

网络环境下不确定时滞系统

鲁棒 H_∞ 控制

彭晨¹ 岳东¹

摘要 研究了网络环境下不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制器的设计问题. 在综合考虑网络的非理想状况下, 建立一种新的网络控制模型. 然后利用 Lyapunov Krasovskii 泛函方法, 通过引入自由矩阵, 得到网络控制系统的 H_∞ 鲁棒稳定条件和相应的鲁棒 H_∞ 时滞状态反馈控制器的设计方法. 实例表明了本文所得结果的有效性.

关键词 网络控制系统, H_∞ 控制, 最大允许综合时滞界, 线性矩阵不等式

中图分类号 TP120.3040

Network-based Robust H_∞ Control of Systems with State-delay and Uncertainty

PENG Chen¹ YUE Dong¹

Abstract This paper is concerned with the H_∞ controller design of networked control systems with state delay and uncertainty. A model of the networked control systems is provided in consideration of the non-ideal network conditions. By introducing some free-weighting matrices, the robust H_∞ stability conditions are obtained based on Lyapunov Krasovskii functional method, and an H_∞ controller design method with time delay state feedback is also proposed. An illustrative example is provided to show the effectiveness of our proposed method.

Key words Networked control systems, H_∞ control, maximum allowable synthetical bounds, linear matrix inequalities

1 引言

网络控制系统 (Networked control systems, NCSs) 是一种全分布式、网络化实时反馈控制系统, 是某个区域现场传感器、控制器及执行器和通信网络的集合, 用以提供设备之间的数据传输, 使该区域内不同地点的用户实现资源共享和协调操作. 这种网络化的控制模式具有信息资源能够共享、连接数大大减少、易于扩展、易于维护、高效率、高可靠性、灵活等优点.

近年来, NCSs 的研究正成为国际学术界研究的一个热点^[1~5]. 由于采样及控制信号通过网络进行传输, 网络的不确定性问题如网络时延、数据丢包及错序等问题不可避免. 考虑网络非理想状况, 研究者们分别基于连续模型^[1, 5]、离散模型^[2] 或混杂模型方法^[3], 考虑网络控制稳定性分析及综合问题. 由于采用的网络传输类型及协议不同, 网络时延可能是定常或时变或是随机的. 在采用类似 Kim 等^[6] 方法获取网络取大允许时延 (Maximum allowable deadline bound, MADB) 前提下, Park 等^[7] 研究网络采样周期调度问题, 但

没有考虑非理想网络状况. Yue 等^[8] 考虑了具有外界扰动下不确定性系统的鲁棒分析及综合问题. 但综合考虑网络非理想网络状况下复杂对象的鲁棒控制的分析与综合尚需进一步研究. 本文主要讨论网络环境下时滞不确定性系统的鲁棒控制器的设计问题, 针对传统方法保守性强的问题, 有别于对原系统进行模型变换的传统方法, 通过引入自由矩阵^[7], 采用 Lyapunov Krasovskii 泛函方法, 得到网络控制系统的鲁棒稳定条件, 并给出一种新的鲁棒时滞状态反馈控制器的设计方法. 实例表明, 与已有网络反馈控制器分析设计方法相比, 本文所获得的主要结果, 具有较小的保守性, 且所得出的最大允许综合时滞界为网络控制调度提供一种有效的多参数联合调度策略.

2 NCS 系统描述

在网络控制系统中, 假设被控对象为时滞不确定系统, 可描述为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbb{A}\mathbf{x}(t) + \mathbb{B}\mathbf{x}(t-d) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + B_1\mathbf{w}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{z}(t) = C\mathbf{x}(t) + C_1\mathbf{x}(t-d) + D\mathbf{u}(t) + D_1\mathbf{w}(t) \quad (2)$$

其中, $\mathbb{A} = A + \Delta A$, $\mathbb{B} = (A_1 + \Delta A_1)$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^q$ 分别是适当维数的状态矢量, 控制输入矢量和控制输出矢量; $A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1$ 为具有适当维数的常数矩阵; ΔA 和 ΔA_1 为具有时变特征的不确定参数矩阵; $\mathbf{w}(t)$ 为外界扰动且 $\mathbf{w}(t) \in L_2(t_0, \infty)$, d 为定常状态时延.

假设不确定参数矩阵 ΔA 和 ΔA_1 范数有界且满足

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_1 \end{bmatrix} = D_2 F(t) \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 $F(t) \in \mathbf{R}^{i \times j}$ 为满足 $F^T(t)F(t) \leq I$ 的不确定矩阵, D_2, E_1 和 E_2 为具有合适维数的常数矩阵.

假设传感器是时钟驱动, 控制器和执行器是事件驱动且数据单包传送, 式 (1) 中 $\mathbf{u}(t)$ 通过零阶保持器实现, 通过网络实现的真实控制输入是分段连续函数. 此外, 在网络传输过程中考虑网络延迟、丢包和错序等非理想网络状况的影响后, 采用状态反馈控制器结构, 实际的控制系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = & \mathbb{A}\mathbf{x}(t) + \mathbb{B}\mathbf{x}(t-d) + \\ & \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + B_1\mathbf{w}(t), \quad t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{z}(t) = C\mathbf{x}(t) + C_d\mathbf{x}(t-d) + D\mathbf{u}(t) + D_1\mathbf{w}(t) \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(t^+) = K\mathbf{x}(t - \tau_{i_k}), \quad t \in \{i_k h + \tau_{i_k}, k = 1, 2, \dots\} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{u}(t^+) = \lim_{\hat{t} \rightarrow t+0} \mathbf{u}(\hat{t})$, h 为采样周期, $i_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 是一些整数且 $\{i_1, i_2, i_3, \dots\} \subset \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, τ_k 是时间延迟, 此值表示从被控制对象采样时刻到执行器执行控制信号的时间间隔. 显然 $\bigcup_{k=1}^{\infty} [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}) = [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$. 系统 (4)~(6) 可重写为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbb{A}\mathbf{x}(t) + \mathbb{B}\mathbf{x}(t-d) + BK\mathbf{x}(i_k h) + B_1\mathbf{w}(t) \quad (7)$$

$$\mathbf{z}(t) = C\mathbf{x}(t) + C_1\mathbf{x}(t-d) + DK\mathbf{x}(i_k h) + D_1\mathbf{w}(t) \quad (8)$$

显然系统 (7)~(8) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 在 $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}})$ 上是连续的. 由于 $\bigcup_{k=1}^{\infty} [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}) = [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$, 可知系统 (7)~(8) 的解在 $[t_0, \infty)$ 是连续的^[5, 8]. 模

收稿日期 2006-5-16 收修改稿日期 2006-10-15
Received May 16, 2006; in revised form October 15, 2006
国家自然科学基金 (60474079, 60704024), 江苏省自然科学基金 (BK2006573) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60474079, 60704024), Natural Science Foundation of Jiangsu Province of P. R. China (BK2006573)
1. 南京师范大学电气与自动化工程学院 南京 210042
1. School of Electrical and Automatic Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042
DOI: 10.1360/aas-007-1093

型 (7)~(8) 考虑了在网络传输过程中网络延迟、丢包和错序等非理想网络状况的影响. 可由图 1 说明.

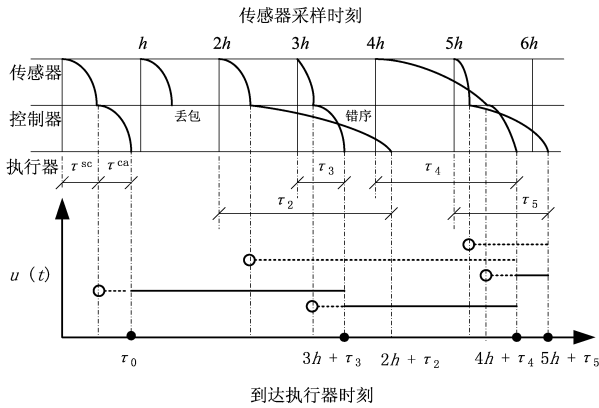


图 1 非理想网络下模型信号选择

Fig.1 Choosing signals of model under non-ideal network

从图 1 中可见

1) 传感器 h 时刻包在控制器到执行器时发生丢包. 控制信号选择为图中 $[\tau_0, 3h + \tau_3]$ 的实线部分;

2) 传感器 $2h$ 时刻与 $3h$ 时刻包在从控制器传到执行器时发生错序, 后发的包先到执行器. 控制信号选择为图中 $[3h + \tau_3, 4h + \tau_4]$ 的实线部分;

3) 传感器 $4h$ 时刻与 $5h$ 时刻包在从传感器到控制器发生错序, 从控制器到执行器又发生了错序, 整体上没有错序. 控制信号选择为图中 $[4h + \tau_4, 5h + \tau_5]$ 的实线部分;

4) 模型对网络时延没有特殊约束, 并不要求 $\tau_i \leq h$. 如图中 $\tau_3 \leq h, 2h \leq \tau_2 \leq 3h$.

为便于分析, 给出如下定义.

定义 1. 网络控制系统最大允许综合界 η , 满足 $\eta \geq (i_{k+1} - i_k)h + \tau_{i_{k+1}}, k = 1, 2, 3, \dots$.

定义 2. 假设系统 (7)~(8) 满足如下两个条件:

1) 对于所有允许的不确定参数 ΔA 和 ΔA_1 , 在 $\mathbf{w}(t) \equiv 0$ 时, 如果存在 Lyapunov Krasovskii 泛函 $V(t)$ 满足 $V(t) > 0, \dot{V}(t) < 0$ 则称系统 (7)~(8) 是鲁棒渐近稳定的;

2) 在零初始条件下, 对于给定的 γ 及任意外界扰动 $\mathbf{w}(t) \in L_2[0, \infty)$, 控制输出 $\mathbf{z}(t)$ 满足 $\|\mathbf{z}(t)\|_2 \leq \gamma \|\mathbf{w}(t)\|_2$. 则称系统 (7)~(8) 具有 H_∞ 范数界 γ , 且是鲁棒渐近稳定的.

注 1. 式 (4) 中, $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}})$, 此处不需 $i_{k+1} > i_k$. 当 $i_{k+1} > i_k + 1$ 时, 表示传输过程中没有错序现象; 当 $i_{k+1} < i_k$ 时表示包没有按采样时序发送, 后采样的信息可能经不同路由先到达控制器, 传输过程中有错序现象. 当 $|i_{k+1} - i_k| > 1$ 时, 表示发生了丢包现象, 丢包个数为 $(|i_{k+1} - i_k| - 1)$. 另外式 (4) 中并不要求 $\tau_{k+1} = \tau_k$, 表示了网络控制时延的随机性、不确定性, 表达网络 QoS (Quality of Service) 对网络控制效果的影响.

注 2. 根据定义 1, 采样周期并不要求是定常的, 这样就为研究控制与网络调度协作时, 通过主动丢包或在一定允许范围内调节采样周期等调度策略, 找到一个统一于模型的调度分析方法. 如当 $i_{k+1} = i_k + 1$ 时, $h + \tau_{k+1} \leq \eta$, 表示采样周期与时延综合性能受约束, 而不要求采样周期与时延关系, 如不要求 $h \geq \tau_{k+1}$.

3 主要结果

下面首先建立 NCS 系统 (7)~(8) 的 H_∞ 鲁棒稳定条件,

然后利用这一条件给出网络系统 (7)~(8) 的 H_∞ 鲁棒控制器设计方法.

定理 1. 给定 $\gamma > 0, \eta > 0$ 和矩阵 K , 如果存在标量 $\varepsilon > 0$, 具有适当维数的矩阵 $P > 0, S > 0, R > 0, N_i$ 和 $M_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 使如下线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 成立

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

其中

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{11} & * & * & * & * \\ \hat{\Pi}_{21} & \hat{\Pi}_{22} & * & * & * \\ \hat{\Pi}_{31} & \hat{\Pi}_{32} & \hat{\Pi}_{33} & * & * \\ \hat{\Pi}_{41} & \hat{\Pi}_{42} & \hat{\Pi}_{43} & \hat{\Pi}_{44} & * \\ B_1^T N_1^T & B_1^T N_2^T & B_1^T N_3^T & B_1^T N_4^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{21} = \begin{bmatrix} \eta M_1^T & \eta M_2^T & \eta M_3^T & \eta M_4^T & 0 \\ C & C_d & DK & 0 & D_1 \\ D_2^T N_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2^T N_2^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_2^T N_3^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_2^T N_4^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{22} = \text{diag}(-\eta R, -I, -0.5\varepsilon^{-1}I, -0.25\varepsilon I, -0.5\varepsilon^{-1}I, -0.25\varepsilon I, -0.5\varepsilon^{-1}I, -0.5\varepsilon^{-1}I)$$

$$\hat{\Pi}_{11} = S + N_1 A + A^T N_1^T + M_1 + M_1^T$$

$$\hat{\Pi}_{21} = A_1^T N_1^T + N_2 A + M_2$$

$$\hat{\Pi}_{31} = K^T B^T N_1^T + N_3 A - M_1^T + M_3$$

$$\hat{\Pi}_{41} = P^T + N_4 A - N_1^T + M_4$$

$$\hat{\Pi}_{22} = -S + N_2 A_1 + A_1^T N_2^T$$

$$\hat{\Pi}_{32} = K^T B^T N_2^T + N_3 A_1 - M_2^T$$

$$\hat{\Pi}_{42} = -N_2^T + N_4 A_1$$

$$\hat{\Pi}_{33} = N_3 B K + K^T B^T N_3^T - M_3 - M_3^T$$

$$\hat{\Pi}_{43} = -N_3^T + N_4 B K - M_4$$

$$\hat{\Pi}_{44} = \eta R - N_4 - N_4^T$$

则闭环网络系统 (7)~(8) 具有 H_∞ 范数上界 γ , 且是鲁棒渐近稳定的.

证明. 定义 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{y}(t)$, 构建 Lyapunov Krasovskii 泛函

$$V(t) = \mathbf{x}^T(t) P \mathbf{x}(t) + \int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(v) S \mathbf{x}(v) dv + \int_{t-\eta}^t \int_s^t \mathbf{y}^T(v) R \mathbf{y}(v) dv ds \quad (10)$$

其中, $P > 0, S > 0, R > 0$. $V(t)$ 在 $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}})$ 上的导数为

$$\dot{V}(t) = 2\mathbf{x}^T(t) P \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}^T(t) S \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-d) S \mathbf{x}(t-d) + \eta \mathbf{y}^T(t) R \mathbf{y}(t) - \int_{t-\eta}^t \mathbf{y}^T(s) R \mathbf{y}(s) ds \quad (11)$$

根据 Newton-Leibniz 公式及具有适当维数的矩阵 N_i 和 M_i ($i = 1, 2, 3, 4$)，可构建如下等式

$$\xi^T(t)M \left[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(i_k h) - \int_{i_k h}^t \mathbf{y}(s)ds \right] = 0 \quad (12)$$

$$\xi^T(t)N[\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbb{B}\mathbf{x}(t-d) + BK\mathbf{x}(i_k h) + B_1\mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)] = 0 \quad (13)$$

其中, $\xi^T(t) = [\mathbf{x}^T(t) \ \mathbf{x}^T(t-d) \ \mathbf{x}^T(i_k h) \ \mathbf{y}^T(t)]$, $M^T = [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T \ M_4^T]$, $N^T = [N_1^T \ N_2^T \ N_3^T \ N_4^T]$.

根据定义 1, 当 $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}]$, 下式成立

$$- \int_{t-\eta}^t \mathbf{y}^T(s)R\mathbf{y}(s)ds \leq - \int_{i_k h}^t \mathbf{y}^T(v)R\mathbf{y}(v)dv \quad (14)$$

$$-2\xi^T(t)M \int_{i_k h}^t \mathbf{y}(s)ds \leq \eta\xi^T(t)MR^{-1}M^T\xi(t) + \int_{i_k h}^t \mathbf{y}^T(v)R\mathbf{y}(v)dv \quad (15)$$

结合式 (11)~(15), 有

$$\dot{V}(t) \leq \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \Psi_{11} & * \\ \hat{\Psi}_{21} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \Theta \right\} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} - \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) + \gamma^2 \mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) \quad (16)$$

其中, $\tilde{M}^T = [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T \ M_4^T \ 0]$, $\Theta = \eta\tilde{M}R^{-1}\tilde{M}^T + \tilde{C}^T\tilde{C}$, $\tilde{C} = [C \ C_d \ KD \ 0 \ D_1]$, $\hat{\Psi}_{21} = [B_1^T N_1^T \ B_1^T N_2^T \ B_1^T N_3^T \ B_1^T N_4^T]$.

结合式 (9) 与 (16), 当 $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}]$ 有

$$\dot{V}(t) \leq -\mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) + \gamma^2 \mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) \quad (17)$$

从 $i_k h + \tau_{i_k}$ 到 $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}]$ 对 (17) 两边积分可得:

$$V(t) - V(i_k h + \tau_{i_k}) \leq - \int_{i_k h + \tau_{i_k}}^t \mathbf{z}(s)^T \mathbf{z}(s)ds + \int_{i_k h + \tau_{i_k}}^t \gamma^2 \mathbf{w}(s)^T \mathbf{w}(s)ds \quad (18)$$

因为 $\bigcup_{k=1}^\infty [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}}] = [t_0, \infty)$ 且 $V(t)$ 在 $t \in [t_0, \infty)$ 是连续的. 根据式 (18), 可得

$$V(t) - V(t_0) \leq - \int_{t_0}^t \mathbf{z}(s)^T \mathbf{z}(s)ds + \int_{t_0}^t \gamma^2 \mathbf{w}(s)^T \mathbf{w}(s)ds \quad (19)$$

然后, 在零初始条件下, 使 $t \rightarrow \infty$ 可得

$$\int_{t_0}^\infty \mathbf{z}(s)^T \mathbf{z}(s)ds \leq \int_{t_0}^\infty \gamma^2 \mathbf{w}(s)^T \mathbf{w}(s)ds \quad (20)$$

因此 $\|\mathbf{z}(t)\|_2 \leq \gamma \|\mathbf{w}(t)\|_2$.

下面证明网络系统 (7)~(8) 是渐近稳定的. 当 $\mathbf{w}(t) \equiv 0$, 由式 (9) 及 (16) 可得

$$\dot{V}(t) \leq \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \Psi_{11} & * \\ \hat{\Psi}_{21} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \Theta \right\} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} - \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) < 0 \quad (21)$$

根据定义 2 及式 (16) 和 (21), 可知结论成立. \square

定理 1 给出了网络控制系统 (7)~(8) 的鲁棒稳定条件, 该条件中自由矩阵 N_i 和 M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的引入, 为设计 H_∞ 鲁棒控制器提供了一种新方法.

定理 2. 给定 $\eta > 0$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ ($i = 2, 3, 4$), $\lambda_4 > 0$, $\gamma > 0$, 如果存在标量 $\varepsilon > 0$, 具有适当维数的矩阵 \tilde{P} , \tilde{S} , $\tilde{R} > 0$, \tilde{M}_i ($i = 1, 2, 3, 4$), Y , 非奇异阵 X , 使如下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{11} & * \\ \tilde{\Psi}_{21} & \tilde{\Psi}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

其中

$$\tilde{\Psi}_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_{11} & * & * & * & * \\ \tilde{\Pi}_{21} & \tilde{\Pi}_{22} & * & * & * \\ \tilde{\Pi}_{31} & \tilde{\Pi}_{32} & \tilde{\Pi}_{33} & * & * \\ \tilde{\Pi}_{41} & \tilde{\Pi}_{42} & \tilde{\Pi}_{43} & \tilde{\Pi}_{44} & * \\ B_1^T & \lambda_2 B_1^T & \lambda_3 B_1^T & \lambda_4 B_1^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Psi}_{21} = \begin{bmatrix} \eta\tilde{M}_1^T & \eta\tilde{M}_2^T & \eta\tilde{M}_3^T & \eta\tilde{M}_4^T & 0 \\ CX^T & C_d X^T & DY & 0 & D_1 \\ D_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_1 X^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 D_2^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 X^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 D_2^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 D_2^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Psi}_{22} = \text{diag}(-\eta\tilde{R} - I, -0.5\varepsilon^{-1}I, -0.25\varepsilon I, -0.5\varepsilon^{-1}I, -0.25\varepsilon I, -0.5\varepsilon^{-1}I, -0.5\varepsilon^{-1}I),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{11} &= \tilde{S} + AX^T + XA^T + \tilde{M}_1 + \tilde{M}_1^T \\ \tilde{\Pi}_{21} &= XA_1^T + \lambda_2 AX^T + \tilde{M}_2 \\ \tilde{\Pi}_{31} &= Y^T B^T + \lambda_3 AX^T - \tilde{M}_1^T + \tilde{M}_3 \\ \tilde{\Pi}_{41} &= \tilde{P}^T + \lambda_4 AX^T - X + \tilde{M}_4 \\ \tilde{\Pi}_{22} &= -\tilde{S} + \lambda_2 A_1 X^T + \lambda_2 X A_1^T \\ \tilde{\Pi}_{32} &= \lambda_2 Y^T B^T + \lambda_3 A_1 X^T - \tilde{M}_2^T \\ \tilde{\Pi}_{42} &= -\lambda_2 X + \lambda_4 A_1 X^T \\ \tilde{\Pi}_{33} &= \lambda_3 BY + \lambda_3 Y^T B^T - \tilde{M}_3 - \tilde{M}_3^T \\ \tilde{\Pi}_{43} &= -\lambda_3 X + \lambda_4 BY - \tilde{M}_4 \\ \tilde{\Pi}_{44} &= \eta\tilde{R} - \lambda_4 X^T - \lambda_4 X \end{aligned}$$

则闭环网络系统 (7)~(8) 有 H_∞ 范数上界 γ 及状态反馈增益 $K = YX^{-T}$, 且是鲁棒渐近稳定的.

证明. 定义 $N_2 = \lambda_2 N_1$, $N_3 = \lambda_3 N_1$, $N_4 = \lambda_4 N_1$, $Y = KX^T$, $\tilde{P} = XPX^T$, $\tilde{R} = XRX^T$, $\tilde{S} = XSX^T$, $\tilde{M}_i = XM_i X^T$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 其中 $N_1 = X^{-1}$, 然后用 $\text{diag}(X, X, X, X, I, X, I, I, I, I, I, I)$ 和它的转置阵分别左乘右乘式 (9) 两边, 利用 Schur 补引理, 得到式 (22). 在式 (22) 中, $\tilde{\Pi}_{44} = \eta\tilde{R} - \lambda_4 X^T - \lambda_4 X < 0$, 根据假设 $\eta > 0$, $\lambda_4 > 0$, $\tilde{R} > 0$, 欲使 $\tilde{\Pi}_{44} = \eta\tilde{R} - \lambda_4 X^T - \lambda_4 X < 0$ 恒成立必须 $X^T + X > 0$, 可得 X 是非奇异的. 由定义 $Y = KX^T$, 可得 $K = YX^{-T}$. \square

显然, 定理 2 的求解与 λ_i 相关, 可采取如下寻优算法获取相应的 η 和 K .

算法 1. 求取相应的 η 和 K .

1) 给定 λ_i ($i = 2, 3, 4$) 的搜索上下界 α_i 和 β_i , 增量 ξ , 设定 $K(0) = 0, \eta(0) = 0$;

2) 利用 $\lambda_i = \lambda_i + \xi$ 组合 λ_i ;

3) 根据式 (22), 建立 LMIs, 设定 $\eta(0) = \eta(0) + \mu$, 其中 μ 为 η 增量, 求取最大的 $\eta(\lambda_i)$ 和相应的 $K(\lambda_i)$, 如 $\eta(\lambda_i) > \eta(0)$, 则 $\eta(0) = \eta(\lambda_i), K(0) = K(\lambda_i)$;

4) 返回 2), 直至 $\alpha \leq \lambda_i \leq \beta_i$;

5) 输出 $\eta = \eta(0), K = K(0)$.

注 3. 定理 2 给出系统 (7)~(8) 的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器的设计方法, 该方法与引入的自由矩阵 \tilde{M}_i 及转化为 LMI 时引入的参数 λ_i 相关, η 和 K 通过算法 1 获得. 所获得的 η 与选取的参数 λ_i 相关, 实际仿真中需初步设定 α_i, β_i 和增量 ξ 的大致区间, 然后找出敏感区间后再进一步细化搜索参数. 上述算法虽然只能获取次优解, 但保守性较小.

显然, 根据定理 1 和定理 2 可得到最大允许综合时滞界 η , 在网络延时、丢包、错序及采样周期满足 $\eta \geq (i_{k+1} - i_k)h + \tau_{i_{k+1}}, k = 1, 2, 3, \dots$ 情况下, 所得出的最大允许综合界为网络控制调度提供一种有效的多参数联合调度策略.

4 实例仿真

为说明上述结论的有效性, 考虑具有如下参数的不确定性线性时滞系统 (1)~(2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, D = D_1 = 0.1, d = 0.3$$

其中 $\|\Delta A\| \leq 0.01, \|\Delta B\| \leq 0.01$. 为保证系统 (7)~(8) 的鲁棒稳定性, 应用定理 2 及算法 1, 选用 $\lambda_2 = -0.5, \lambda_3 = 0.3, \lambda_4 = 0.35$, 及 $\gamma = 1.5$, 可得 $K = [-0.4995 \quad -3.7515]$ 和 $\eta = 1.84$. 同样在假设不存在时滞及不确定性情况下, 模型 (7) 可转化与文献 [3] 中同样的模型. 与文献 [3] 中采取同样的控制器 $K = [-3.75 \quad -11.5]$, 在保证系统稳定性前提下, 采取已有方法^[3, 8, 9] 与本文方法可得最大允许时间间隔 (Maximum allowable time interval) 的结果分别为 0.0045^[3], 0.0538^[8], 0.7805^[9] 和 0.8695. 显然在采样周期较小情况下, 采用本文方法保守性较小.

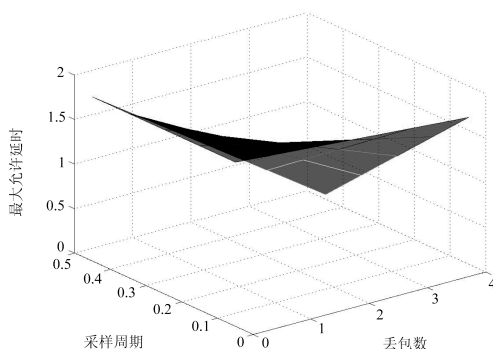


图 2 网络参数调度关系

Fig. 2 Scheduling relationship of network parameter

根据定义 1, 通过定理 2 获得的 η 满足 $(i_{k+1} - i_k)h + \tau_{k+1} \leq \eta$, 可以为网络控制提供一种采样周期 h 、丢包数

($|i_{k+1} - i_k| - 1$)、网络允许时滞 τ_{k+1} 之间的有效调度方法. 如在 $\gamma = 1.5$ 的性能约束下, 利用定理 2 可求得 $\eta = 1.84$, 在 $\eta = 1.84$ 约束下, 可得到网络参数间的相互关系, 如图 2 所示.

5 结论

本文研究了网络环境下时滞不确定性系统的鲁棒控制器的设计问题. 通过引入网络控制系统最大允许综合界方法, 考虑包含错序、丢包、时延等网络的非理想状况. 然后通过引入自由权重矩阵, 采用 Lyapunov Krasovskii 泛函方法, 得到网络控制系统的鲁棒稳定条件及与网络参数相关的最大允许综合界, 为网络调度提供一种有效的调度策略, 并给出一种新的时滞状态反馈控制器的设计方法. 最后实例表明了本文所获得的主要结果的有效性. 如何确定式 (22) 中 λ_i 及多包传送的网络控制问题是下一步将要研究的问题.

References

- Walsh G C, Ye H, Bushnell L G. Stability analysis of networked control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, **39**(3): 438~446
- Hu S S, Zhu Q X. Stochastic optimal control and analysis of stability of networked control systems with long delay. *Automatica*, 2003, **39**(11): 1877~1884
- Zhang W, Branicky M S, Phillips S M. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, **21**(1): 84~99
- Nilsson J, Bernhardsson B, Wittenmark B. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays. *Automatica*, 1998, **34**(1): 57~64
- Yue D, Han Q L, Peng C. State feedback controller design of networked control systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - II*, 2004, **51**(11): 640~644
- Park H S, Kim Y H, Kim D S, Kwon W H. A scheduling method for network-based control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, **10**(3): 318~330
- Kim D S, Lee Y S, Kwon W H, Park H S. Maximum allowable delay bounds of networked control systems. *Control Engineering Practice*, 2003, **11**: 1301~1313
- Yue D, Han Q L, Lam J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty. *Automatica*, 2005, **41**(6): 999~1007
- Zhang X M, Wu M, She J H, He Y. Delay-dependent stabilization of linear systems with time varying state and input delays. *Automatica*, 2005, **41**(8): 1405~1412

彭晨 南京师范大学电气与自动化工程学院副教授. 主要研究方向为网络控制系统和鲁棒控制. 本文通信作者.

E-mail: pc@email.njnu.edu.cn

(PENG Chen Associate professor at School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University. His research interest covers networked control system and robust control. Corresponding author of this paper.)

岳东 南京师范大学电气与自动化工程学院特聘教授. 主要研究方向为时滞系统, 网络控制系统和鲁棒控制. E-mail: medongy@njnu.edu.cn (YUE Dong Professor at School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University. His research interest covers time-delay system, networked control system, and robust control.)