切换线性超循环系统的稳定性分析

苏 瑞 [1] 李建华 [1] 李彦平 [1]

摘 要 超循环—生物学中重要模型, 具有广泛的实际背景. 本文将超循环系统扩展为切换超循环系统. 循环矩阵的循环结构为研究切换超循环系统的稳定性提供了有效的方法, 给出切换线性时变超循环系统在任意切换律下渐近稳定的充要条件和切换线性定常超循环系统可切换镇定的充分条件.

关键词 超循环, 循环矩阵, 切换系统, 稳定性, 切换律
中图分类号 TP13

Stability Analysis for the Switched Linear Hypercycle Systems

SU Rui[1] LI Jian-Hua[1] LI Yan-Ping[1]

Abstract Hypercycle is an important system model in biology, which extensively exists in real world. In this paper, hypercycle systems are extended into switched hypercycle systems. The circulant structure of the circulant matrices provides an effective method for the stability analysis of the switched hypercycle systems. Two main results of the stability are presented. One is the necessary and sufficient condition of asymptotic stability of the switched linear time-varying hypercycle system under arbitrary switching laws; the other is the sufficient condition of asymptotic stabilization of the switched linear time-invariant hypercycle systems under certain switching law.

Key words Hypercycle, circulant matrix, switched system, stability, switching law

1 引言

艾根的超循环 (Hypercycle) 自组织进化论[1, 2] 指出: "循环反应系统的等级层次决定了生物信息的限度, 超循环通过使系统的功能整合为扩大生物信息量提供了优势, 而这种优势推动生物向更高的复杂性方向进化". 一个系统的所有成员之间建立联系的最直接方式, 是通过反应耦合构造一条链. 在开链系统中, 末位成员得到耦合带来的全部好处. 如果把开链系统首尾相连形成闭合系统, 那么此闭合系统的每一个成员都能获得整体带来的全部好处[3]. 超循环系统具有这样的结构, 在系统内部的所有 "种类" 以一种循环的方式[4] 相互 "激励" 或 "制约", 文献 [4] 给出它的模型之一如下

$$\dot{x}_i = x_i\{-\delta - \sigma x_{i+} + (1-\sum_{k=1}^{n} x_k)(\rho + \kappa x_{i-})\},\ i=1,2,3,4 \tag{1}$$

其中, x_{i+} 为 x_i 的下一 "种类", x_{i-} 为 x_i 的上一 "种类", 并且 $x_{4+}=x_1$, $x_{1-}=x_4$. 这里特别强调: 系数 δ, σ, ρ, κ 与 i 无关的常数, 因此对每个 "种类" 变化的影响量具有 "循环相等" 的特点. 式 (1) 抽象为一般形式是

收稿日期 2006-3-3 收修改稿日期 2006-5-29
Received March 3, 2006; in revised form May 29, 2006
国家自然科学基金 (60274027) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60274027)
1. 沈阳大学信息工程学院 沈阳 110044
1. School of Information and Engineering, Shenyang University, Shenyang 110044
DOI: 10.1360/aas-007-1090

$$\dot{x}_i = f(x_i, x_{i+}, x_{i-}),\quad i=1,2,3,4$$

将这种系统扩展为更一般形式, 再将 "种类" 个数推广到 n 个, 则

$$\dot{x}_i = f(x_i, x_{i+}, x_{i++}, \cdots, x_{i-}),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

这里规定 $x_{i+}=x_{i+1}, x_{i++}=x_{i+2}, \cdots, x_{n+}=x_1$, $x_{i-}=x_{i-1}, x_{1-}=x_n$. 这样 "种类" $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 构成循环圈, 且参数 δ, σ, ρ, κ 与状态无关. 文献 [4] 指出, 参数条件 $\kappa\delta=\sigma\rho$ 产生一个从催化到抑制的切换点. 当 $\kappa\delta>\sigma\rho$ 系统归于催化; 反之, 系统归于抑制. 环境的改变, 人为的控制, 突发事件的产生等都将影响这些参数的取值. 本文主要研究切换线性时变超循环系统的稳定性与切换线性定常超循环系统的切换镇定.

2　模型描述与引理

定义 1. 矩阵

$$A(t)=\begin{bmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_n(t)\\ a_n(t) & a_1(t) & \cdots & a_{n-1}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_2(t) & a_3(t) & \cdots & a_1(t)\end{bmatrix} \tag{3}$$

称为时变循环矩阵, 记作 $A(t)=cl(a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t))$, 其中 $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t)$ 称为循环元素. 特殊的, 如果 $a_i(t)=a_i$(常数), 则记 $A=cl(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为定常循环矩阵[5].

定义 2. 系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A_\sigma(t)\boldsymbol{x},\ \ \sigma\in K=\{1,2,\cdots,k\} \tag{4}$$

称为切换线性时变超循环系统, 其中 $A_\sigma(t)=cl(a_1^{(\sigma)}(t), a_2^{(\sigma)}(t), \cdots, a_n^{(\sigma)}(t))$ $(\sigma\in K)$, $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\rm T}$ 为状态向量. 如果 $A_\sigma(t)=A_\sigma$, 则 (4) 为换线性定常超循环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A_\sigma\boldsymbol{x},\ \ \sigma\in K=\{1,2,\cdots,k\} \tag{5}$$

文献 [5] 对定常循环矩阵 $A(t)=cl(a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t))$ 进行了较为系统的研究, 利用其研究结果得出如下引理.

引理. 对于时变循环矩阵组 $A_\sigma(t)=cl(a_1^{(\sigma)}(t), a_2^{(\sigma)}(t), \cdots, a_n^{(\sigma)}(t))\in\mathbf{R}^{n\times n}$ $(\sigma\in K)$, 取公共的可逆阵

$$G=\begin{bmatrix} \omega_1^0 & \omega_2^0 & \cdots & \omega_n^0\\ \omega_1^1 & \omega_2^1 & \cdots & \omega_n^1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

其中 $\omega_m=\cos^{\frac{2(m-1)\pi}{n}}+i\sin^{\frac{2(m-1)\pi}{n}}$ $(m=1,2,\cdots,n)$, 这里 ω_m^{j-1} 为 ω_m 的 $j-1$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 次方, 对矩阵组 $A_\sigma(t)$ $(\sigma\in K)$ 中的每个矩阵均有 $G^{-1}A_\sigma(t)G={\rm diag}(\lambda_1^{(\sigma)}(t), \lambda_2^{(\sigma)}(t), \cdots, \lambda_n^{(\sigma)}(t))$, 这里

$$\lambda_m^{(\sigma)}(t)=a_1^{(\sigma)}(t)\omega_m^0+a_2^{(\sigma)}(t)\omega_m^1+\cdots+a_n^{(\sigma)}(t)\omega_m^{n-1}$$
$$m=1,2,\cdots,n,\quad \sigma\in K \tag{6}$$

3　主要结果

考虑式 (6) 给出的 $k\times n$ 个函数 $\lambda_m^{(\sigma)}(t)$, 按 $m=1,2,\cdots,n$ 将它们分成 n 组 $\{\lambda_m^{(1)}(t), \lambda_m^{(2)}(t), \cdots, \lambda_m^{(k)}(t)\}$. 再以每一组函数的实部最大值构成 n 个函数 $\Gamma_m(t)$

$$\Gamma_m(t)={\rm Max}\{{\rm Re}(\lambda_m^{(1)}(t)), {\rm Re}(\lambda_m^{(2)}(t)), \cdots, {\rm Re}(\lambda_m^{(k)}(t))\}$$
$$m=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

借助于这些函数, 有如下定理.

定理 1. 切换线性时变超循环系统 (4) 在任意切换律下渐近稳定的充分必要条件是由式 (7) 构成的 n 个函数 $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$, $\cdots$, $\Gamma_n(t)$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\Gamma_m(\tau){\rm d}\tau=-\infty,\quad m=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

证明. 对切换系统 (4), 取共同的状态变换 $\boldsymbol{x}=G\boldsymbol{y}$, 令 $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\rm T}$, 则系统 (4) 变换成

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{y}_1=\lambda_1^{(\sigma)}(t)y_1\\ \dot{y}_2=\lambda_2^{(\sigma)}(t)y_2\\ \quad\vdots\\ \dot{y}_n=\lambda_n^{(\sigma)}(t)y_n\end{array}\right.,\qquad \sigma\in K \tag{9}$$

因为切换系统 (4) 与切换系统 (9) 在稳定性上是等价的, 因此这里只讨论切换系统 (9) 的稳定性. 令 $t_0=0$, 用 $I_\sigma(0,t)$ 表示切换系统 (9) 在时间 $[0,t)$ 内在任意确定的切换律下运行第 σ 个子系统所有时间段的和集, 显然有 $I_1(0,t)\cup I_2(0,t)\cup\cdots\cup I_k(0,t)=[0,t)$, 则系统 (9) 在这个切换律下的解为

$$y_m(t)=$$
$${\rm e}^{\int_{I_1(0,t)}\lambda_m^{(1)}(\tau){\rm d}\tau+\int_{I_2(0,t)}\lambda_m^{(2)}(\tau){\rm d}\tau+\cdots+\int_{I_k(0,t)}\lambda_m^{(k)}(\tau){\rm d}\tau}\times y_m(0),$$
$$m=1,2,\cdots,n$$

充分性. 假设当 $t\to+\infty$, 有 $\int_0^t\Gamma_m(\tau){\rm d}\tau\to-\infty$, 则有

$$\begin{aligned}|y_m(t)|&=|{\rm e}^{\int_{I_1(0,t)}\lambda_m^{(1)}(\tau){\rm d}\tau+\cdots+\int_{I_k(0,t)}\lambda_m^{(k)}(\tau){\rm d}\tau}y_m(0)|\\ &\le{\rm e}^{\int_{I_1(0,t)}\lambda_m^{(1)}(\tau){\rm d}\tau+\cdots+\int_{I_k(0,t)}\lambda_m^{(k)}(\tau){\rm d}\tau}|y_m(0)|\\ &={\rm e}^{\int_0^t\Gamma_m(\tau){\rm d}\tau}|y_m(0)|\end{aligned}$$

因而, 当 $t\to+\infty$, 就有 $y_m(t)\to 0$ $(m=1,2,\cdots,n)$.

必要性. 假设系统 (9) 在任意切换律下是渐近稳定的. 下用反证法证明式 (8) 成立. 假设式 (8) 不成立, 即至少存在某个 m, 使得当 $t\to+\infty$, 有 $\int_0^t\Gamma_m(\tau){\rm d}\tau\nrightarrow-\infty$, 不妨设 $m=1$, 即当 $t\to+\infty$, 有 $\int_0^t\Gamma_1(\tau){\rm d}\tau\nrightarrow-\infty$. 由式 (7), 令 $J_\sigma=\{t\mid\Gamma_1(t)={\rm Re}(\lambda_1^{(\sigma)}(t))\}$, $\quad\sigma=1,2,\cdots,k$, 切换律设计如下: 第 σ 个子系统被激活, 如果 $t\in J_\sigma$, 则在此切换律下, 式 (9) 的第一个状态 y_1 的解为 $|y_1(t)|={\rm e}^{\int_0^t\Gamma_1(\tau){\rm d}\tau}|y_1(0)|$, 从而, 当 $t\to+\infty$, 就有 $y_1(t)\nrightarrow 0$, 与已知矛盾. □

推论. 切换线性定常超循环系统 (5), 在任意切换律下是渐近稳定的充分必要条件是它的系统矩阵 $A_\sigma=cl(a_1^{(\sigma)}, a_2^{(\sigma)}, \cdots, a_n^{(\sigma)})$, $\sigma\in K$, 都是 Hurwitz 阵 .

定理 1 和它的推论分别给出系统 (4) 和 (5) 在任意切换律下渐近稳定的充分必要条件. 下面的定理 2 给出切换线性定常超循环系统 (5) 切换镇定的充分条件.

定理 2. 对于切换线性定常超循环系统 (5), 如果存在非负常数 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k$, 使得

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(v_{11}\tau_1 + v_{12}\tau_2 + \cdots + v_{1k}\tau_k) < 0 \\ \mathrm{Re}(v_{21}\tau_1 + v_{22}\tau_2 + \cdots + v_{2k}\tau_k) < 0 \\ \qquad\vdots \\ \mathrm{Re}(v_{n1}\tau_1 + v_{n2}\tau_2 + \cdots + v_{nk}\tau_k) < 0 \end{cases} \tag{10}$$

则存在一个切换律, 使得系统 (5) 在此切换律下渐近稳定, 其中 $v_{m\sigma} = a_1^{(\sigma)}(t)\omega_m^0 + a_2^{(\sigma)}(t)\omega_m^1 + \cdots + a_n^{(\sigma)}(t))\omega_m^{n-1}$, $m = 1, 2, \cdots, n$, $\sigma = 1, 2, \cdots, k$.

证明. 利用凸组合理论[6, 7] 即可证明, 具体过程略. □

4 仿真算例

例. 考虑切换线性时变超循环系统: $\dot{\boldsymbol{x}} = A_\sigma(t)\boldsymbol{x}$, $\sigma \in \{1, 2, 3\}$ 的渐近稳定性, 其中

$$\begin{aligned} A_1(t) &= cl(-t^2, t\cos t, t + \sin t) \\ A_2(t) &= cl(-t + 1, 3, 2\cos t) \\ A_3(t) &= cl(-3t, 1, -2) \end{aligned}$$

这里 $n = 3$, 由式 (6) 构造 $\lambda_m^{(\sigma)}$, 再由式 (6) 构造 $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$ 和 $\Gamma_3(t)$ 如下

$$\Gamma_1(t) = -t + 4 + 2\cos t, \qquad \Gamma_2(t) = \Gamma_3(t) =$$

$$\begin{cases} -3t + 0.5, & 0 \le t < 0.447 \\ -t^2 - 0.5(t\cos t + t + \sin t), & 0.447 \le t < 0.938 \\ -t - 0.5 - \cos t, & 0.938 \le t < +\infty \end{cases}$$

显然满足条件 (8). 由定理 1, 此切换系统在任意切换律下渐近稳定. 仿真结果如图 1.

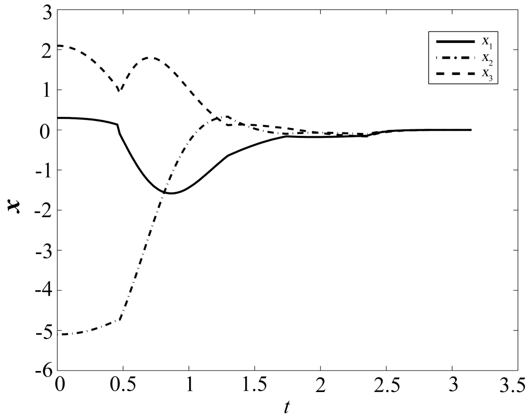

图 1 随机取切换律, 初值为 $\boldsymbol{x}(0) = (0.3, -5.1, 2.1)^{\mathrm{T}}$ 时, 系统的状态响应曲线

Fig. 1 The state trajectory of the switched linear hypercycle systems

5 结论

切换系统能够在任意切换律下渐近稳定是它的一个重要性能, 切换系统一旦拥有这种性能, 在设计切换律使系统满足其它性能指标 (如最优控制) 时, 就可以不顾及稳定性这个基本问题. 设计切换律使切换系统在某个切换律下渐近稳定也是很有实际意义的问题. 本文正是研究切换线性超循环系统的这两个问题, 循环结构在解决这些问题的过程中起了重要的作用.

References

1 Eigen M. *Steps Towards Life - A Perspective on Evolution*. Oxford: Oxford University Press, 1992

2 Eigen M, Schuster P. *The Hypercycle: A Principle of Natural Self-Organization*. Berlin: Springer, 1979

3 Zhou Hui-Qin. Revealing the secrets of complexity and order of life hypercycle theory. *Journal of Systemic Dialectics*, 1994, **9**(2): 64~67
(周慧琴. 超循环论对生命复杂性与有序性的揭密. 系统辨证学学报, 1994, **9**(2): 64~67)

4 Boenlijst M C, Hogeweg P. Attractors and spatial patterns in hypercycles with negative interactions. *Journal of Theoretical Biology*, 1995, **176**(2): 199~210

5 Davis P J. *Circulant Matrices*. New York: Wiley, 1979

6 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, **19**(5): 59~70

7 Sun Z D, Ge S S. *Switched Linear Systems Control and Design*. Berlin: Springer, 2004

苏 瑞 沈阳大学副教授. 主要研究方向为组合系统的结构分析与算法研究. 本文通信作者. E-mail: ljhsr@163.com
(**SU Rui** Associate professor at Shenyang University. Her research interest covers structure analysis and arithmetic investigation of composite systems. Corresponding author of this paper.)

李建华 沈阳大学教授. 主要研究方向为切换系统和切换组合系统的稳定性.
(**LI Jian-Hua** Professor at Shenyang University. His research interest covers stabilities of switched systems and composite systems.)

李彦平 沈阳大学教授. 主要研究方向为复杂系统理论及应用, 计算机控制与仿真.
(**LI Yan-Ping** Professor at Shenyang University. His research interest covers theary and applications of complex systems.)