

数字图像的分数阶微分掩模及其数值运算规则

蒲亦非¹ 王卫星¹

摘要 研究目的是提出并论述数字图像的分数阶微分掩模及其数值运算规则. 首先, 从信号处理角度论述了数字图像分数阶微分掩模的特性. 其次, 详细论述了在 x 轴负、 x 轴正、 y 轴负、 y 轴正、左下对角线、左上对角线、右下对角线、右上对角线 8 个相互中心对称的数字图像 $n \times n$ 分数阶微分掩模的构造. 最后, 论述了数字图像分数阶微分掩模的数值运算规则. 计算机数值实验结果表明, 对于纹理细节信息丰富的图像信号而言, 分数阶微分对灰度变化不大的平滑区域中的纹理细节信息的提取效果明显优于整数阶微分运算.

关键词 分数阶微积分, 分数阶偏微分, 分数阶梯度向量, 模板卷积, 纹理细节特征
中图分类号 TN911.73; TB112

Fractional Differential Masks of Digital Image and Their Numerical Implementation Algorithms

PU Yi-Fei¹ WANG Wei-Xing¹

Abstract We mainly discuss the fractional differential masks of digital image and their numerical implementation algorithms. Firstly, we discuss the characteristics of the fractional differential masks from a signal processing point of view. Secondly, we discuss in detail the structures and parameters of eight $n \times n$ fractional differential masks on negative x -axis, positive x -axis, negative y -axis, positive y -axis, left downward diagonal, left upward diagonal, right downward diagonal, and right upward diagonal, respectively, which are centro-symmetric interdependently. Lastly, we discuss the numerical implementation algorithms of the fractional differential masks for digital image. Numerical experiments show that the textural details enhance capabilities of the fractional differential-based texture operator are better than those of the integral differential based one for rich-grained digital images.

Key words Fractional calculus, partial fractional differential, fractional gradient vector, template convolution, texture characteristics

1 问题提出

分数阶微积分是数学分析的一个重要分支, 但对于大多数工程技术界学者而言, 它还鲜为人知. 如何将分数阶微积分应用于现代信号分析与处理, 特别是数字图像处理之中, 在国际上还是一个研究甚少的新兴学科分支^[1~10]. 历史上不少著名的数学方法在其刚被引入到现代信号处理这一领域之时, 并不为人们所重视, 许多学者对其只是秉持一种观望甚至怀疑的态度. 人们对一种崭新数学方法的研究热情往往是由一两个比较理想的应用突破来激发的.

众所周知, 图像信号中高度自相似的分形信息通常是以复杂的纹理细节信息表现的^[11], 而分数阶微积分是分形学说的数学基础之一^[11, 12]. 于是很自然地想到, 能否利用分数阶微分处理来增强二维图

像信号中具有分形特征的复杂纹理细节特征呢? 基于此, 本文的工作致力于将分数阶微积分这一崭新的数学方法引入到数字图像处理之中, 从而构造一种崭新的数字图像纹理细节特征增强掩模(算子).

2 分数阶微分掩模及其数值运算规则

2.1 数字图像分数阶微分掩模的特性

$\forall \nu \in \mathbf{R}$ (包括分数, 可推广到复数), 令其整数部分为 $[\nu]$, 若信号 $s(t) \in [a, t] (a < t, a \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R})$ 存在 $m+1 (m \in \mathbf{Z}, \mathbf{Z}$ 表示整数) 阶连续导数; 当 $\nu > 0$ 时, m 至少取 $[\nu]$, 则分数阶 (ν 阶) 导数的 Gr \ddot{u} mwald-Letnikov 定义为^[12]:

$${}_a^G D_t^\nu s(t) = \lim_{h \rightarrow 0} s_h^{(\nu)}(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\nu} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} -\nu \\ r \end{bmatrix} s(t-rh) \quad (1)$$

其中 $\begin{bmatrix} -\nu \\ r \end{bmatrix} = \frac{(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+r-1)}{r!}$. 为使 $s_h^{(-\nu)}(t)$ 达到非零极限, 须当 $h \rightarrow 0$ 时, $n \rightarrow \infty$,

收稿日期 2006-9-4 收修改稿日期 2007-5-23
Received September 4, 2006; in revised form May 23, 2007
中国博士后科学基金(20060401016), 法中科学与应用基金(FFCSA)资助
Supported by Postdoctoral Science Foundation of China (20060401016), Sino-France Foundation for Appliance Science
1. 电子科技大学电子工程学院 成都 610054
1. School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054
DOI: 10.1360/aas-007-1128

故令 $h = \frac{t-a}{n}$, 于是 $n = \left\lceil \frac{t-a}{h} \right\rceil$.

对于任意平方可积的能量型信号 $s(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 可以推导, 其 ν 阶分数阶微分的 Fourier 变换为^[4]

$$D^\nu s(t) = D_\nu s(t) = \frac{d^\nu s(t)}{dt^\nu}$$

$$\Downarrow \text{Fourier 变换} \quad \nu \in \mathbf{R}^+$$

$$(\widehat{D_\nu s})(\omega) = (i\omega)^\nu \cdot \widehat{s}(\omega) = d_\nu(\omega) \widehat{s}(\omega) \tag{2}$$

其中, ν 阶微分算子 $D_\nu = D^\nu$ 是 ν 阶微分乘子函数的乘性算子, 其分数阶微分的滤波函数为

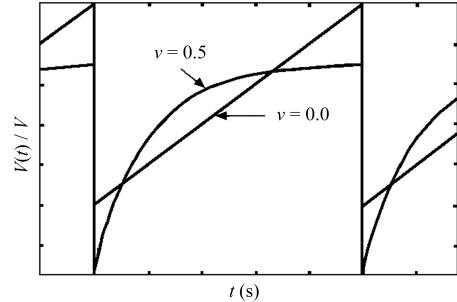
$$\begin{cases} d(\omega) = (i\omega)^\nu = a_\nu(\omega) \cdot \exp(i\theta_\nu(\omega)) = \\ \quad a_\nu(\omega) \cdot p_\nu(\omega) \\ a_\nu(\omega) = |\omega|^\nu \\ \theta_\nu(\omega) = \frac{\nu\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \end{cases} \tag{3}$$

由式 (3) 知^[5~10], 特别地, 当 $0 < \nu < 1$ 时, 在 $\omega > 1$ 段, 分数阶微分对于信号高频成份的加强幅度没有一阶微分大. 因此, 在 $\omega > 1$ 段, 图像信号的分数阶微分没有一阶微分或二阶微分对于图像高频边缘成份的加强幅度大. 但在 $0 < \omega < 1$ 甚低频段, 分数阶微分不象一阶微分那样对信号的甚低频成份进行大幅的线性衰减, 而是进行一种非线性衰减, 其幅度衰减没有一阶微分那么大. 在 $0 < \omega < 1$ 甚低频段, 随着微分阶次 ν 的减小, 分数阶微分对信号的甚低频成份的衰减幅度减小. 当 $\nu \rightarrow 0$ 时, 则不进行任何衰减. 所以, 对于图像灰度变化不大的平滑区域, 若采用诸如 Sobel 算子 (基于一阶微分) 和 Gauss-Laplace 算子 (基于二阶微分) 的去处理, 那么其中灰度变化不大的纹理细节信息必然会遭到大幅的线性衰减, 其结果约等于零. 可见, 基于整数阶微分的传统图像边缘强化算子不能很好地检测出平滑区域中的纹理细节信息. 与此相反, 经过二维分数阶微分处理后, 图像平滑区域中灰度变化不大的纹理细节信息并没有遭到大幅的线性衰减, 反而在一定程度上进行了非线性保留. 所以对图像信号作二维分数阶微分比作二维整数阶微分更有利于强化和提取图像平滑区域中的纹理细节信息.

不失一般性, 以锯齿波和方波信号的 $\nu = 0.5$ 阶微分的数值实现^[2, 6~8] 结果为例对图像分数阶微分掩模特性进行研究.

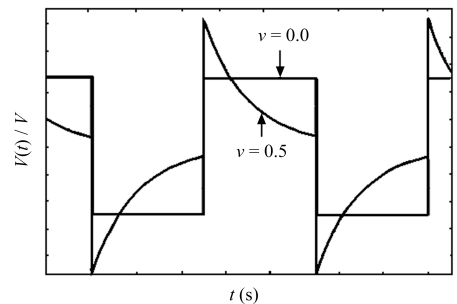
由图 1 可知^[1~3, 5], 信号的各种分数阶微分定义都应该满足如下三个性质: 1) 在平坦段 (图像灰度值不变的区域) 的分数阶微分值是由对应奇异跳变处的极大值渐趋于零 (Riemann-Liouville 定义除外), 而平坦段的任意整数阶微分必为零, 这是分数

阶微分相对于整数阶微分的显著区别之一; 2) 在灰度阶梯或斜坡的起始点处的分数阶微分值非零, 起到了加强高频信息的作用; 3) 沿斜坡的分数阶微分值非零, 亦非常数, 而沿斜坡的整数阶微分值为常数.



(a) 锯齿波信号的 $\nu = 0.5$ 阶微分

(a) $\nu = 0.5$ order fractional differential of saw-tooth wave



(b) 方波信号的 $\nu = 0.5$ 阶微分

(b) $\nu = 0.5$ order fractional differential of rectangle wave

图 1 信号分数阶微分的特性

Fig. 1 The characteristics of signal's fractional differential

2.2 数字图像分数阶微分掩模的构造

根据式 (1), 若一元信号 $s(t)$ 的持续期为 $t \in [a, t]$, 将信号持续期 $[a, t]$ 按单位等分间隔 $h = 1$ 进行等分, 所以 $n = \left\lceil \frac{t-a}{h} \right\rceil \triangleq [t-a]$. 可以推导出一元信号 $s(t)$ 分数阶微分的差值表达为^[1, 3]

$$\frac{d^\nu s(t)}{dt^\nu} \approx s(t) + (-\nu)s(t-1) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)}{2} s(t-2) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)(-\nu+2)}{6} s(t-3) + \dots + \frac{\Gamma(-\nu+1)}{n! \Gamma(-\nu+n+1)} s(t-n) \tag{4}$$

由于计算机或数字滤波器处理的是数字量, 其值有限; 图像信号灰度的最大变化量是有限的; 数字图像灰度变化发生的最短距离是在两相邻像素之间, 因此二维数字图像在 x 和 y 轴方向上的持续时间 (图像矩阵的规模) 只可能以像素

为单位进行度量, $s(x, y)$ 的最小等分间隔只能是 $h = 1$. 若二维数字图像信号中 x 和 y 的持续期分别为 $x \in [x_1, x_2]$ 和 $y \in [y_1, y_2]$, 则最大等分分数分别为 $n_x = \left[\frac{x_2 - x_1}{h} \right] \stackrel{h=1}{=} [x_2 - x_1]$ 和 $n_y = \left[\frac{y_2 - y_1}{h} \right] \stackrel{h=1}{=} [y_2 - y_1]$. 对于数字图像而言, 即使分数阶微分掩模的尺度大到等于数字图像本身的尺度 ($N = \min(n_x, n_y)$), 也只能是对其分数阶微分解析值的最大逼近, 而永远不可能等于其分数阶微分的解析值. 本文的目的是构造 $n \times n$ ($n \leq N$) 的数字图像分数阶微分掩模. 针对数字图像, 本文定义 $s(x, y)$ 在 x 和 y 坐标轴负方向上分数阶偏微分的后向差分近似表达式分别为^[3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^v s(x, y)}{\partial x^v} &\approx s(x, y) + (-v)s(x-1, y) + \\ &\frac{(-v)(-v+1)}{2}s(x-2, y) + \\ &\frac{(-v)(-v+1)(-v+2)}{6}s(x-3, y) + \cdots + \\ &\frac{\Gamma(-v+1)}{n!\Gamma(-v+n+1)}s(x-n, y) + \cdots \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^v s(x, y)}{\partial y^v} &\approx s(x, y) + (-v)s(x, y-1) + \\ &\frac{(-v)(-v+1)}{2}s(x, y-2) + \\ &\frac{(-v)(-v+1)(-v+2)}{6}s(x, y-3) + \cdots + \\ &\frac{\Gamma(-v+1)}{n!\Gamma(-v+n+1)}s(x, y-n) + \cdots \end{aligned} \quad (6)$$

在上述两个后向差分近似表达式中选取的前 n 项和分别作为 $s(x, y)$ 在 x 和 y 坐标轴负方向上分数阶偏微分的近似值

$$\begin{aligned} \frac{\partial^v s(x, y)}{\partial x^v} &\approx s(x, y) + (-v)s(x-1, y) + \\ &\frac{(-v)(-v+1)}{2}s(x-2, y) + \\ &\frac{(-v)(-v+1)(-v+2)}{6}s(x-3, y) + \cdots + \\ &\frac{\Gamma(-v+1)}{(n-1)!\Gamma(-v+n)}s(x-n+1, y) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^v s(x, y)}{\partial y^v} &\approx s(x, y) + (-v)s(x, y-1) + \\ &\frac{(-v)(-v+1)}{2}s(x, y-2) + \\ &\frac{(-v)(-v+1)(-v+2)}{6}s(x, y-3) + \cdots + \\ &\frac{\Gamma(-v+1)}{(n-1)!\Gamma(-v+n)}s(x, y-n+1) \end{aligned} \quad (8)$$

可见, $s(x, y)$ 在 x 和 y 坐标轴负方向上分数阶偏微分的近似值 (n 项和) 中的每一对应求和项的系数值都是相同的. 这 n 个非零系数值中只有首项求和项的系数值是常数“1”, 其他 $n-1$ 个非零系数值都是分数阶微分阶次的函数. 这 n 个非零系数值按顺序分别是: $1, -v, \frac{(-v)(-v+1)}{2}, \frac{(-v)(-v+1)(-v+2)}{6}, \dots, \frac{\Gamma(-v+1)}{(n-1)!\Gamma(-v+n)}$. 可以证明这 n 个非零系数值之和不等于零, 这是图像分数阶微分与图像整数阶微分在特性上的显著区别之一.

在 x 坐标轴负方向上的相对逼近误差为

$$\varepsilon_{s_x^-}^{(v)}(x, y) = \frac{\Gamma(-v+1)}{n!\Gamma(-v+n+1)}s(x-n, y) + \cdots + \frac{\Gamma(-v+1)}{(N-1)!\Gamma(-v+N)}s(x-N+1, y) \quad (9)$$

在 y 坐标轴负方向上的相对逼近误差为

$$\varepsilon_{s_y^-}^{(v)}(x, y) = \frac{\Gamma(-v+1)}{n!\Gamma(-v+n+1)}s(x, y-n) + \cdots + \frac{\Gamma(-v+1)}{(N-1)!\Gamma(-v+N)}s(x, y-N+1) \quad (10)$$

式 (9) 和 (10) 中的相对逼近误差不是相对于图像分数阶微分的解析解, 而是相对于分数阶微分掩模的尺度大小等于二维数字图像的尺度时的数值解 (对于其解析解的最佳逼近).

在图像像素点 (x, y) 上的分数阶梯度 (分数阶导数) 是通过一个二维列向量定义的

$$\nabla^v s = \begin{bmatrix} G_x^v \\ G_y^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^v s}{\partial x^v} \\ \frac{\partial^v s}{\partial y^v} \end{bmatrix} \quad (11)$$

定义分数阶梯度向量的模值为

$$\text{mag}(\nabla^v s) = [(G_x^v)^2 + (G_y^v)^2]^{1/2} \quad (12)$$

尽管分数阶梯度本身是个线性算子, 由于用到了平方和开方, 所以分数阶梯度向量的模值显然不是线性的. 另外, 式 (11) 中定义的分数阶梯度向量不是旋转不变的 (各向同性), 但是分数阶梯度向量的模值却是各向同性的. 在实际操作中, 本文用绝对值来代替平方根运算, 近似求分数阶梯度的模值.

$$\text{mag}(\nabla^v s) = |G_x^v| + |G_y^v| \quad (13)$$

这样既简单又保持了灰度的相对变化, 但是各向同性的特性一般就不存在了. 由式 (7) 和 (8), 在 $n \times n$ 全零方阵 (为了使分数阶掩模有明确的

中心点, n 取奇数, 令 $n = 2b + 1, b = 1, 2, \dots$) 分别沿 x 和 y 坐标轴负方向的中心对称轴上, 用 $1, -v, \frac{(-v)(-v+1)}{2}, \frac{(-v)(-v+1)(-v+2)}{6}, \dots, \frac{\Gamma(-v+1)}{(n-1)\Gamma(-v+n)}$ 这 n 个非零系数值顺序置换掉 $n \times n$ 全零方阵中相应位置上的零值, 从而分别构造出 x 轴负方向上和 y 轴负方向上的分数阶微分掩模 (分别用 W_x^- 和 W_y^- 表示) 如图 2 所示^[3].

显然, 用图 2 中定义的分数阶微分掩模处理数字图像具有 π 角旋转的各向同性结果. 另外, 由于图像的相邻像素点之间具有很强的相关性, 为了使图

像 $s(x, y)$ 分别完成在 8 个中心对称方向上的分数阶微分运算, 达到增强算法的抗旋转性能, 与 W_x^- 和 W_y^- 的构造原理和方法类似, 本文还分别定义了 x 轴正方向上的分数阶微分掩模 (用 W_x^+ 表示), y 轴正方向上的分数阶微分掩模 (用 W_y^+ 表示), 分数阶微分掩模左下对角线方向上的分数阶微分掩模 (用 W_{LDD} 表示), 分数阶微分掩模右上对角线方向上的分数阶微分掩模 (用 W_{RUD} 表示), 分数阶微分掩模左上对角线方向上的分数阶微分掩模 (用 W_{LUD} 表示), 分数阶微分掩模右下对角线方向上的分数阶微分掩模 (用 W_{RDD} 表示) 如图 3 所示^[3].

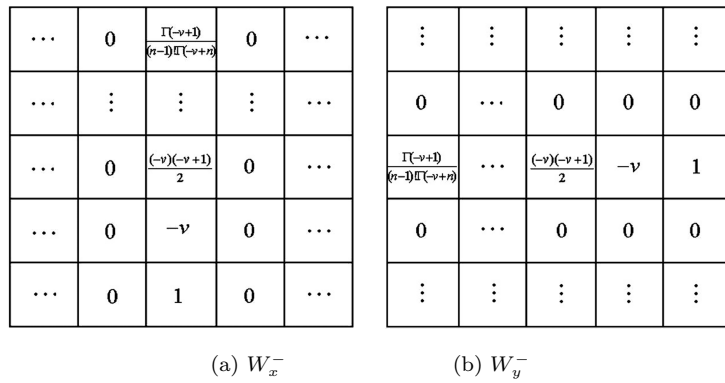


图 2 x, y 轴负方向上的分数阶微分掩模

Fig. 2 Fractional differential masks on negative x -axis and negative y -axis

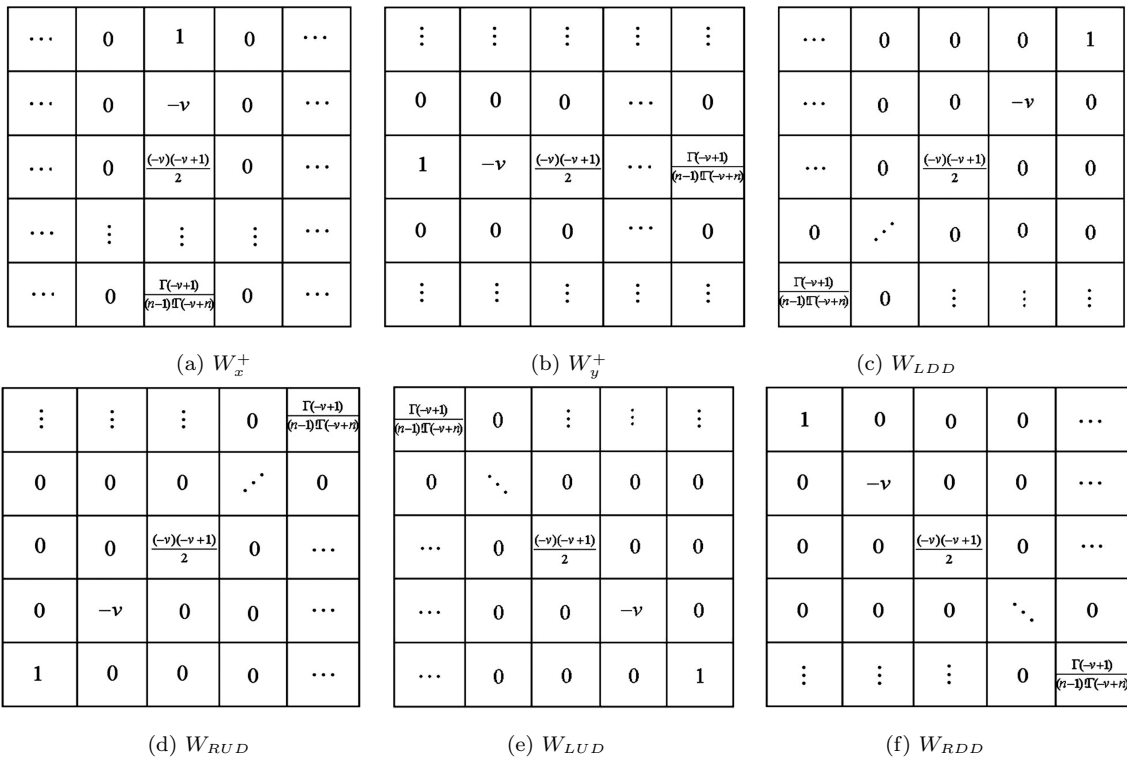


图 3 在 x 轴正、 y 轴正、左下对角线、左上对角线、右下对角线、右上对角线方向上的分数阶微分掩模

Fig. 3 Fractional differential masks on positive x -axis, positive y -axis, left downward diagonal, left upward diagonal, right downward diagonal, and right upward diagonal, respectively

2.3 数字图像分数阶微分掩模的数值运算规则

计算机数字图像处理是以对图像的离散像素直接处理为基础的. 分数阶微分掩模的数值运算规则是采用分数阶微分掩模卷积的方案来实现数字图像分数阶微分的空域滤波. 这种空间滤波的机理就是在待处理的数字图像中逐点移动掩模(算子、模板). 针对数字灰度图像和数字彩色图像的性质不同, 分数阶微分掩模的数值运算规则分为以下两种.

1) 分数阶微分掩模针对数字灰度图像的数值运算规则. 分数阶微分掩模在 x 轴负方向上的数值运算规则如图 4 所示^[3].

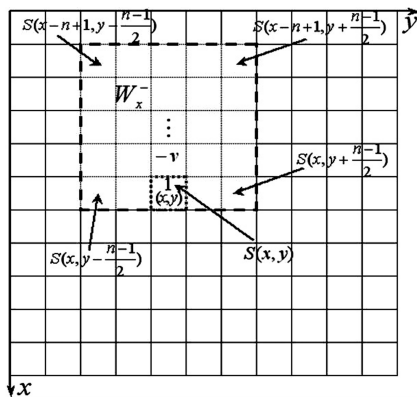


图 4 分数阶微分掩模在 x 轴负方向上的数值运算规则

Fig. 4 Numerical algorithm of fractional differential mask on negative x -axis

分数阶微分掩模在其他 6 个方向上的数值运算规则与在 x 轴负方向上的数值运算规则类似. 分数阶微分掩模针对数字灰度图像的数值运算规则的步骤是: a) 8 个方向上的分数阶微分掩模 ($W_x^-, W_x^+, W_y^-, W_y^+, W_{LDD}, W_{RUD}, W_{LUD}$ 和 W_{RDD}) 中的唯一常系数值“1”所在的坐标 (x, y) 和待进行分数阶微分的像素 $s(x, y)$ 的坐标位置 (x, y) 必须保持重合; b) 将这 8 个方向上的分数阶微分掩模上的系数值分别与输入的对应该像素的灰度值相乘, 然后将各自的所有乘积项相加(即加权求和), 分别得到在这 8 个方向上的加权求和值; c) 由于数字图像的灰度值在 $0 \sim 255$ 之间, 所以需要在这 8 个方向上的加权求和值分别进行限幅(当加权求和值小于 0 时, 取 0; 当加权求和值大于 255 时, 取 255); d) 将这 8 个方向上限幅后的加权求和值的各自模值分别作为分数阶微分掩模在这 8 个方向上的处理结果(即像素 $s(x, y)$ 在这 8 个方向上的 v 阶分数阶偏微分的近似值); e) 为得到一幅完整的经过分数阶微分滤波处理的图像, 在待进行分数阶微分的数字图像中逐像素平移上述 8 个方向上的分数阶微分掩模, 分别不断重复上述第 a)~d) 步的数值运算规则, 遍历整幅待进行分数阶微分的数字图像, 便可计算出

整幅数字图像在这 8 个方向上的 v 阶分数阶偏微分的近似值. 另外, 在逐像素平移时, 为了不使分数阶微分掩模的行或列位于待进行分数阶微分的数字图像平面之外, 须使分数阶微分掩模的中心点距待进行分数阶微分的数字图像边缘像素的距离不小于 $(n-1)/2$ 个像素, 即不对距待进行分数阶微分的数字图像边缘 $n-1$ 行或列的像素进行分数阶微分.

在 $n_x \times n_y$ 的数字图像中, 用分数阶微分掩模进行滤波, $W_x^-, W_x^+, W_y^-, W_y^+, W_{LDD}, W_{RUD}, W_{LUD}$ 和 W_{RDD} 的卷积数值运算规则分别是

$$S_{x^-}^{(v)}(x, y) = \sum_{z=-2b}^0 \sum_{k=-b}^b W_x^-(z, k) S(x+z, y+k) \quad (14)$$

$$S_{x^+}^{(v)}(x, y) = \sum_{z=0}^{2b} \sum_{k=-b}^b W_x^+(z, k) S(x+z, y+k) \quad (15)$$

$$S_{y^-}^{(v)}(x, y) = \sum_{z=-b}^b \sum_{k=-2b}^0 W_y^-(z, k) S(x+z, y+k) \quad (16)$$

$$S_{y^+}^{(v)}(x, y) = \sum_{z=-b}^b \sum_{k=0}^{2b} W_y^+(z, k) S(x+z, y+k) \quad (17)$$

$$S_{LDD}^{(v)}(x, y) = \sum_{z=0}^{2b} \sum_{k=-2b}^0 W_{LDD}(z, k) S(x+z, y+k) \quad (18)$$

$$S_{RUD}^{(v)}(x, y) = \sum_{z=-2b}^0 \sum_{k=0}^{2b} W_{RUD}(z, k) S(x+z, y+k) \quad (19)$$

$$S_{LUD}^{(v)}(x, y) = \sum_{z=-2b}^0 \sum_{k=-2b}^0 W_{LUD}(z, k) S(x+z, y+k) \quad (20)$$

$$S_{RDD}^{(v)}(x, y) = \sum_{z=0}^{2b} \sum_{k=0}^{2b} W_{RDD}(z, k) S(x+z, y+k) \quad (21)$$

2) 分数阶微分掩模针对数字彩色图像的数值运算规则. 分数阶微分掩模针对数字彩色图像的数值运算规则与其针对数字灰度图像的数值运算规则基本相同. 不同之处在于各像素 $s(x, y)$ 的 R, G, B 三个分量值分别都要历经与分数阶微分掩模针对数字灰度图像完全相同的数值运算规则, 从而分别得到像素 $s(x, y)$ 的 R, G, B 三个分量值在上述 8 个方向上的 v 阶分数阶偏微分的近似值. 换句话说, 用以处理数字彩色图像时的分数阶微分掩模卷积运算量相当于 3 个并行计算的用以处理数字灰度图像时

的分数阶微分掩模卷积运算量之和. 由于 R, G, B 各分量之间存在相关性, 同时由于其灰度值限制在 $0 \sim 255$ 之间, 因此, 当数字图像分数阶微分的阶次 $v \in [0, 1]$ 的取值较小或较大时, 对数字图像 R, G, B 各分量进行非线性加强后, 可能严重破坏其相关性, 叠加得到的 RGB 彩色图像就可能失真. 因此, 对数字彩色图像而言, 在 YCrCb 和 HSV 色彩空间中进行分数阶微分不失是一种更好的选择^[1, 3, 5].

综上所述, 本文提出的所有分数阶微分掩模中的系数总和不为零, 这表明在图像灰度值恒定或变化不大的区域内的响应不为零. 这恰好是分数阶微分掩模为增强图像纹理细节信息所期望得到的性质. 另外, 虽然上述 8 个分数阶微分掩模各自不是中心对称的, 但这 8 个分数阶微分掩模却是相互中心对称的.

3 实验仿真及结果分析

本实验同时使用 $W_x^-, W_x^+, W_y^-, W_y^+, W_{LDD}, W_{RUD}, W_{LUD}$ 和 W_{RDD} 8 个方向上的 3×3 分数阶微分掩模算子分别对图像 $s(x, y)$ 进行分数阶微分. 为了运算简便, 比较 8 个方向上的运算结果, 将其中最大值作为像素 $s(x, y)$ 分数阶微分的灰度值. 对于 RGB 彩色图像的分数阶微分处理, 需要对其 R, G, B 分量分别进行分数阶微分, 然后再合成为 RGB 彩色图像. 对 32 位 RGB 彩色图像分别进行分数阶微分和整数阶微分对比实验结果如图 5 所示.

从人眼的角度定性分析可见, 进行分数阶微分后, 图像中那些具有复杂纹理细节信息的老虎皮毛的毛丝变得更加清晰, 雪地上的雪斑更加明显. 为了从定量的角度进行分析, 本文分别对其分数阶和整数阶微分前后的投影特征进行对比分析.

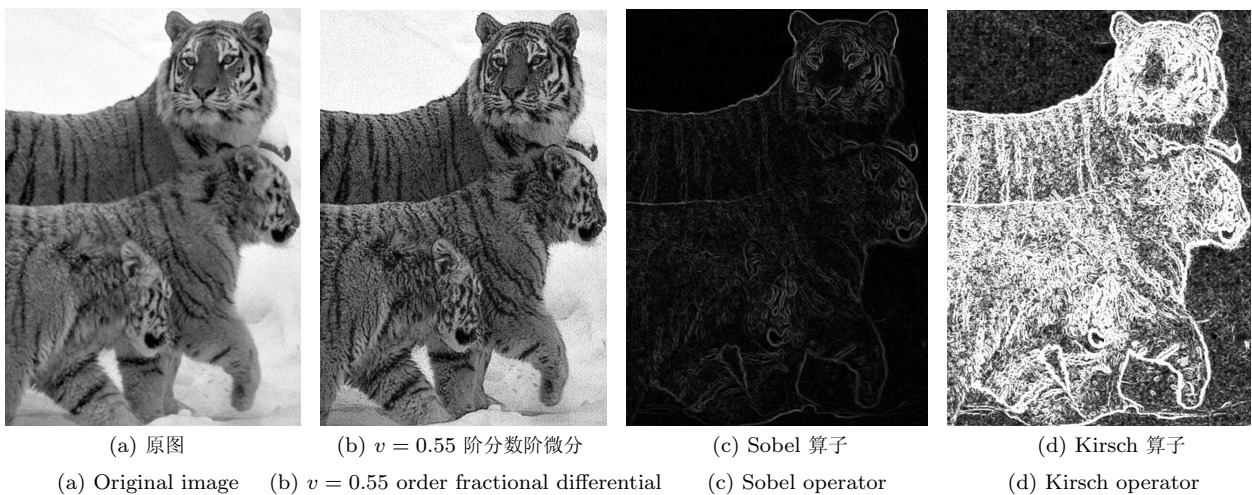


图 5 32 位 RGB 彩图分数阶与整数阶微分对比

Fig. 5 Contrast 32 bit RGB color images processed by fractional differential and integral differential

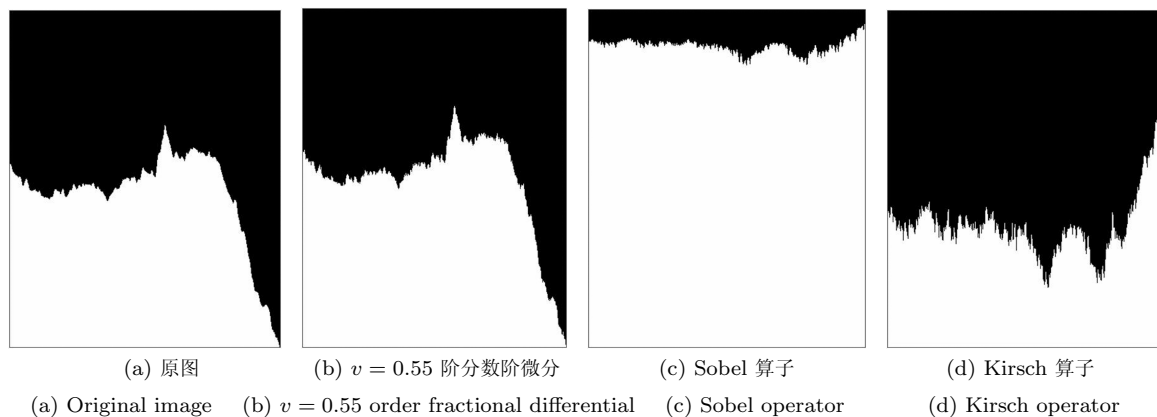


图 6 灰度垂直投影对比

Fig. 6 Contrasts of gray scale vertical projection

由图 6(见上页)和图 7 可知,首先,与图像整数阶微分算子相同,图像分数阶微分掩模也加强了原图中灰度值变化较大的高频边缘信息,但其加强幅度没有整数阶微分大,所以不会出现黑白分明的边缘.其次,与图像整数阶微分算子不同,图像分数阶微分在一定程度上保持了原图的灰度直方图分布的包络.所以,图像分数阶微分在一定程度上保持了原图的低频轮廓信息,而图像整数阶微分却不能.最后,不论图像分数阶微分还是整数阶微分都使原图的灰度投影增加了许多“毛刺”,但是,只有图像分数阶微分才是在原图灰度投影的包络上增加“毛刺”,而图像整数阶微分改变了原图对应灰度投影的包络.所以,图像分数阶微分能使原图平滑区域中

灰度相对变化不太剧烈的纹理细节信息得到非线性地加强,而图像整数阶微分对于它们微分的结果趋近于零.图像整数阶微分改变原图对应灰度投影的包络,从而改变了原图灰度直方图分布,使得处理后的结果要么灰度值很高,要么灰度值很低(即要么是白,要么就是黑),从而丢掉了大量的纹理细节信息.图像分数阶微分具有非线性加强纹理细节信息的能力.图像分数阶微分既能保持图像整体低频轮廓信息,又能加强图像中灰度变化幅度较大的高频边缘信息,同时还能加强图像中灰度变化幅度较小的高频纹理细节信息.

另外,本文还对卫星遥感图像进行了分数阶微分处理,实验结果如图 8 所示.

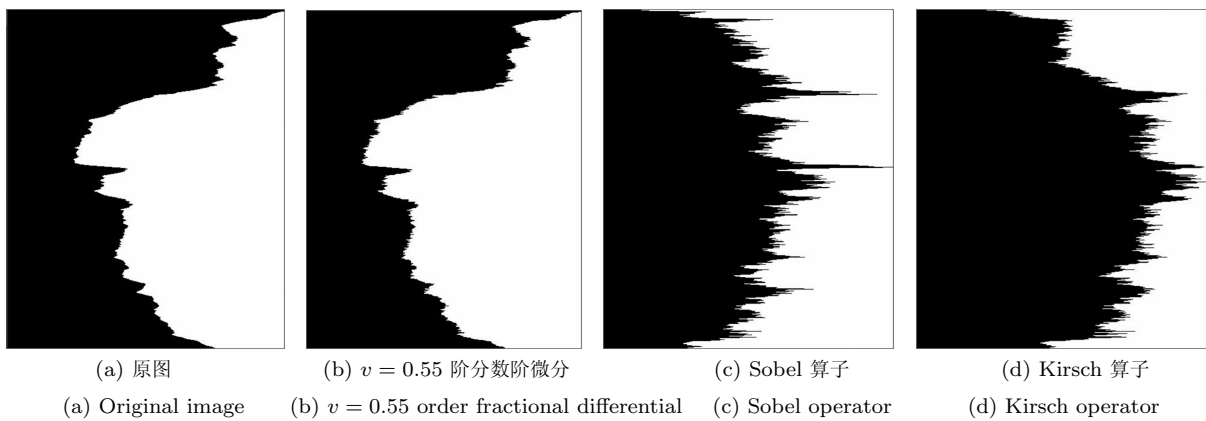
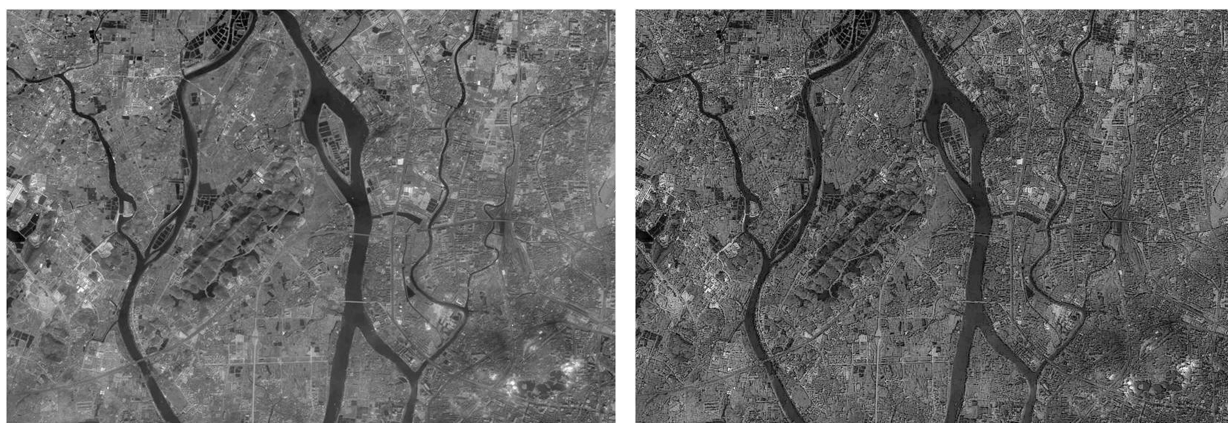


图 7 灰度水平投影对比

Fig. 7 Contrasts of gray scale horizontal projection



(a) Original satellite remote sensing image of Guangzhou city (b) Fractional differential of satellite remote sensing image of Guangzhou city

图 8 卫星遥感图像的分数阶微分

Fig. 8 Fractional differential of satellite remote sensing images

可见, 分数阶微分掩模既能尽量保留数字图像平滑区域中的低频轮廓特征, 同时又能非线性增强数字图像中灰度值跃变幅度相对较大的高频边缘特征, 而且还能非线性增强数字图像中灰度值跃变幅度和频率变化相对不大的高频纹理细节特征.

4 结论

将分数阶微积分应用于现代信号处理, 特别是数字图像处理之中, 在国际上还是一个研究甚少的新兴学科分支. 本文的工作致力于将一种崭新的数学方法(分数阶微积分)引入到数字图像处理之中, 从而在 8 个方向上构造出一种崭新的数字图像纹理细节特征增强掩模(算子), 并利用分数阶微分掩模来增强二维图像信号中的复杂纹理细节特征. 计算机数值实验结果表明, 对于纹理细节信息丰富的图像信号而言, 分数阶微分对灰度变化不大的平滑区域中的纹理细节信息的增强效果明显优于整数阶微分运算.

References

- 1 Pu Y F. Research on Application of Fractional Calculus to Latest Signal Analysis and Processing [Ph. D. dissertation], Sichuan University, 2006
- 2 Pu Yi-Fei, Yuan Xiao, Liao Ke, Chen Zhong-Lin, Zhou Ji-Liu. Five numerical algorithms of fractional calculus applied in modern signal analyzing and processing. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2005, **37**(5): 118~124
(蒲亦非, 袁晓, 廖科, 陈忠林, 周激流. 现代信号分析与处理中分数阶微积分的五种数值实现算法. 四川大学学报(工程科学版), 2005, **37**(5): 118~124)
- 3 Pu Yi-Fei. Fractional Differential Filter of Digital Image, China Patent 200610021702.3, 2006
(蒲亦非. 数字图像的分数阶微分滤波器, 中国, 专利号 200610021702.3, 2006)
- 4 Falconer K [Writer], Zeng Wen-Qu, Liu Shi-Yao [Translator]. *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications*. Liaoning: Northeast Industrial Press, 1991
(Falconer K [著], 曾文曲, 刘世耀 [译]. 分形几何—数学基础及其应用. 辽宁: 东北工业学院出版社, 1991)
- 5 Oldham K B, Spanier J. *The Fractional Calculus*. New York and London: Academic Press, 1974
- 6 Yuan Xiao, Chen Xiang-Dong, Li Qi-Liang, Zhang Shu-Ping, Jiang Ya-Dong, Yu Jue-Bang. Differential operator and the construction of wavelet. *Acta Electronica Sinica*, 2002, **30**(5): 769~773
(袁晓, 陈向东, 李齐良, 张蜀平, 蒋亚东, 虞厥邦. 微分算子与子波构造. 电子学报, 2002, **30**(5): 769~773)
- 7 Pu Y F. Fractional calculus approach to texture of digital image. In: Proceedings of 8th International Conference on Signal Processing. Beijing: IEEE, 2006. 1002~1006

- 8 Pu Y F, Yuan X, Liao K, Zhou J L, Zhang N, Zeng Y, Pu X X. Structuring analog fractance circuit for 1/2 order fractional calculus. In: Proceedings of 6th International Conference on ASIC. Shanghai: IEEE, 2005. 1039~1042
- 9 Pu Y F. Implement any fractional order multilayer dynamics associative neural network. In: Proceedings of 6th International Conference on ASIC. Shanghai: IEEE, 2005. 638~641
- 10 Pu Y F, Yuan X, Liao K, Zhou J L, Zhang N, Zeng Y. A recursive net-grid-type analog fractance circuit for any order fractional calculus. In: Proceedings of the International Conference on Mechatronics and Automation. Canada: IEEE, 2005. 1375~1380
- 11 Pu Yi-Fei, Yuan Xiao, Liao Ke, Zhou Ji-Liu. Determination of scale sample step for getting numerical result of the continuous wavelet transform. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2004, **36**(6): 111~116
(蒲亦非, 袁晓, 廖科, 周激流. 连续子波变换数值实现中尺度采样间隔的确定. 四川大学学报(工程科学版), 2004, **36**(6): 111~116)
- 12 Pu Yi-Fei, Yuan Xiao, Liao Ke, Zhou Ji-Liu. Implement any fractional order neural-type pulse oscillator with net-grid type analog fractance circuit. *Journal of Sichuan University(Engineering Science Edition)*, 2006, **38**(1): 128~132
(蒲亦非, 袁晓, 廖科, 周激流. 一种实现任意分数阶神经型脉冲振荡器的格形模拟分抗电路. 四川大学学报(工程科学版), 2006, **38**(1): 128~132)



蒲亦非 电子科技大学电子工程学院博士后. 先后在四川大学电子信息学院攻读工学学士、硕士和博士学位. 主要研究方向为分数阶微积分在现代信号分析与处理中的应用. 本文通信作者.

E-mail: puyifei_007@163.com

(**PU Yi-Fei** Postdoctor at School of Electric and Engineering, University of Electronic of Science and Technology of China. He has been duly granted the degree of bachelor, master and Ph.D. from School of Electronics and Information, Sichuan University. His research interest covers application of fractional calculus to latest signal analysis and processing. Corresponding author of this paper.)



王卫星 电子科技大学电子工程学院教授, 主要研究方向为模式识别、图像处理.

(**WANG Wei-Xing** Professor at School of Electric and Engineering, University of Electronic of Science and Technology of China. His research interest covers pattern recognition and

image processing.)