r I_{n_r}\}$.

经代入整理, 式 (23) 化简为如下二次型形式的不等式组 (由于 β_i 可变)

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_{(B_m - D^T B_n D)}^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{(B_n^{-1} - D B_m^{-1} D^T)}^2 \quad (24)$$

其中 $\mathbf{y}_0 = (B_m - D^T B_n D)^{-1} D^T B_n \mathbf{u}$.

下面将分别考虑单块 (无结构) 和多块结构的情形:

1) $r = 1$, 在式 (24) 两边同时消去 β_1 , 可得

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_{(I_s - D^T D)}^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{(I_t - D D^T)}^2 \quad (25)$$

其中 $\mathbf{y}_0 = (I_s - D^T D)^{-1} D^T \mathbf{u}$. 可见此时式 (24) 退化为一个不等式.

引入不确定矩阵 $\Delta \in \mathbf{R}^{s \times t}$, $\|\Delta\| \leq 1$, 不等式 (25) 等价于如下等式

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + (I_s - D^T D)^{-\frac{1}{2}} \Delta (I_t - D D^T)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u} \quad (26)$$

故式 (9) 的不确定性模型等价于如下加法扰动模型

$$[\delta A, \delta \mathbf{b}] = [\delta A_0, \delta \mathbf{b}_0] + \hat{H} \Delta [\hat{N}_a, \hat{N}_b] \quad (27)$$

其中, $\delta A_0 = H(I_s - D^T D)^{-1} D^T N_a$, $\delta \mathbf{b}_0 = H(I_s - D^T D)^{-1} D^T N_b$, $\hat{H} = H(I_s - D^T D)^{-\frac{1}{2}}$, $\hat{N}_a = (I_t - D D^T)^{-\frac{1}{2}} N_a$, $\hat{N}_b = (I_t - D D^T)^{-\frac{1}{2}} N_b$.

作如下替换: $A \leftarrow A + \delta A_0$, $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}_0$, $[\delta A, \delta \mathbf{b}] \leftarrow \hat{H} \Delta [\hat{N}_a, \hat{N}_b]$, 再应用引理 1, 就可以得出 $r = 1$ 时问题 (8) 的解析解.

2) $r > 1$, 当 β_i , $i = 1, \dots, r$, \mathbf{u} 都固定时, \mathbf{y} 为 \mathbf{R}^s 中的椭球; 当 \mathbf{u} 固定而 β_i , $i = 1, \dots, r$ 变化时, \mathbf{y} 为 \mathbf{R}^s 中无穷多个椭球的交集. 在组成该交集的椭球中, 可以选择其中体积最小的作为该交集的最佳近似.

从文 [11] 中可知, 对于任意给定的 β_i 和 \mathbf{u} , 不等式 (24) 所描述的椭球体积为如下形式

$$V = c \cdot \det [\eta (B_m - D^T B_n D)^{-1}] \quad (28)$$

其中 $\eta = \|\mathbf{u}\|_{(B_n^{-1} - D B_m^{-1} D^T)}^2$, c 为一正常数.

采用与文 [11] 类似的求解办法, 体积最小的椭圆可通过如下优化问题得到

$$\begin{aligned} \min_{\beta_1, \dots, \beta_r, \gamma} \quad & \log \left\{ \det \left[\gamma \cdot (B_m - D^T B_n D)^{-1} \right] \right\} \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathbf{u}\|_{(B_n^{-1} - D B_m^{-1} D^T)^{-1}} < \gamma \end{aligned} \quad (29)$$

相应地, 在奇异系统鲁棒滤波中, 为了使问题 (29) 的最优解不依赖系统状态 (\mathbf{u} 中含系统状态), 避免在线计算的复杂性, 问题 (29) 可近似为

$$\begin{aligned} \min_{\beta_1, \dots, \beta_r, \gamma} \quad & \log \left\{ \det \left[\gamma \cdot (B_m - D^T B_n D)^{-1} \right] \right\} \\ \text{s.t.} \quad & N_a^T (B_n^{-1} - D B_m^{-1} D^T)^{-1} N_a < \gamma I \end{aligned} \quad (30)$$

这里利用了 $\mathbf{u} = N_a \mathbf{x} - N_b = N_a [\mathbf{x}_i^T \ \mathbf{x}_{i+1}^T]^T$, 并将状态范数归一化为 $\|[\mathbf{x}_i^T \ \mathbf{x}_{i+1}^T]^T\| = 1$.

由式 (29) 可知 $\gamma > 0$, 不妨设 $\gamma = 1$ (若 $\gamma \neq 1$ 只需令 $\beta_i = \gamma^{-1} \beta_i$ 即可), 则问题 (30) 等价于

$$\begin{aligned} \min_{\beta_1, \dots, \beta_r} \quad & \{-\log [\det (B_m - D^T B_n D)]\} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} I - N_a^T B_n N_a & N_a^T B_n D \\ D^T B_n N_a & B_m - D^T B_n D \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (31)$$

由文 [11] 可知, $\log [\det (B_m - D^T B_n D)]$ 为凸函数. 故问题 (31) 为不依赖于系统状态的凸优化问题, 因此可采用任何一种凸优化方法进行离线计算.

假设得到的最优参数为 $\hat{\beta}_i, i = 1, \dots, r$, 则体积最小的椭圆表达式为

$$\|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_0\|_{(\hat{B}_m - D^T \hat{B}_n D)} \leq \|\mathbf{u}\|_{(\hat{B}_n^{-1} - D \hat{B}_m^{-1} D^T)^{-1}} \quad (32)$$

其中 $\hat{\mathbf{y}}_0 = (\hat{B}_m - D^T \hat{B}_n D)^{-1} D^T \hat{B}_n \mathbf{u}$.

引入不确定矩阵 $\Delta \in \mathbf{R}^{s \times t}$, $\|\Delta\| \leq 1$, 上式等价于

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}_0 + M \Delta N \mathbf{u} \quad (33)$$

其中, $M = (\hat{B}_m - D^T \hat{B}_n D)^{-\frac{1}{2}}$, $N = (\hat{B}_n^{-1} - D \hat{B}_m^{-1} D^T)^{-\frac{1}{2}}$.

至此, 式 (9) 所表示的不确定性可用如下加性不确定性近似

$$[\delta A, \delta \mathbf{b}] \approx [\delta A_0, \delta \mathbf{b}_0] + \hat{H} \Delta [\hat{N}_a, \hat{N}_b] \quad (34)$$

其中 $\hat{H} = H M$, $\hat{N}_a = N N_a$, $\hat{N}_b = N N_b$, $\delta A_0 = H M^2 D^T \hat{B}_n N_a$, $\delta \mathbf{b}_0 = H M^2 D^T \hat{B}_n N_b$.

通过做与 1) 中相同的替换, 再应用引理 1, 就可以得出 $r > 1$ 时问题 (8) 的近似解.

4 线性分式扰动下奇异系统鲁棒递推滤波

由初始条件 (6)、递推过程 (7) 及问题 (8) 之间的映射关系 (10) 和 (11), 并利用上节得出的问题 (8) 在 $r = 1$ 和 $r > 1$ 两种情况下的解, 可以相应地给出奇异系统鲁棒滤波的递推算法如下:

步骤 1 (离线优化). 依据映射关系 (11), 求解优化问题 (35) (见本页下方), 显然, 当系统参数 $N_{f,i}, N_{e,i+1}, N_{h,i+1}, D_{f,i}, D_{e,i+1}, D_{h,i+1}$ 时不变时只需优化一次. 本步骤为步骤 3 做准备;

$$\min \left\{ -\log [\det (B_{m_{f,i}} - D_{f,i}^T B_{n_{f,i}} D_{f,i})] - \log [\det (B_{m_{e,i+1}} - D_{e,i+1}^T B_{n_{e,i+1}} D_{e,i+1})] - \log [\det (B_{m_{h,i+1}} - D_{h,i+1}^T B_{n_{h,i+1}} D_{h,i+1})] \right\}, \quad (35)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} I - N_{f,i}^T B_{n_{f,i}} N_{f,i} & N_{f,i}^T B_{n_{f,i}} D_{f,i} \\ D_{f,i}^T B_{n_{f,i}} N_{f,i} & \hat{B}_{m_{f,i}} - D_{f,i}^T B_{n_{f,i}} D_{f,i} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} P & N_{e,i+1}^T B_{n_{e,i+1}} D_{e,i+1} & N_{h,i+1}^T B_{n_{h,i+1}} D_{h,i+1} \\ D_{e,i+1}^T B_{n_{e,i+1}} N_{e,i+1} & B_{m_{e,i+1}} - D_{e,i+1}^T B_{n_{e,i+1}} D_{e,i+1} & 0 \\ D_{h,i+1}^T B_{n_{h,i+1}} N_{h,i+1} & 0 & B_{m_{h,i+1}} - D_{h,i+1}^T B_{n_{h,i+1}} D_{h,i+1} \end{bmatrix} > 0$$

其中, $P = I - N_{e,i+1}^T B_{n_{e,i+1}} N_{e,i+1} - N_{h,i+1}^T B_{n_{h,i+1}} N_{h,i+1}$.

$$\begin{aligned} P_{0|0} &= \left(P_0^{-1} + \hat{H}_0^T \hat{R}_0^{-1} \hat{H}_0 + \hat{\lambda}_{-1} \hat{N}_{h,0}^T \hat{N}_{h,0} \right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{0|0} &= P_{0|0} \hat{H}_0^T \hat{R}_0^{-1} \mathbf{z}_0 \end{aligned} \quad (36)$$

其中, $\hat{H}_0 = H_0 + M_{h,0} (I - D_{h,0}^T D_{h,0})^{-1} D_{h,0}^T N_{h,0}$, $\hat{R}_0 = R_0 - \hat{\lambda}_{-1} \hat{M}_{h,0} \hat{M}_{h,0}^T$, $\hat{N}_{h,0} = (I - D_{h,0} D_{h,0}^T)^{-\frac{1}{2}}$. $N_{h,0}, \hat{M}_{h,0} = M_{h,0} (I - D_{h,0}^T D_{h,0})^{-\frac{1}{2}}$. $\hat{\lambda}_{-1} > \lambda_{l,-1} = \left\| \hat{M}_{h,0}^T R_0^{-1} \hat{M}_{h,0} \right\|$ 为对应的引理 1 中优化问题的解, 在后面的仿真中我们使用经验式 (19), 并取 $\alpha = 0.8$.

步骤 2 (初始条件). 由初始条件 (6) 与 $r = 1$ 时问题 (8) 的映射关系 (10), 应用上节结论可得初始条件求解如式 (36)(见上页下方);

步骤 3 (递推过程). 由递推过程 (7) 与 $r = r_{e,i+1} + r_{f,i} + r_{h,i+1}$ 时问题 (8) 的映射关系 (11), 应用上节结论可得递推形式 (37)(见本页下方).

5 数值仿真对比试验

考虑如下具有线性分式扰动的奇异系统模型:

$$F = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix},$$

$$M_e = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_f = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix},$$

$$N_e = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_h = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$D_f = D_e = D_h = \text{diag} \{0.5, 0.5, 0.5\},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_h = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$R = 16, \quad r_{e,i+1} = r_{f,i} = r_{h,i} = 1.$$

由于文 [10] 中的 DR 滤波算法不考虑不确定块的结构, 在进行对比试验时与本文给出算法的区别仅在于除去步骤 1 的离线优化过程, 相当于它选择 $\hat{\beta}_{1,i} = \hat{\beta}_{2,i} = \hat{\beta}_{3,i} = 1$.

$$P_{i+1|i+1} = \left[\hat{E}_{i+1}^T \left(\hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T \right)^{-1} \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \right]^{-1}$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \left[\hat{E}_{i+1}^T \left(\hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T \right)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} [z_{i+1}^T \ 0]^T \right] \tag{37}$$

其中

$$\hat{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_i - \hat{\lambda}_i^{-1} \left(\hat{M}_{f,i} \hat{M}_{f,i}^T + \hat{M}_{e,i+1} \hat{M}_{e,i+1}^T \right) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{R}_{i+1} = \begin{bmatrix} R_{i+1} - \hat{\lambda}_i^{-1} \hat{M}_{h,i+1} \hat{M}_{h,i+1}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}_i = \left[\tilde{F}_i^T \ \sqrt{\hat{\lambda}_i} \hat{N}_{f,i}^T \right]^T, \quad \hat{E}_{i+1} = \left[\tilde{E}_{i+1}^T \ 0 \right]^T, \quad \hat{H}_{i+1} = \left[\tilde{H}_{i+1}^T \ \sqrt{\hat{\lambda}_i} \hat{N}_{e,i+1}^T \ \sqrt{\hat{\lambda}_i} \hat{N}_{h,i+1}^T \right]^T,$$

$$\tilde{F}_i = F_i + M_{f,i} \left(\hat{B}_{m_{f,i}} - D_{f,i}^T \hat{B}_{n_{f,i}} D_{f,i} \right)^{-1} D_{f,i}^T \hat{B}_{n_{f,i}} N_{f,i},$$

$$\tilde{E}_{i+1} = E_{i+1} + M_{e,i+1} \left(\hat{B}_{m_{e,i+1}} - D_{e,i+1}^T \hat{B}_{n_{e,i+1}} D_{e,i+1} \right)^{-1} D_{e,i+1}^T \hat{B}_{n_{e,i+1}} N_{e,i+1},$$

$$\tilde{H}_{i+1} = H_{i+1} + M_{h,i+1} \left(\hat{B}_{m_{h,i+1}} - D_{h,i+1}^T \hat{B}_{n_{h,i+1}} D_{h,i+1} \right)^{-1} D_{h,i+1}^T \hat{B}_{n_{h,i+1}} N_{h,i+1},$$

$$\hat{M}_{f,i} = M_{f,i} \left(\hat{B}_{m_{f,i}} - D_{f,i}^T \hat{B}_{n_{f,i}} D_{f,i} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \hat{N}_{f,i} = \left(\hat{B}_{n_{f,i}}^{-1} - D_{f,i} \hat{B}_{m_{f,i}}^{-1} D_{f,i}^T \right)^{-\frac{1}{2}} N_{f,i},$$

$$\hat{M}_{e,i+1} = M_{e,i+1} \left(\hat{B}_{m_{e,i+1}} - D_{e,i+1}^T \hat{B}_{n_{e,i+1}} D_{e,i+1} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \hat{N}_{e,i+1} = \left(\hat{B}_{n_{e,i+1}}^{-1} - D_{e,i+1} \hat{B}_{m_{e,i+1}}^{-1} D_{e,i+1}^T \right)^{-\frac{1}{2}} N_{e,i+1},$$

$$\hat{M}_{h,i+1} = M_{h,i+1} \left(\hat{B}_{m_{h,i+1}} - D_{h,i+1}^T \hat{B}_{n_{h,i+1}} D_{h,i+1} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \hat{N}_{h,i+1} = \left(\hat{B}_{n_{h,i+1}}^{-1} - D_{h,i+1} \hat{B}_{m_{h,i+1}}^{-1} D_{h,i+1}^T \right)^{-\frac{1}{2}} N_{h,i+1}.$$

$\hat{\lambda}_i > \lambda_{l,i} = \left\| \text{diag} \left\{ \left[\hat{M}_{f,i} \ \hat{M}_{e,i+1} \right]^T Q_i^{-1} \left[\hat{M}_{f,i} \ \hat{M}_{e,i+1} \right], \hat{M}_{h,i+1}^T R_{i+1}^{-1} \hat{M}_{h,i+1} \right\} \right\|$ 为由方程 (14) 确定的最优滤波参数, 在后面的仿真中我们使用经验式 (19), 并取 $\alpha = 0.8$.

图 1 为准确模型 Kalman 滤波、名义模型 Kalman 滤波、文 [10] 中 DR 滤波算法及本文算法的滤波效果比较 (5000 次独立仿真的滤波误差平均值比较, 每次仿真 1000 个时刻). 后两种算法在递推时均选择 $\hat{\lambda} = (1 + 0.8)\lambda_l$. 其中滤波误差的计算采用如下形式

$$E \|\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i\| \approx \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \|\mathbf{x}_i^{(j)} - \hat{\mathbf{x}}_i^{(j)}\| \quad (38)$$

其中 $\mathbf{x}_i^{(j)}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_i^{(j)}$ 分别表示第 j 次仿真中第 i 个时刻的真实状态值和估计状态值, T 为仿真次数.

图 1 的纵坐标为滤波误差的方差的分贝值 (dB), 横坐标为时间. 从图 1 中可以看出, 本文给出算法的稳态滤波误差比文 [10] 中 DR 算法降低了大约 13%.

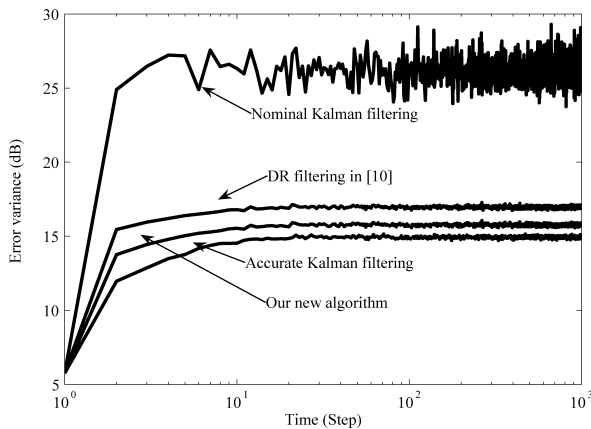


图 1 不同滤波算法的性能比较
(5000 次独立仿真的均方误差)

Fig. 1 Performance comparison of different filtering algorithms (MSE of 5000 times independent experiments)

6 结论

本文给出了线性奇异系统中存在具有结构约束的线性分式扰动时的递推鲁棒滤波算法. 从几何角度看, 无结构加法扰动模型所表示的不确定性集合是空间中的椭球, 而分块对角结构的线性分式扰动模型所确定的不确定性集合为空间中一系列椭球的交集. 本文的主要理论贡献是通过离线计算一个凸优化问题得到一个椭球的表达式, 该椭球的参数不依赖于系统的真实状态, 且在保证包含上述交集的条件下体积达到最小, 然后利用所得椭球对应的加法扰动模型代替线性分式扰动模型进行递推鲁棒滤波. 从数值仿真对比试验的结果可以看出, 该算法可以实现递推滤波, 且其性能优于不考虑结构约束的现有算法.

References

1 Luenberger D. Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(3): 312~321

- 2 Newcomb R W, Dziurla B. Some circuits and systems applications of semistate theory. *Circuits, System, Signal Processing*, 1989, **8**(3): 235~260
- 3 Mills J K, Goldenberg A A. Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1989, **5**(1): 30~46
- 4 Stevens B L, Lewis F L. *Aircraft Modeling, Dynamics and Control*. New York: Wiley, 1991
- 5 Khargonekar P P, Nagpal K M. Filtering and smoothing in an H_∞ setting. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(2): 152~166
- 6 Bertsekas D P, Rhodes I B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, **16**(2): 117~128
- 7 Petersen I R, McFarlane D C. Robust state estimation for uncertain systems. In: *Proceedings of IEEE Conference on Decision Control*. Brighton, England: IEEE, 1991. 2630~2631
- 8 Sayed A H. A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(7): 998~1013
- 9 Sayed A H, Nascimento V H, Cipparrone F A M. A regularized robust design criterion for uncertain data. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2002, **23**(4): 1120~1142
- 10 Ishihara J Y, Terra M H, Campos J C T. Robust Kalman filter for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(8): 1354
- 11 Boyd S, Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004



张光磊 清华大学自动化系博士研究生. 主要研究方向为多维系统中的鲁棒滤波. 本文通信作者.

E-mail: zgl03@mails.tsinghua.edu.cn
(ZHANG Guang-Lei Ph. D. candidate at Department of Automation, Tsinghua University. His main research interest is robust filtering in multidimensional systems. Corresponding author of this paper.)



周彤 分别于 1984 年和 1989 年在成都电子科技大学获得学士和硕士学位, 1994 年在日本大阪大学获得博士学位, 目前为清华大学自动化系教授. 主要研究方向为鲁棒控制, 系统辨识, 信号处理, 混合系统和通讯系统及其在实际中的应用.

E-mail: tzhou@mail.tsinghua.edu.cn
(ZHOU Tong Professor at Department of Automation, Tsinghua University. He received his bachelor and master degrees from University of Electronic Science and Technology of China in 1984 and 1989, respectively, and the Ph. D. degree from Osaka University, Osaka, Japan, in 1994. His research interest covers robust control, system identification, signal processing, hybrid systems, communication systems, and their applications to real-world problems.)