

基于四元数的图像信息并行融合

郎方年¹ 周激流² 钟钊¹ 宋恩彬³ 闫斌⁴

摘要 针对传统串行特征融合方法中矢量空间维数的限制以及并行复矢量特征融合方法中能够融合的特征类别数量有限的弱点, 提出一种建立在四元数空间中的新型特征并行融合方法. 本文从理论上详细证明了该方法的合理性及其实际应用中的可行性, 并将实数中的 Fisher 鉴别分析法推广到四元数空间, 同时证明了推广 Fisher 鉴别分析法用于图像模式分类的可行性, 并给出使用的具体方法和步骤. 最后将本文提出的推广方法用于人脸检测, 取得了良好效果.

关键词 特征融合, 四元数体, 自共轭四元数矩阵, 模式分类, 人脸检测

中图分类号 TP391.41

Quaternion Based Image Information Parallel Fusion

LANG Fang-Nian¹ ZHOU Ji-Liu² ZHONG Fan¹ SONG En-Bin³ YAN Bin⁴

Abstract In view of the dimension limit of traditional serial feature fusion method and the quantity limit of parallel complex vector feature fusion method, an evolution of parallel vector feature fusion method based on quaternion is proposed. The feasibility and rationality of the method are proved in detail. Meanwhile, Fisher classification method in real and complex domains is generalized into quaternion space. Furthermore, the feasibility and the detailed proving process of the generalized Fisher method used in image classification are also given. Finally, the novel algorithm is used in face detection and good effect is obtained.

Key words Feature fusion, quaternion, self-conjugate quaternion matrix, classification, face detection

1 引言

随着计算机运算速度的提高, 内存容量的迅速扩大, 信息融合成为一种新兴的数据处理技术. 目前在这方面已经取得可喜的成绩, 特别在军事、遥感图像处理等领域更是发展迅速. 但就处理方法来讲, 图像信息融合技术主要有三类: 基于像素的低层融合、基于特征的中级融合以及基于决策级的高层融合. 低层图像信息融合已经有很多成熟的方法, 并在众多领域中得到了广泛的应用, 该层融合思想不局限于原始图像像素水平, 比如, 在图像的变换域(如 DCT、DWT、DFT 等) 同样可采用类似的融合方法^[1]. 在模式识别领域, 以分类器组合为代表的决策级融合技术已受到广泛关注, 并在手写体字符识别

等方面取得了较为成功的应用^[2]. 但是, 对于特征中级融合技术来说, 行之有效的方法还不多见.

特征级的信息融合在信息融合技术中占有十分重要的地位, 有其他两类方法不可替代的优点, 比如, 该方法保留了参与融合的多种特征有效的分类信息, 通过更深入的融合变换, 在很大程度上消除原始信号中的冗余信息, 实现了可观的信息压缩, 从而提高模式分类的效果以及信息的处理速度, 降低了时间复杂度, 有利于信号的实时处理. 目前, 研究较多的特征级融合方法主要有实数域中的串行融合和复数域中的两类特征并行融合方法. 串行融合算法将两组不同的特征矢量按首尾相连的方式构成新的特征矢量, 然后在高维特征空间中进行分类识别^[3]. 然而, 模式识别中一个主要的处理手段就是降低模式空间的维数, 这样可以得到更简单的分类区域和更容易训练的分类器^[4], 因此串行融合方法的缺点也就很明显: 首先, 合并后的特征空间维数是原始两种特征维数之和, 合并的特征越多, 新特征维数越多, 从而加重分类器的负担, 降低数据的处理速度; 其次, 在小样本问题中, 维数增加很容易造成各种散布矩阵的奇异性, 从而增加了后续特征抽取的难度^[5].

针对串行方法的缺点, 文献 [6] 提出基于复矢量的并行特征融合方法, 如果 A 、 B 为样本模式空间

收稿日期 2006-6-5 收修改稿日期 2006-8-7
Received June 5, 2006; in revised form August 7, 2006
国家自然科学基金(60272095)资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60272095)

1. 四川大学电子信息学院 成都 610064 2. 四川大学计算机学院 成都 610064 3. 四川大学应用数学学院 成都 610064 4. 电子科技大学自动化工程学院 成都 610054
1. School of Electronic and Information Science, Sichuan University, Chengdu 610064 2. College of Computer Science, Sichuan University, Chengdu 610064 3. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064 4. College of Automation, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054
DOI: 10.1360/aas-007-1136

Ω 中两组不同性质的特征, 对任意模式样本 $\eta \in \Omega$, 对应的两组特征分别为 $\alpha \in A, \beta \in B$, 经单位化等预处理后得到 α', β' , 用复数矢量 $\gamma = \alpha' + i\beta'$ 来表示样本 η 的并行组合特征, 如果两组特征的维数不相等, 则低维特征向量用零补齐, 例如 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T, \beta = (b_1, b_2)^T$, 则组合特征为 $\gamma = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + i0)^T$, 基于并行复矢量的这种定义以及复数矩阵的相关结论, 文献 [6] 将定义于实数空间中的 K-L 变换方法以及 Fisher 最佳鉴别矢量集的抽取方法向复数域作了合理的推广. 实验证明, 在人脸识别应用中该方法不仅具有很强的维数压缩能力, 而且能大幅度提高识别率. 尽管如此, 该方法仍然存在很多有待解决的问题: 1) 在复数域中进行多特征融合, 如何从统计学上清楚地解释各个分量的物理含义; 2) 如果能很好解释整体特征的物理含义, 是否能从数学上证明该方法确实比实数域中的串行融合法以及单个特征的处理方法效果要好; 3) 是否还有其他融合更多特征的办法. 针对上述系列问题, 本文将四元数和四元数矩阵的相关内容引入到模式识别领域, 提出一种新的特征并行融合方法, 并将其用于彩色人脸检测, 取得了很好的效果.

本文内容安排如下: 首先给出四元数及四元数矩阵的相关概念, 其次详细论述了广义 Rayleigh 商和 Fisher 分类法在四元数中的推广, 以及基于四元数的信息融合, 然后给出广义 Fisher 分类法在人脸检测中的应用, 最后是结论部分.

2 四元数的定义及四元数矩阵的相关概念

设 $q = a + ib + jc + kd$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbf{R}, i, j, k$ 满足关系 $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$, 则称 q 为四元数, 而称 a 为四元数 q 的实部, 称 $ib + jc + kd$ 为四元数 q 的虚部.

令 $q_1 = a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1, q_2 = a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2$, 则四元数的基本运算法则定义为

相等: $q_1 = q_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$

加法: $q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + k(d_1 + d_2)$

乘法: $q_1 \cdot q_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + (a_1c_2 + a_2c_1 + b_2d_1 - d_2b_1)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k$

共轭: $\bar{q} = a - bi - cj - dk$

矩: $N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$

模: $|q| = \sqrt{N(q)} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

在图像模式识别的应用中, 需要用到的有关四元数矩阵的概念有: 令 Q 表示四元数集, 设矩阵 $A \in Q^{n \times n}$,

1) 若 $A^H = A$, 则称 A 为自共轭四元数矩阵, n 阶四元数自共轭矩阵的集合记为 $SC_n(Q)$, 实对称矩阵和复 Hermite 矩阵都是特殊的自共轭矩阵;

2) 若存在 $B \in Q^{n \times n}$, 使得 $AB = BA = I$, 则称四元数矩阵 A 是可逆的, 且称 B 为 A 的逆阵, 记为 A^{-1} ;

3) 若存在 $\lambda \in Q$ 及 $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in Q^{n \times 1}$, 使得 $A\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda$ (或 $A\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$), 则称 λ 为 A 的右 (或左) 特征值, 而 \mathbf{a} 为 A 的属于右 (或左) 特征值的特征向量. 如果 λ 既是 A 的右特征值又是 A 的左特征值, 则称 λ 为 A 的特征值.

有关命题: 1) $(AB)^H = B^H A^H$; 2) 设 $A \in SC_n(Q)$, 对任意 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in Q^{n \times 1}$, $\mathbf{x}^H A \mathbf{x}$ 必为实数; 3) 设 $A \in SC_n(Q)$, 则对任意 $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in Q^{n \times 1}$, 有 $\mathbf{x}^H A \mathbf{x} > 0$ (≥ 0), 则称 A 为四元数 (半) 正定矩阵, 并分别记为 $SC_n^>(Q)$ ($SC_n^{\geq}(Q)$); 4) 设 $A \in SC_n(Q)$, 若 A 可逆, 则 $A^{-1} \in SC_n(Q)$; 5) 设 $A \in SC_n(Q)$, 则四元数自共轭矩阵的行列式为实数; 6) 设 $A \in SC_n^>(Q)$, 则 A 的特征值为实数.

3 四元数与图像信息并行融合

本节将实数域中的广义 Rayleigh 商合理推广到四元数体, 并以此为基础, 对定义于实数域中的 Fisher 最佳鉴别矢量分析法在四元数中进行了新的诠释, 从而提出一种新的基于四元数的特征并行融合算法.

3.1 广义 Rayleigh 商在四元数体中的推广

设 $A \in SC_n(Q)$, 记 $\varphi_A(\alpha) = (\alpha^H A \alpha) / (\alpha^H \alpha)$, 其中 $\mathbf{0} \neq \alpha \in Q^{n \times 1}$, 它是 $Q^n \setminus \{0\}$ 到 \mathbf{R} 的映射, 被称为矩阵 A 的 Rayleigh 商. 如果实数 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 是 A 的特征值, 则有如下性质存在^[7]

$$\lambda_n \leq \varphi_A(\alpha) \leq \lambda_1, \quad \forall \mathbf{0} \neq \alpha \in Q^{n \times 1}$$

$$\lambda_1 = \max_{\alpha \neq \mathbf{0}} \varphi_A(\alpha), \quad \lambda_n = \min_{\alpha \neq \mathbf{0}} \varphi_A(\alpha)$$

基于 Fisher 模式分类准则函数的需要, 本文给出四元数广义 Rayleigh 商的定义. 设 $A \in SC_n^{\geq}(Q)$, $B \in SC_n^>(Q)$, 且 $\mathbf{x} \in Q^{n \times 1} \neq \mathbf{0}$, 称 $\varphi(\mathbf{x}) =$

$(\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x})/(\mathbf{x}^H \mathbf{B} \mathbf{x})$ 为矩阵 A 相对于矩阵 B 的广义 Rayleigh 商. 在实际应用中, 会遇到求解该式极值的问题, 证明可知求解该式的极值问题可转换为求解方程 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{x}$ 的广义特征值及广义特征向量的问题, 本文给出如下结论及其证明.

结论 1. 设 $A \in SC_n(Q)$, $B \in SC_n^>(Q)$, 则方程 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{x}$ 存在 n 个关于 B 共轭正交的特征向量以及 n 个对应的实数特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 并且满足条件

$$\mathbf{x}_i^H \mathbf{B} \mathbf{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_i^H \mathbf{A} \mathbf{x}_j = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

证明. 因为 $B^H = B \in SC_n^>(Q)$, 则存在满秩矩阵 P , 使得 $B = P^H P^{[7]}$, 于是方程 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{x}$ 可转化为 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda P^H P \mathbf{x}$. 若记 $\mathbf{y} = P \mathbf{x}$, 则有 $P^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{x}$, 代入上式, 则有

$$AP^{-1} \mathbf{y} = \lambda P^H \mathbf{y} \text{ 或 } (P^{-1})^H AP^{-1} \mathbf{y} = (P^{-1})^H \lambda P^H \mathbf{y}$$

记 $T = (P^{-1})^H AP^{-1}$, $R(\lambda) = (P^{-1})^H \lambda P^H$, 则 $T \mathbf{y} = R(\lambda) \mathbf{y}$, 易证 $T^H = ((P^{-1})^H AP^{-1})^H = (P^{-1})^H A^H P^{-1} = (P^{-1})^H AP^{-1} = T$, 即 T 也是自共轭的四元数矩阵, 这样广义特征值问题就转化为自共轭矩阵 T 的一般特征值问题. 由文献 [7] 第 87 页定理可知, 矩阵 T 的特征值 $R(\lambda) = (P^{-1})^H \lambda P^H$ 是实数, 令其为 k , 即 $k = R(\lambda) = (P^{-1})^H \lambda P^H$, 则有 $\lambda = P^H k (P^{-1})^H = k (P^{-1} P)^H = k$, 可知 λ 为实数, 因此上述广义特征方程可写为 $(P^{-1})^H AP^{-1} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$ 或 $T \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$, 由文献 [7] 知此式存在由 n 个单位特征向量构成的标准正交向量系, 即 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$, 并且满足关系 $\mathbf{y}_i^H \mathbf{y}_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 因为 $\mathbf{y}_i = P \mathbf{x}_i$, 从而有 $\mathbf{y}_i^H \mathbf{y}_j = (P \mathbf{x}_i)^H (P \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i^H P^H P \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i^H \mathbf{B} \mathbf{x}_j = \delta_{ij}$, 其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 称 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 为 B 的共轭正交向量系. 同时 $\mathbf{A} \mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{B} \mathbf{x}_j$, 两边同时左乘 \mathbf{x}_i^H , 则有

$$\mathbf{x}_i^H \mathbf{A} \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i^H \lambda_j \mathbf{B} \mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_i^H \mathbf{B} \mathbf{x}_j = \lambda_j \delta_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

□

结论 2. 设矩阵 $A^H = A \in SC_n(Q)$, $B^H = B \in SC_n^>(Q)$, 满足 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{x}$, 则 B 的共轭向量

系 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 具有如下性质: 1) $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$; 2) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 右线性无关; 3) λ_i 与 \mathbf{x}_i 满足方程 $\mathbf{A} \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; 4) 若记 $Q = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, 则 $Q^H B Q = E$, 且 $Q^H A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

证明. 1) 设 \mathbf{y}_i 是自共轭矩阵 $T = (P^{-1})^H AP^{-1}$ 的特征值所对应的特征向量, 那么由 $\mathbf{y}_i \neq \mathbf{0}$ 及 $\mathbf{y}_i = P \mathbf{x}_i$ 可知 $\mathbf{x}_i = P^{-1} \mathbf{y}_i \neq \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

2) 设有 $k_1, k_2, \dots, k_n \in Q$, 使得共轭向量系 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 的右线性组合等于零向量, 即 $\mathbf{x}_1 k_1 + \mathbf{x}_2 k_2 + \dots + \mathbf{x}_n k_n = \mathbf{0}$, 用 $\mathbf{x}_i^H B$ 左乘等式两端, 得

$$\mathbf{x}_i^H B \mathbf{x}_1 k_1 + \mathbf{x}_i^H B \mathbf{x}_2 k_2 + \dots + \mathbf{x}_i^H B \mathbf{x}_n k_n = 0$$

因为 $\mathbf{x}_i^H P^H P \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i^H \mathbf{B} \mathbf{x}_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 从而有 $\mathbf{x}_i^H B \mathbf{x}_i k_i = k_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

3) 设有满秩矩阵 P , 使 $B = P^H P$, 而 $T = (P^{-1})^H AP^{-1}$, λ_i 为 T 的实数特征值, 对应的特征向量为 \mathbf{y}_i , 即 $T \mathbf{y}_i = \lambda_i \mathbf{y}_i$, 从而有 $(P^{-1})^H AP^{-1} \mathbf{y}_i = \lambda_i \mathbf{y}_i$, $AP^{-1} \mathbf{y}_i = \lambda_i P^H \mathbf{y}_i$, $A(P^{-1} \mathbf{y}_i) = \lambda_i P^H P (P^{-1} \mathbf{y}_i)$. 因为 $\mathbf{x}_i = P^{-1} \mathbf{y}_i$, $B = P^H P$, 则有 $\mathbf{A} \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, 所以可知 λ_i 是该广义特征值问题的特征值, 而 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 是对应的广义特征向量.

4) 设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 是 B 的共轭向量系, 满足右线性无关, 则矩阵 $Q = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ 是满秩的 $n \times n$ 矩阵. 由结论 1 知道 $\mathbf{x}_i^H \mathbf{B} \mathbf{x}_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 所以有

$$Q^H B Q = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^H \\ \mathbf{x}_2^H \\ \dots \\ \mathbf{x}_n^H \end{bmatrix} B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^H \\ \mathbf{x}_2^H \\ \dots \\ \mathbf{x}_n^H \end{bmatrix} (B \mathbf{x}_1, B \mathbf{x}_2, \dots, B \mathbf{x}_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^H B \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1^H B \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_1^H B \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_2^H B \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2^H B \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_2^H B \mathbf{x}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{x}_n^H B \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_n^H B \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n^H B \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = E$$

$$Q^H A Q = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^H \\ \mathbf{x}_2^H \\ \dots \\ \mathbf{x}_n^H \end{bmatrix} A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{x}_1^H B \mathbf{x}_1 & \lambda_2 \mathbf{x}_2^H B \mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{x}_1^H B \mathbf{x}_n \\ \lambda_1 \mathbf{x}_2^H B \mathbf{x}_1 & \lambda_2 \mathbf{x}_2^H B \mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{x}_2^H B \mathbf{x}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 \mathbf{x}_n^H B \mathbf{x}_1 & \lambda_2 \mathbf{x}_n^H B \mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{x}_n^H B \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

□

3.2 Fisher 鉴别分析法在四元数体中的推广

基于 3.1 节所给出的结论，本节将实数域中的 Fisher 鉴别分析法推广到四元数空间，同时给出该空间中 Foley-Sammon 鉴别矢量集的抽取方法及其详细证明过程。

3.2.1 四元数中 Fisher 鉴别分析法的提出

设 A, B, C, D 为模式样本空间 Ω 中以其他任意方式获得的四组不同的特征，对任意模式样本 $\xi \in \Omega$ ，其对应的四组特征分别为 $\alpha \in A, \beta \in B, \gamma \in C, \eta \in D$ ，经单位化、归一化等预处理后得到 $\alpha', \beta', \gamma', \eta'$ ，用四元数 $q = \alpha' + i\beta' + j\gamma' + k\eta'$ 来表示样本 ξ 的并行组合特征，如果四组原始特征的维数不相等，则将低维特征向量用 $\mathbf{0}$ 补齐。该模式样本空间 Ω 上的组合特征空间定义为如下的标准化形式： $G = \{\alpha' + i\beta' + j\gamma' + k\eta' | \alpha \in A, \beta \in B, \gamma \in C, \eta \in D\}$ ，该空间为 n 维四元数向量空间，其维数 n 定义为原始特征中维数的最大值，即 $n = \max\{\dim A, \dim B, \dim C, \dim D\}$ 。定义内积运算 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}\mathbf{y}^H$ ，其中 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q^{n \times 1}$ ，定义了该内积的四元数空间被称为广义酉空间。

Fisher 判别分析法的基本思想是投影，即使得投影后的类与类之间的样本投影尽量分开，而类内的样本投影尽量靠近，本文定义相应矩阵的形式如下

类间散布矩阵: $S_b = \sum_{i=1}^l P(\omega_i)(\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_0)(\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_0)^H, S_b \in Q^{n \times n}, \mathbf{m}_0, \mathbf{m}_i \in Q^{n \times 1}$

类内散布矩阵: $S_w = \sum_{i=1}^l P(\omega_i)E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^H / \omega_i\}, S_w \in Q^{n \times n}, \mathbf{m}_i \in Q^{n \times 1}$

总体散布矩阵: $S_t = S_b + S_w, S_t \in Q^{n \times n}$

由以上矩阵的构造方式可知， S_b, S_w, S_t 均为非负定的广义 Hermite 阵，即自共轭的四元数矩阵。

本文采用的 Fisher 准则函数为 $J_F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T S_b \mathbf{x}) / (\mathbf{x}^T S_t \mathbf{x})$ ，则最佳投影矢量 ω 应该

是使得上式达到最大值的向量，即使得 $J_F(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} J_F(\mathbf{x})$ 的 \mathbf{x} 。令该最大值为 $\max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} J_F(\mathbf{x}) = \lambda_{\max} \in \mathbf{R}$ (该值为实数^[7])，则上式等价于

$$\frac{\mathbf{x}^H S_b \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H S_t \mathbf{x}} = \lambda_{\max} \Leftrightarrow \mathbf{x}^H (S_b \mathbf{x} - \lambda_{\max} S_t \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

如果方程 $S_b \mathbf{x} - \lambda_{\max} S_t \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 成立，则同样满足求解的要求。由 3.1 节推导可知，该方程能够方便地求解，并且其最大特征值所对应的特征向量即为需要求解的最佳投影矢量。后续的实验证明了该方程的这种处理能够满足实际应用的要求。

3.2.2 四元数中 Foley-Sammon 鉴别矢量集的抽取

由 3.1 节中的结论 2 以及文献 [7] 第 97 页的推论 2 可以得知：1) 广义特征方程 $S_b \mathbf{x} = \lambda S_t \mathbf{x}$ 的特征值 λ_i 均为非负实数，且有 q 个非零特征值，其中 $q = \text{rank}(S_b)$ ；2) 鉴别准则函数 $J_F(\mathbf{x}_i) = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ ；3) $S_b \mathbf{x} = \lambda S_t \mathbf{x}$ 关于 S_t 的共轭向量系 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 右线性无关。因此，对四元数中 Foley-Sammon 鉴别矢量集的抽取问题有如下结论：

结论 3. 设前 k 个最优鉴别矢量 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ 分别取为 $\varphi_1 = \mathbf{x}_1, \varphi_2 = \mathbf{x}_2, \dots, \varphi_k = \mathbf{x}_k$ ，则第 $k+1$ 个最优鉴别矢量可以取为 $\varphi_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}$ ，也就是说，广义特征方程的第 $k+1$ 个特征值所对应的特征向量即为第 $k+1$ 个最优鉴别矢量。

证明. 假设方程 $S_b \mathbf{x} = \lambda S_t \mathbf{x}$ 的特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ，如果前 k 个最优鉴别矢量 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ 分别取为 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ ，则 φ_{k+1} 只能从子空间 $\text{span}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}, \dots, \mathbf{x}_n)$ 中获取，设 $\varphi = \mathbf{x}_{k+1} r_{k+1} + \mathbf{x}_{k+2} r_{k+2} + \dots + \mathbf{x}_n r_n$ ，则得到 $J_F(\varphi) \leq \lambda_{k+1}$ (见下页)。当 $\varphi = \mathbf{x}_{k+1}$ 时， $J_F(\varphi) = \lambda_{k+1}$ ，所以第 $k+1$ 个最优鉴别矢量可取为 \mathbf{x}_{k+1} ，同时 $J_F(\varphi_{k+1}) = \lambda_{k+1}$ 。在四元数广义酉空间中，最优鉴别矢量集 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 可构成线性变换 $\mathbf{y} = \Pi^H \mathbf{x}$ ，其中 $\Pi = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$ ，因此，在模式识别的实际应用中，可以采用低维的样本投影矢量 \mathbf{y} 来代替原始的高维样本 \mathbf{x} 进行鉴别分析。 □

3.3 基于四元数的特征并行融合方法

基于 3.1 和 3.2 节的分析，本文提出一种新的特征并行融合算法，即基于四元数体的融合方法。对任何样本，抽取至多四种不同性质的特征，组合为四元数矢量，该矢量的维数为原始四组特征中的最大维

$$\begin{aligned}
J_F(\varphi) &= \frac{\varphi^H S_b \varphi}{\varphi^H S_t \varphi} = \frac{(\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1} + \mathbf{x}_{k+2} r_{k+2} + \cdots + \mathbf{x}_n r_n)^H S_b (\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1} + \mathbf{x}_{k+2} r_{k+2} + \cdots + \mathbf{x}_n r_n)}{(\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1} + \mathbf{x}_{k+2} r_{k+2} + \cdots + \mathbf{x}_n r_n)^H S_t (\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1} + \mathbf{x}_{k+2} r_{k+2} + \cdots + \mathbf{x}_n r_n)} = \\
&= \frac{\lambda_{k+1} (\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1})^H (\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1}) + \lambda_{k+2} (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2})^H (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2}) + \cdots + \lambda_n (\mathbf{x}_n r_n)^H (\mathbf{x}_n r_n)}{(\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1})^H (\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1}) + (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2})^H (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2}) + \cdots + (\mathbf{x}_n r_n)^H (\mathbf{x}_n r_n)} \leq \\
&= \frac{\lambda_{k+1} (\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1})^H (\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1}) + \lambda_{k+1} (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2})^H (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2}) + \cdots + \lambda_{k+1} (\mathbf{x}_n r_n)^H (\mathbf{x}_n r_n)}{(\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1})^H (\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1}) + (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2})^H (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2}) + \cdots + (\mathbf{x}_n r_n)^H (\mathbf{x}_n r_n)} = \\
&= \lambda_{k+1} \frac{(\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1})^H (\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1}) + (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2})^H (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2}) + \cdots + (\mathbf{x}_n r_n)^H (\mathbf{x}_n r_n)}{(\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1})^H (\mathbf{x}_{k+1} r_{k+1}) + (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2})^H (\mathbf{x}_{k+2} r_{k+2}) + \cdots + (\mathbf{x}_n r_n)^H (\mathbf{x}_n r_n)} = \lambda_{k+1}
\end{aligned}$$

数,然后在四元数空间中对组合矢量进行常规的操作,以满足实际的需要.为验证该方法的正确性,本文在彩色人脸检测中采用该方法,取得了很好的效果.

4 广义 Fisher 鉴别分析法在彩色人脸检测中的应用

4.1 问题的提出

随着人机交互技术日益成为当前研究的一个中心,人脸检测问题越来越受到重视,成为模式识别与计算机视觉领域中的一个研究热点.人脸检测问题的内涵十分广泛,已有的方法一般都是针对某一类问题而提出的.由于该检测问题的复杂性,实现通用的人脸检测方法还不现实,因此解决特定约束条件下的人脸检测问题仍是该领域研究的主要课题.

人脸检测的目标是判别输入图像中是否存在人脸,如果存在,还需确定图像中人脸的位置及尺寸大小.人脸特征包括肤色特征和灰度特征,而人脸检测过程就是对面脸模式特征的综合判断过程.目前已经有很多成熟的方法,比如:基于启发式模型的方法、基于统计模型的方法.而基于统计模型的方法又可细分为:基于特征空间的方法、基于神经网络的方法、基于概率模型的方法以及基于支持向量基的方法等.

由于彩色图像的大量出现,人脸检测不可避免会面临如下的问题,即如何在包含丰富视觉信息的彩色区域中准确而快速的判断是否存在人脸,如果存在,则如何较为精确的获取其位置和尺度大小.目前大量存在的方法一般都是先对输入图像进行肤色判断,找出类似肤色的区域,作为可能的人脸区域,然后在这些区域中利用传统的基于灰度图像的人脸检测方法进行后续判断处理.采用这种方法,肤色粗检结果的问题是存在大量类似肤色而非人脸的区域,

而且这些区域形状、大小各异,给后续分析、判断和检测带来很多不便,如果要逐一判断处理,则会花费大量时间.

针对传统彩色人脸检测算法中所存在的问题,本文基于第3节中关于四元数并行特征融合的几个结论提出一种新的彩色人脸检测技术,该技术的基本思想是从数学上融合彩色图像像素的三个彩色分量的信息,即将彩色图像像素的 R 、 G 、 B 三分量作为四元数的三个矢量部分而参与全部的计算处理过程,从而避免了肤色检测与灰度或形状确定分开进行.

4.2 基于四元数的人脸检测

彩色图像相对于灰度图像来说,多出了包含视觉信息的彩色成分,所以彩色人脸检测不但应该依据人脸固有的形状轮廓信息,还应该充分利用人体肤色的颜色信息.由于不同种族人脸的肤色不一样,因此,对本文方法而言,为提高检测的准确度,应将各种族的人脸分开进行检测.但是,由于样本收集的困难以及本文目的只是验证所提方法的正确性,因此简单起见,本文仅对亚洲人脸进行检测.

本文人脸检测思想为:如果将灰度人脸样本图像按行展开为矢量,则每个人脸样本可以当作是高维空间中的一个点,由于人脸形状存在相似性,因此,在该高维空间中,代表人脸的所有点具有很好的聚集性.对于彩色人脸而言,因为选取同一种族的人脸保证了肤色的相似性,因此,两种相似性共同保证了高维空间中代表彩色人脸的点具有很好的类聚性.代表非人脸的点则布满人脸子空间之外的所有区域,人脸区域被非人脸区域紧密包围,因此,要判断一个输入子图像是不是人脸,就需要判断代表该区域的属于高维空间中的点是不是位于人脸子空间内.本文采用距离作为计算标准进行判断,但是为了快速准确地检测,需要用经典的 Fisher 鉴别分析方法将

高维空间降维处理.

检测的具体步骤为: 收集 20×20 彩色人脸样本以及充分的非人脸样本, 并将非人脸样本依据样本在维数为 400 的空间中的位置信息分为 8 个类别, 分类方法采用 K 均值聚类法. 然后分别求出 8 个非人脸样本类到人脸样本类之间的 Fisher 最佳鉴别矢量, 同时得到各类样本集投影后的投影中心. 检测的时候, 逐级逐位扫描输入图像, 将每个 20×20 子区域向各类的鉴别矢量做投影, 比较该投影到各个类别投影中心的距离, 选取距离最小的类别作为该子区域所属的类别, 如果距离的最小类别为人脸类, 则判断该子区域为人脸, 否则为非人脸. 图 1 为算法流程图.

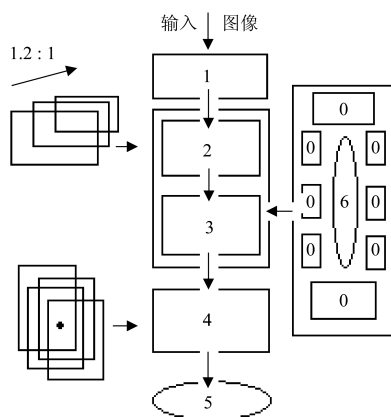


图 1 人脸检测流程图

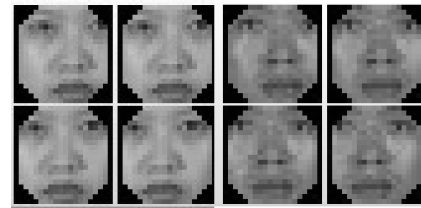
Fig. 1 Flow chart of face detection

0 非人脸样本集, 1 基于四元数的全彩色均衡化处理, 2 多尺度缩放处理, 比例为 1.2:1, 3 逐级逐位匹配 + Fisher 判别, 4 多尺度多位置的融合处理, 5 结果输出, 6 彩色人脸样本集

本文人脸样本训练集由 200 张标准身份证照片经过缩小、旋转 ($\pm 3^\circ$ 、 $\pm 5^\circ$)、镜向以及提取小波变换低频分量等手段获取, 共 3600 张图像. 非人脸样本则来源于各种风景图片、人物部分脸等, 共 20860 张, 其中部分样本示例如图 2 所示. 以欧氏距离作为测度, 采用 K 均值聚类法将非人脸样本分为 8 个不同的类别, 其数量分别为 3839、919、909、2885、2768、4672、1811、3179 (关于四元数的距离度量参见文献 [7]).

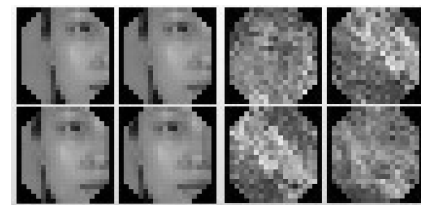
本文鉴别矢量的抽取以如下两种方式进行: 1) 首先抽取人脸样本集与每类非人脸样本集之间的最佳鉴别矢量. 在作检测的时候, 按不同尺度不同位置, 将输入图像从下到上, 从左到右依次以 20×20 的子图像区域进行扫描判断, 寻找最好的匹配, 判断是否为人脸; 2) 按 3.2.2 节的方法抽取 Foley-Sammon

鉴别矢量集, 按照距离测度判别待检测子图像属于哪一个类别. 本文详细比较了以上两种投影矢量的抽取方法对检测结果的影响, 目的在于寻找好的判别方法以便获得好的检测效果.



(a) 标准人脸样本

(a) Standard face samples



(b) 标准非人脸样本

(b) Standard non-face samples

图 2 人脸检测训练集例图

Fig. 2 Sample images of face training set

4.3 实验结果及其分析

本文使用大量的彩色图像对上述方法进行测试, 根据被测试图片背景的复杂程度我们将其分为两大类: 1) 简单背景, 其中包括来源于 Internet 的图片以及使用数码相机拍摄的照片, 网络照片中共有 163 张人脸, 而数码相机拍摄的照片中共有 56 张人脸; 2) 复杂背景, 同样包含上述两类图片, 其中网络照片包含 94 张人脸, 而数码相机拍摄的照片包含 48 张人脸. 本文实验中选取的图片要求光照变化不大并且全为亚洲人脸 (即肤色为黄色), 其原因在于本文是以亚洲黄色人种的标准正面照片作为训练集. 另外, 为了能够检测包含各种族人脸的图片, 只需要在构成训练集的时候尽量包含足够的其它种族的人脸样本即可. 因此, 本文算法具有广泛的应用背景.

表 1 (见下页) 给出本文算法对所选取测试图像检测结果的数据统计, 图 3 (见下页) 给出了实验过程中部分测试图像的检测结果. 由于人脸样本训练集是由正面人脸经过左右旋转、镜向以及提取小波变换低频分量等方式获取的, 并没有做任何深度方向的旋转处理, 所以无法检测图片中带有深度方向旋转的人脸, 如图 3 (d) 中的从左边开始的第 2 个人脸, 本文目前的算法则无法检测出来, 但是这并不是算法本身的原因, 而是由于样本库不完善造成的. 从

表 1 实验结果统计
Table 1 Results of experiment

Test set		Correct detect		Missed faces		False alarms		Correct rate (%)	
		①	②	①	②	①	②	①	②
Simple background	Digital picture	53	55	3	1	0	0	94	98
	Internet picture	159	161	4	2	0	0	97	98
Complex background	Digital picture	39	43	9	5	6	2	81	89
	Internet picture	74	81	20	13	19	12	78	86

表中：①表示采用最佳鉴别矢量的检测结果；②表示采用 6 个鉴别矢量的检测结果

① Detection results using optimal discriminant vector; ② Detection results using six discriminant vectors

表 1 的数据统计可以知道, 采用多个鉴别矢量进行检测的结果要好于使用单个最优鉴别矢量的检测结果, 简单背景图片的检测效果要好于复杂背景图片的检测效果; 同时, 在简单背景图片中, 算法对数码相机拍摄的照片的检测效果要差于对网络照片的检测效果, 究竟是什么原因造成这种情况, 目前作者还无从所知, 简单的猜测可能与本文选用相机的质量有关, 关于这一点仍需要实验验证才能确定。

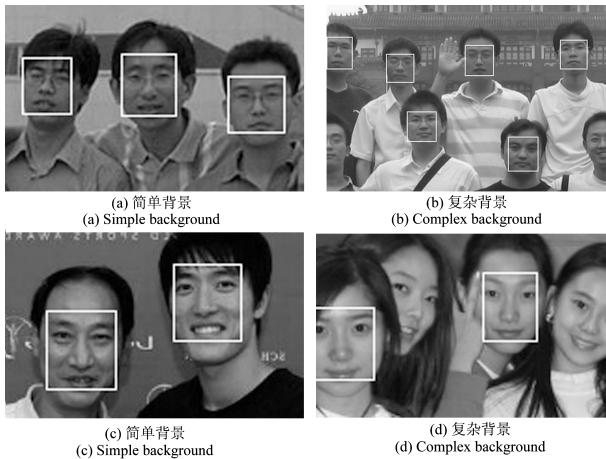


图 3 数码照片及网络照片检测结果

Fig.3 Detection results of digital pictures and internet pictures

5 结论

利用四元数及其矩阵的相关知识, 本文将实数域中的广义 Rayleigh 商合理推广到四元数体, 并以此为基础得到四元数体的 Fisher 鉴别分析法, 从而提出一种新的图像信息融合技术, 并在模式识别领域采用该策略, 得到一种新颖的彩色人脸检测算法, 从数学上融合彩色像素的 R、G、B 三分量, 然后再进行特征提取. 实验结果表明, 本文关于四元数体的各种推广结论合理并且实用, 提出的新的人脸检测算法符合实际应用要求, 为新的人脸检测算法的寻

找提供了另一种思路。

本文今后的工作重点为: 1) 当抽取 Fisher 最佳鉴别矢量的时候, 其中有关于四元数矩阵求逆的步骤, 由于没有现成的程序可以利用, 因此本文使用 VC++ 编程计算, 但计算量较大, 并且不能保证计算精度, 作者正尝试的办法是将四元数矩阵求逆问题转化为复数矩阵的求逆, 以求加快计算速度, 提高计算精度; 2) 判别分析的时候, 本文采用欧氏距离, 但由于欧氏距离固有的弱点, 所以宜于寻求新的距离测度; 3) 人脸检测中关于非人脸的选择一直是该问题的难点, 本文的彩色人脸检测由于比灰度人脸检测中的样本多出了彩色成分, 所以如何选取好的非人脸样本也是本文以后工作的一个重点; 4) 如果用本文的方法进行特征融合, 应该注意的问题是如何从统计学意义上解释清楚各个分量以及组合量的物理含义; 5) 如果能够很好的解释其物理含义, 又能否进一步从理论上证明该方法较传统方法的优越性。

References

- Abidi M A, Gonzalez R C. *Data Fusion*. San Diego: Academic Press, 1992
- Chen Wu-Fan. *Wavelet Analysis and Its Application in Image Processing*. Beijing: Science Press, 2002
(陈武凡. 小波分析及其在图像处理中的作用. 北京: 科学出版社, 2002)
- Cheng J L, Wechsler H. A shape- and texture-based enhanced Fisher classifier for face recognition. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(4): 598~608
- Richard O D, Hart P E, Stork D G. *Pattern Classification (Second Edition)*. USA: John Wiley & Sons, 2000
- Bian Zhao-Qi, Zhang Xue-Gong. *Pattern Recognition (Second Edition)*. Beijing: Tsinghua Press, 2002
(边肇祺, 张学工. 模式识别 (第二版). 北京: 清华大学出版社, 2002)
- Yang Jian, Yang Jing-Yu, Wang Zheng-Qun, Guo Li. A new method of combinational feature extraction. *Chinese Jour-*

nal of Computers, 2002, (6): 570~575

(杨健, 杨静宇, 王正群, 郭丽. 一种组合特征抽取的新方法. 计算机学报, 2002, (6): 570-575)

7 Li Wen-Liang. *Quaternion Matrix*. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2002. 96~100

(李文亮. 四元数矩阵. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002. 96~100)



郎方年 四川大学博士研究生. 主要研究方向为数字图像处理、生物特征识别以及人工智能.

E-mail: fnlang@163.com

(**LANG Fang-Nian** Ph.D. candidate at Sichuan University. His research interest covers digital image processing, biology feature recognition, and artificial intelligence.)

processing, biology feature recognition, and artificial intelligence.)



周激流 四川大学教授. 主要研究方向为图象处理与模式识别、计算智能、分数阶微积运算理论及其在信号信息处理中的应用. 本文通信作者.

E-mail: zhoujl@scu.edu.cn

(**ZHOU Ji-Liu** Professor at Sichuan University. His research interest covers image manipulation, pattern recognition, artificial intelligence and the theorem of fractional calculus and its application in signal processing. Corresponding author of this paper.)

image manipulation, pattern recognition, artificial intelligence and the theorem of fractional calculus and its application in signal processing. Corresponding author of this paper.)



钟钊 四川大学硕士研究生. 主要研究方向为数字图像处理、生物特征识别以及人工智能.

(**ZHONG Fan** Master student at Sichuan University. His research interest covers digital image processing, biology feature recognition, and artificial intelligence.)

intelligence.)



宋恩彬 四川大学博士研究生. 主要研究方向为数据融合、矩阵理论及其应用、不确定性数学理论及应用.

E-mail: e.b.song@163.com

(**SONG En-Bin** Ph.D. candidate at Sichuan University. His research interest covers information fusion, matrix theory and its application, uncertainly math theory and its application.)

theory and its application, uncertainly math theory and its application.)



闫斌 电子科技大学博士研究生. 主要研究方向为数据融合、无线传感器网络.

E-mail: uestyan@163.com

(**YAN Bin** Ph.D. candidate at Electronic University of Science and Technology. His research interest covers data fusion and wireless sensor networks.)

data fusion and wireless sensor networks.)