基于半 Markov 决策过程的劣化系统检测与维修优化模型

程志君 [1] 郭 波 [1]

摘 要 针对系统劣化阶段持续时间、检测间隔时间和维修时间都服从一般分布的情况, 提出了一类基于半马氏决策过程的劣化系统检测与维修优化模型. 利用位相型分布近似一般分布简化了求解过程, 并提出了相应的改进值迭代算法. 最后通过算例验证了模型与迭代算法的可行性.

关键词 劣化系统, 半马氏决策过程, 位相型分布, 检测与维修
中图分类号 N945.17; O213.2

Optimization of Inspection and Maintenance Policy for Deteriorating System with Semi-Markov Decision Process

CHENG Zhi-Jun[1] GUO Bo[1]

Abstract The optimal model of inspection and maintenance for the deteriorating system is presented with the semi-Markov decision process. And the phase-type approach is proposed to preserve the analytical tractability of the transition probability matrix. To solve the problem that the PH distribution changes the state space of the system, the value iteration algorithm for the semi-Markov decision process is improved to get the optimal inspection and maintenance policy. Finally the numerical example is put forward to illustrate the implementation of the model and iteration algorithm.

Key words Deteriorating system, semi-Markov decision process, phase-type distribution, inspection and maintenance

1 引言

系统失效会造成经济上的巨大损失, 因此为了减少系统在使用过程中失效的可能性, 预防性维修被广泛地采用. 预防性维修是指利用一种或一系列的维修作业, 发现或排除某一隐蔽或潜在故障, 防止潜在故障发展成功能故障. 它对于提高系统的使用效能至关重要.

一般来说, 预防性维修分为两种：基于时间和基于状态的预防性维修. 在实际工作中, 大部分系统都服从劣化失效规律, 即随工作时间的延长性能逐渐下降, 直到不能满足工作需要而失效. 如果能根据系统的实际工作状况采取一定的预防性措施, 就能延长系统的使用寿命, 避免失效带来的巨大损失. 那么对于这类系统来说, 基于状态的预防性维修更加有效, 其主要思想是通过检测获知系统状态信息, 并据此制定相应的维修策略. 近年来, 状态维修的相关工作引起了许多研究者的关注. Pierskalla 和 Voelker[1]、Sherif 和 Smith[2]、Valdez-Flores 和 Feldman[3]、Wang[4] 先后对这一领域的相关研究进行了总结讨论. 由这些文献分析可知, 劣化系统的状态维修研究建立在对应状态描述模型的基础上. 目前劣化系统的状态描述模型主要有两大类：一类假设运行过程中系统状态连续变化, 如 Levy 过程、随机参数回归模型等[5,6]；一类假设运行过程中系统状态是离散的, 比较典型的是马尔科夫或半马氏过程模型[7~9]. 后者更易于解析处理, 因此目前以此为基础的维修优化研究较多, 但仍存在一些问题. 研究者为了能获得比较好的解析结果, 一般假设系统在不同劣化阶段的停留时间、维修时间和检测间隔时间等都服从指数分布, 那么系统相邻两个劣化阶段的转移率为常数, 直接利用 Markov 过程建立维修优化模型. 但在实际工作中, 这一假设是不合理的. 为此有人提出将马氏过程扩展, 利用半马氏过程描述系统劣化率随时间变化的情况[7,8], 但对应的求解过程非常复杂. 为了解决这一问题, 有些研究者采用位相型 (Phase type, PH) 分布对一般分布进行拟合, 利用 PH 分布良好的计算特性简化求解[9]. 但是这些工作仅考虑系统维修策略的优化, 忽略了检测策略的分析.

针对上述问题, 本文提出了一类基于半马氏决策过程的劣化系统维修优化模型. 利用 PH 分布拟合一般分布, 简化了半马氏决策过程的求解, 但考虑到 PH 拟合后系统状态空间的变化, 对半马氏决策过程的迭代算法进行了相应的改进, 以适应实际系统维修优化的需要.

2 系统假设与分析

系统假设如下：

1) 系统随工作时间的延长性能逐渐劣化, 并最终不满足工作需要而失效. 在系统失效前, 可以根据系统状态对其进行预防性维修, 延长系统的使用寿命.

2) 系统性能用某些特征参数 (如磨损量、滑油粒子浓度、电压等) 表征, 这些参数能够通过检测手段获得. 将系统从开始工作到失效这一过程划分为 $n+1$ 个劣化阶段, 当检测发现特征参数值处于划定的范围内, 则系统处于相应的劣化阶段. 那么不妨用劣化阶段来对应系统的不同工作状态, 则 $1, 2, \cdots, n$ 对应系统性能逐渐劣化但仍保持工作的状态, $n+1$ 对应系统失效状态. 同时假设系统在每个劣化阶段的停留时间服从一般分布.

3) 系统开始正常工作后, 考虑到检测技术和费用的限制, 不采用连续监测的方式, 而是每隔一定时间对系统状态进行检测, 检测间隔时间服从一般分布. 假设通过检测能完全确定系统所处的工作状态, 同时系统的失效状态不需检测即可获知, 且一旦系统失效即进行修复性维修或更换, 系统返回到最初工作状态.

4) 修复性维修由系统失效时间决定, 那么在每个检测点, 需要进行两方面的决策：一是根据检测信息确定系统处于何种工作状态, 是否需要进行预防性维修；二是确定下一次检测的合适时机, 即当前状态对应的检测间隔时间.

5) 系统的预防性维修时间、费用与系统状态相关, 维修能使系统恢复如新. 考虑到实际情况, 一般随劣化程度的加深, 维修时间和费用也会逐渐提高.

6) 进行维修或检测时, 系统停止工作, 同时也不会继续劣化, 但停机会造成一定的损失.

7) 系统的优化目标是：长期运行条件下的平均费用率最低.

系统变量声明：

i：系统劣化阶段序号, 对应系统不同工作状态;

$G_i(t)$：系统在状态 i 停留时间分布;

$\rho_i(t)$：状态 i 对应的检测时间间隔;

$F_d(t)$：检测所需时间分布;

$F_{Mi}(t)$：状态 i 时进行预防性维修所需时间分布;

$F_R(t)$：系统进行修复性维修所需时间分布;

收稿日期 2006-6-27 收修改稿日期 2007-1-11
Received June 27, 2006; in revised form January 11, 2007
国家自然科学基金 (70501031) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (70501031)
1. 国防科技大学信息系统与管理学院 长沙 410073
1. Institute of Information System and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073
DOI: 10.1360/aas-007-1101

C_M: 系统因预防性维修停机时的损失率;
C_d: 系统因检测停机时的损失率;
C_R: 系统因修复性维修停机时的损失率;
C'_d: 系统检测费用;
C'_{Mi}: 状态 i 时进行预防性维修费用;
C'_R: 系统修复性维修费用.

由假设 3) 知, 由于需要在一系列的离散检测点 $\{t_1, t_2, \cdots, t_k\}, k \in N$ 进行决策, 本文拟采用半马氏决策过程解决这一问题.

3 模型的分析与求解

半马氏决策过程 (Semi-Markov decision processes, SMDP) 一般由六重组构成[10]

$$\{S, A(i), p_{ij}(a), T(|i,a,j), r(i,a,j,t), V, i,j \in S, a \in A(i)\}$$

那么系统决策模型对应的六重组的具体形式如下:

S 是系统所有可能状态组成的非空集合, 即系统的状态空间, 且 $S = \{1, 2, \cdots, n+1\}$. $A(i)$ 是在状态 $i\,(i \in S)$ 可用的决策集. 若定义变量

$$a = \begin{cases} 0 & \text{继续工作} \\ 1 & \text{维修} \end{cases}$$

则由系统假设知, 决策变量为二元组合 $(a, \rho_i(t))$, 对应的决策集为 $\{(0, \rho_i), (1, \rho_1)\}, i \in S$. 相应的转移概率应为 $p_{ij}(a, \rho_i)$, 它不仅与系统劣化造成的状态转移有关, 而且还受选择策略的影响, 因此是半马氏决策模型分析中的难点, 具体求解过程将在 3.3 节中详细讨论. $T(|i,a,j)$ 和 $r(i,a,j,t)$ 分别对应转移时间和转移报酬, 都依赖于当前状态 i, 采取的策略 a 和下一阶段的状态 j. V 是决策准则, 由假设条件 7) 知采用平均准则, 即若 N 代表决策阶段, 则当 $N \to \infty$ 时系统平均收益最大, 这里是系统运行所需的平均费用最低. 由于采用平均准则, 由文献 [10] 中引理 6.2.2 可知, 上述半马氏决策过程可以转化为等价形式

$$\{S, A(i), p_{ij}(a, \rho_i), \tau(i, (a, \rho_i)), r(i, (a, \rho_i)), V\}$$

其中 $\tau(i, (a, \rho_i))$ 和 $r(i, (a, \rho_i))$ 分别对应在状态 i 选择策略 (a, ρ_i) 到下一次决策点的时间和费用. 下面将分析确定 $p_{ij}(a, \rho_i), \tau(i, (a, \rho_i))$ 和 $r(i, (a, \rho_i))$ 的具体形式.

3.1 转移概率矩阵的求解

令 $Y_n, n \in N = \{0, 1, \cdots\}$ 为第 n 个决策阶段系统所处的劣化阶段, 则半马氏决策过程的转移矩阵为

$$\begin{cases} P\{Y_{n+1} = j | Y_n = i, A_n = (a, \rho_i(t))\} = \\ \begin{cases} \int_0^\infty \tilde{P}_{ij}(t)\,\mathrm{d}\rho_i(t), & a = 0 \\ \int_0^\infty \tilde{P}_{1j}(t)\,\mathrm{d}\rho_i(t), & a = 1 \end{cases} \quad i \in \{S/n+1\}, \quad j \in S \\ P\{Y_{n+1} = n+1 | Y_n = i, A_n = (a, \rho_i(t))\} = \\ \int_0^\infty [1 - \rho_i(t)]\,\mathrm{d}\tilde{P}_{i,n+1}(t) \qquad i \in S \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\tilde{P}_{ij}(t) = \{Y_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n > t | Y_n = i\}$, 即未采取任何维修措施时, 由系统性能不断劣化造成的转移概率. 根据假设条件, 系统在每个劣化状态的停留时间不为零, 那么满足马氏过程的正则性条件, 其转移概率可由 Kolmogorov′s 前进/后退方程求得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{P}_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda_j(t)\tilde{P}_{ij}(t) + \sum\limits_{k \neq j} \lambda_{kj}(t)\tilde{P}_{ik}(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{P}_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda_i(t)\tilde{P}_{ij}(t) + \sum\limits_{k \neq i} \lambda_{ik}(t)\tilde{P}_{kj}(t) \end{cases} \tag{2}$$

本文假设系统在每个劣化阶段的停留时间服从一般分布, 则状态转移率 $\lambda(t)$ 与时间相关, 不为常数, 因此微分方程组 (2) 无法获得解析表达式, 对应 $p_{ij}(a, \rho_i)$ 的求解也将变得非常困难, 而且误差较大. 为了解决这一问题, 我们引入了 PH 分布. PH 分布是指数分布的自然推广, 保持了指数分布易于处理的优点, 并且对可靠性中的运算封闭, 在非负随机变量相应的分布中稠密 (相关的特性详见文献 [11, 12]). 用 PH 分布拟合系统状态停留时间的一般分布, 然后利用 PH 分布良好的特性求解.

3.2 PH 分布拟合与系统状态扩展

设系统处于状态 i 的时间服从 (α, T) 的 k_i 阶 PH 分布, 那么系统的状态空间在原有基础上扩展为

$$S: \{1, 2, \cdots, n+1\} \to S': \{1, 2, \cdots, N+1\}$$

其中 $N + 1 = \sum_{i \in S} k_i + 1$. 若将状态集 S' 分为若干个子集, 则有

$$s'_i = \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1, \cdots, \sum_{j=1}^{i} k_j \right\}$$

其中 $i \in S/n+1, s'_{n+1} = N+1$. 那么每个子集中包含的状态是原有状态集中每个状态由 PH 分布扩展后所得, 因此子集中每个状态对应的策略和报酬是相同的. 同时经 PH 分布拟合后, 状态集扩展, 相应的半马氏决策过程其它元素也会发生变化. 决策集 $A(i) = \{(a, \rho_j)\}, j \in S'$, 其中 ρ_j 对应状态集 S' 中状态 j 对应的检测间隔时间分布, 且满足 $\forall j \in S', \rho_j$ 相同. 转移概率 $p_{ij}(a, \rho_i)$ 同样可用式 (1) 得到 (式中 $\tilde{P}_{ij}(t)$ 的具体求解过程见附录), 但状态集合变为 S'. 在现有的决策点选择策略后, 到下一决策点的平均时间 $\tau(i, (a, \rho_i))$ 和费用 $r(i, (a, \rho_i))$ 的具体表达式见式 (3) 和 (4).

$$\tau(i, (a, \rho_i)) = \begin{cases} \int_0^\infty (1 - P_{i,N+1}(t))(1 - \rho_i(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty (1 - F_d(t))\,\mathrm{d}t & 1 \le i \le N, a = 0 \\ \int_0^\infty (1 - P_{1,N+1}(t))(1 - \rho_i(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty (1 - F_d(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty (1 - F_{Mi}(t))\mathrm{d}t & 1 \le i \le N, a = 1 \\ \int_0^\infty (1 - P_{1,N+1}(t))(1 - \rho_i(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty (1 - F_R(t))\mathrm{d}t & i = N+1 \end{cases} \tag{3}$$

3.3 半马氏决策模型最优方程求解算法

根据式 (1)~(4) 及半马氏决策过程原理[10], PH 分布拟合后, 半马氏决策模型对应的最优方程为

$$v(i)=\min_{(a,\rho_i)\in A}\{r(i,(a,\rho_i))-g\tau(i,(a,\rho_i))+\sum_{j\in S'}p_{ij}(a,\rho_i)v(j)\}$$

一般来说, 为了求解 SMDP 的最优方程, 可以考虑将其转化为离散时间马氏决策过程 (Discrete time Markov decision process, DTMDP), 然后利用 DTMDP 相应迭代算法来进行求解. 参照文献 [10], 给出以下的转化方法

令 $\lambda=\sup_{i\in S'}\tau^{-1}(i,(a,\rho_i)),\tau=1/\lambda$, 显然 $\lambda<\infty$. 那么令

$$p'_{ij}(a,\rho_i)=\frac{\tau\left[p_{ij}(a,\rho_i)-\delta_{ij}\right]}{\tau(i,(a,\rho_i))}+\delta_{ij}$$

$$r'(i,(a,\rho_i))=\frac{r(i,(a,\rho_i))}{\tau(i,(a,\rho_i))}$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$, $i,j\in S'$. 通过上述变换, 就将 SMDP 转化为 DTMDP, 可以采用 DTMDP 相应的迭代算法进行求解, 这里采用值迭代算法. 但考虑到扩展后的状态集并不是实际系统经历的状态, 经 PH 拟合后原有状态由连续变化的位相组合替代, 即扩展后状态集中的元素是位相, 不具有实际的物理意义. 而直接利用现有迭代算法[10] 只能针对扩展后的位相集进行优化. 因此在迭代过程时, 需要对算法进行相应的调整, 使最终结果为能反映系统实际状态的最佳策略. 调整后的值迭代算法如下:

步骤 1. 令 $n=0$, $\varepsilon>0$, 选择一个初值 $V_0(t)$. 首先 $\forall j\in s'_i$, $s'_i\in S'$, $i\in\{1,2,\cdots,n+1\}$, 选择策略 f_0, 使得

$$f_0(j)=\arg\min_{(a_j,\rho_j)}\{\sum_{j\in s'_i}r'(j,(a_j,\rho_j))\}$$

且同时满足 $\forall j\in s'_i$, $f_0(j)$ 相同, 然后令 $0\le V_0(j)\le r'(j,f_0),j\in S'$;

步骤 2. 选择 f_{n+1}, 使得 $\forall j\in s'_i$, $s'_i\in S'$, $i\in\{1,2,\cdots,n+1\}$, 都满足以下关系式

$$f_{n+1}(j)=\arg\min_A\left\{\sum_{j\in s'_i}(r'(j,f_n(j))+\sum_{k\in S'}p'_{jk}V_{n-1}(k))\right\}$$

且同时满足 $\forall j\in s'_i$, 有 $f_{n+1}(j)$ 相同;

步骤 3. 令 $V_{n+1}=r'_{f(n+1)}+P'_{f(n+1)}V_n$, 这里对于 $j\in s'_i$, f_{n+1} 相同;

步骤 4. 若 $sp(V_{n+1}-V_n)<\varepsilon$, 则记 $f_\varepsilon=f_{n+1}$, 算法终止; 否则, 令 $n=n+1$, 转到步骤 2. 此处定义 $sp(V)=\dfrac{\max\limits_{j\in S'}\{V(j)\}-\min\limits_{j\in S'}\{V(j)\}}{\min\limits_{j\in S'}\{V(j)\}}$.

4 算例

根据文献 [9] 给出的离散状态劣化系统的失效数据, 实现本文提出模型与求解算法. 设系统在失效前经历 4 个劣化阶段, 检测时间、维修时间和检测间隔时间为确定性分布, 则 $F_d(t)=U(t-t_d),F_{Mi}(t)=U(t-r_i),\rho_i(t)=U(t-t_i)$, 且 $t_d=0.1,r_1=20,r_2=21,r_3=23,r_4=26,r_5=100$, 检测、维修和更换系统的平均损失费用为 $c_d=c_M=1$, 其余费用为零. 由文献 [9] 提供的数据, 系统在各劣化阶段停留时间的分布 $G_i(t)$ 分别用 k_i 阶, 初始分布为 I 的 PH 分布拟合 (如图 1), 其中 $k_1=1,k_2=4,k_3=1,k_4=1,\lambda_i$, $i\in\{1,2,\cdots,7\}$ 表示拟合后位相间的转移率, 那么拟合后对应的 Q 矩阵如式 (5). 根据文中第 3 节提供的迭代算法, 令 $\varepsilon=1\mathrm{E}-4$, 可以计算获得对应的优化结果, 如表 1 所示. 如果采用文献 [10] 中经典的值迭代算法, 虽然系统的平均费用率有所下降, 但是发现状态 $\{2,3,4,5\}$ 对应的策略不同, 但是 $\{2,3,4,5\}$ 是系统同一劣化状态经 PH 分布拟合后得到的位相, 因此对应的优化策略应该一致. 比较而言, 本文提出的改进算法得到的结果与实际情况是一致的, 因此用于解决本文建立的决策模型是可行的.

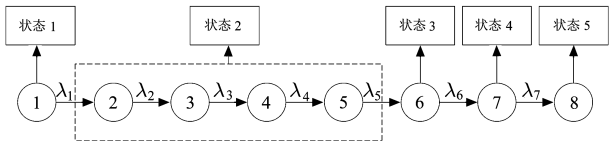

图 1　PH 分布拟合后系统状态转移图

Fig. 1　System state transition diagram with phase-type approximation

$$r(i,(a,\rho_i))=\begin{cases}c_d\int_0^\infty[1-F_d(t)]\,\mathrm{d}t+c'_d & 1\le i\le N,a=0\\ c_d\int_0^\infty[1-F_d(t)]\,\mathrm{d}t+c_M\int_0^\infty[1-F_{Mi}(t)]\,\mathrm{d}t+c'_d+c'_{Mi} & 1\le i\le N,a=1\\ c_R\int_0^\infty[1-F_R(t)]\,\mathrm{d}t+c'_R & i=N+1\end{cases}\tag{4}$$

$$Q=\begin{pmatrix}-0.01 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.04762 & 0.04762 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.04546 & 0.04546 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -0.04348 & 0.04348 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.04167 & 0.04167 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01429 & 0.01429\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\tag{5}$$

表 1 两种值迭代算法得到的系统优化策略

Table 1 The optimal policy with two kinds of value-iteration algorithms

PH 拟合前	1			2		3	4	5	$\overline{C}$
PH 拟和后	1	2	3	4	5	6	7	8	
算法 1	a=0	a=0	a=0	a=0	a=1	a=1, l=104.3			0.989
	l=104.3	l=51.6	l=37.7	l=11.6	l=104.3				
算法 2	a=0	a=0, l=52.6				a=1, l=125.0			0.994
	l=125.0								

∗ 算法 1 指代文献 [10] 给出的值迭代算法, 算法 2 指代本文的改进值迭代算法.

5 结论

本文将半马氏决策过程应用于劣化系统的检测与维修优化模型中, 并通过引入 PH 分布给出了系统转移概率求解的简化方法. PH 分布拟合一般分布后, 系统的状态空间扩展, 但考虑到检测与维修策略是针对原有状态空间制定的, 因此对半马氏决策过程的值迭代算法进行了改进, 并以长期运行情况下的系统平均费用率为优化目标, 求得了对应的系统最优检测与维修策略. 最后本文针对劣化状态停留时间、检测间隔和维修时间都为确定性分布的情况, 运用较简单的算例验证了优化模型和迭代算法. 本文分析了满足假设条件的劣化系统监测与维修策略优化问题, 对于其它情况, 如检测无法完全反映系统状态, 维修无法使系统恢复如新等将在下一步的研究中深入讨论.

References

1 Pierkalla W P, Voelker J A. A survey of maintenance models: the control and surveillance of deteriorating systems. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1976, **23**(4): 353∼388

2 Sherif Y S, Smith M L. Optimal maintenance models for systems subject to failure: a survey. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1981, **28**(1): 47∼74

3 Valdez-Flores C, Feldman R M. A survey of preventive models for stochastically deteriorating single unit systems. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1989, **36**(5): 419∼446

4 Wang H. A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *European Journal of Operational Research*, 2002, **139**(5): 469∼489

5 Van Noortwijk J M, Frangopol D M. Two probabilistic life-cycle maintenance models for deteriorating civil infrastructures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, **19**(4): 345∼359

6 Li W, Pham H. An inspection-maintenance model for systems with multiple competing processes. *IEEE Transactions on Reliability*, 2005, **54**(2): 318∼327

7 Julie S I, Harriet B N. A modeling approach to maintenance decisions using statistical quality control and optimization. *Quality and Reliability Engineering International*, 2005, **21**(3): 355∼366

8 Chen D, Trivedi K. Optimization for condition-based maintenance with semi-Markov decision process. *Reliability Engineering and System Safety*, 2005, **90**(1): 25∼29

9 Yeh R H. Optimal inspection and replacement policies for multi state deteriorating systems. *European Journal of Operational Research*, 1996, **3**(3): 248∼259

10 Hu Qi-Ying, Liu Jian-Yong. *Introduction of Markov Decision Process*. Xi′an: University of Xi′an Electronics and Technology Press, 2000
(胡奇英, 刘建庸. 马尔可夫决策过程引论. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2000)

11 O′Cinneide C A. Phase-type distributions: open problems and a few properties. *Communication in Statistics: Stochastic Models*, 1999, **15**(4): 731∼757

12 Montoro-Cazorla D, Perez-Ocon R. A deteriorating system with two repair modes and sojourn times phasetype distributed. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, **91**(1): 1∼9

程志君 国防科技大学信息系统与管理学院博士研究生. 主要研究方向为系统可靠性与维修决策. 本文通信作者. E-mail: czj2002@sina.com
(**CHENG Zhi-Jun** Ph. D. candidate at the Institute of Information System and Management, National University of Defense Technology. Her research interest covers reliability of system and maintenance decision. Corresponding author of this paper.)

郭 波 国防科技大学信息系统与管理学院教授. 主要研究方向为系统可靠性、维修性和保障性. E-mail: Guobo62@126.com
(**GUO Bo** Professor at the Institute of Information System and Management, National University of Defense Technology. His research interest covers reliability, maintenance and supportability of system.)

附录

求解 $\tilde{P}_{ij}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}=0,\quad j<i$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}_{ii}(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda_i\tilde{P}_{ii}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda_j\tilde{P}_{ij}(t)+\lambda_{j-1}\tilde{P}_{i,j-1}(t),\ i<j\le n$$

$$\tilde{P}_{i,n+1}(t)=1-\sum_{l=i}^{n}\tilde{P}_{il}(t)$$

且根据 Kolmogorov′s 后退方程, 有 $\tilde{P}_{n+1,j}(t)=\tilde{P}_{1j}(t)$, 则利用拉氏变换求解上述方程式. 令 $\pi_{ij}(s)=L\left\{\tilde{P}_{ij}(t)\right\}$, 有

$$s\pi_{ii}(s)=1-\lambda_i\pi_{ii}(s)$$
$$s\pi_{ij}(s)=-\lambda_j\pi_{ij}(s)+\lambda_{j-1}\pi_{i,j-1}(s),\ i<j\le n$$
$$\pi_{i,n+1}(s)=1-\sum_{l=i}^{n}\pi_{il}(s)$$
$$\pi_{n+1,j}(s)=\pi_{1j}(s)$$

解得

$$\begin{cases}\tilde{P}_{ij}(t)=(-1)^{j-i}\lambda_i\lambda_{i+1}\cdots\lambda_{j-1}\sum\limits_{k=i}^{j}\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda_i t}}{\prod\limits_{\substack{l=i\\ l\ne k}}^{j}(\lambda_k-\lambda_l)}, \\ \qquad\qquad i\le j\le n\\ \tilde{P}_{i,n+1}(t)=1-\sum\limits_{l=i}^{n}\tilde{P}_{il}(t), i\le n+1\end{cases}$$