关于摄像机正交运动下约束方程独立性的一点讨论

孙凤梅 [1,2] 王卫宁 [2]

摘 要 基于摄像机的正交运动对摄像机进行标定是基于主动视觉摄像机标定的一种重要方法. 一般来说, 5 组这样的正交运动就可以线性标定摄像机的 5 个内参数. 然而, 关于这 5 组摄像机运动应满足什么条件才可以保证所产生的 5 个线性约束方程是独立的, 文献中对这个问题至今没有定论. 一种流行的猜测是只要这 5 组正交运动下的平移向量任意 3 个不共面, 则对应的 5 个摄像机内参数约束方程必然独立. 本文对这个问题进行了进一步讨论, 证明了当 5 组正交运动中其中的 3 组构成一个三正交运动时, 此时尽管构成 5 组正交运动的 7 个平移向量没有任意 3 个共面, 但产生的 5 个约束方程却可能不独立, 并给出了一个不独立的具体例子.

关键词 摄像机标定, 独立性, 正交运动
中图分类号 TP391

A Note on Independence of Constraints of Orthogonal Movings of a Camera

SUN Feng-Mei[1,2] WANG Wei-Ning[2]

Abstract The orthogonal-motion based camera calibration is an important approach in active-vision based calibration. In general, each pair of orthogonal movings of a camera can generate a linear constraint on the camera′s five intrinsic parameters, and five such motion pairs are sufficient to linearly calibrate the camera. However an open question is that under what conditions of such five pairs of orthogonal movings the resulting constraints can be independent. A common view is that if no three motions out of the five motion pairs are coplanar, the corresponding five constraints can be independent. In the paper, this problem is further investigated. In particular, we show that if three sets out of the five orthogonal motion sets happen to form a three-orthogonal motion set (*i.e.*, three motions are mutually orthogonal), then even if no three motions among the total seven ones are coplanar, the resulting five constraints are not necessarily independent, and a concrete non-independent example is also provided.

Key words Camera calibration, independence, orthogonal movings

1 引言

摄像机标定是从二维图像恢复三维场景必不可少的步骤. 基于主动视觉的摄像机标定, 即通过控制摄像机作特定的运动对摄像机进行标定的方法, 是一种重要的摄像机标定方法[1]. 马[2] 证明了通过二组摄像机的三正交运动, 摄像机的内参数以及摄像机坐标系和平台坐标系之间的刚体变换关系可以线性求解. 杨等[3] 推广了文献 [2] 的工作. 李等[4] 通过大量模拟实验表明, 5 组摄像机正交运动下得到的约束方程一般来说是独立的. 雷等[5] 证明, 摄像机内参数和外参数可以通过投影矩阵进行分解得到. 关于正交运动下摄像机约束方程的独立性问题, 文献中至今没有定论. 一种流行的猜测是只要这 5 组正交运动下的 10 个平移向量中任意 3 个不共面, 则对应的 5 个摄像机内参数约束方程必然独立. 本文讨论了这个问题, 证明了当 5 组正交运动中其中的 3 组构成一个三正交运动时, 此时尽管构成 5 组正交运动的 7 个平移向量没有任意 3 个共面, 但产生的 5 个约束方程却可能不独立, 并给出了一个不独立的具体例子. 本文工作可以说是对文献 [4] 工作的一种继续, 对这方面的研究具有一定的参考作用.

收稿日期 2006-2-27 收修改稿日期 2006-4-27
Received February 27, 2006; in revised form April 27, 2006
国家自然科学基金 (60673104) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60673104)
1. 北方工业大学理学院 北京 100041 2. 首都师范大学物理系 北京 100037
1. Faculty of Science, North China University of Technology, Beijing 100041 2. Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100037
DOI: 10.1360/aas-007-1088

2 一组摄像机正交运动对内参数的约束

2.1 摄像机模型和成像投影

假定 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 为某一空间点, $\boldsymbol{m}=(u,v)^{\mathrm{T}}$ 为对应的图像点, 则针孔模型下, 空间点到图像点之间的投影关系为

$$\lambda\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_u & s & u_0\\0 & f_v & v_0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

其中, λ 是一个未知尺度因子, $(u,v,1)^{\mathrm{T}}$ 称作向量 $\boldsymbol{m}$ 的齐次坐标表示, K 为要标定的摄像机内参数矩阵.

由于若已知矩阵 KK^{T} 或 $C=K^{-\mathrm{T}}K^{-1}$, 可以很方便地通过 Cholesky 分解得到 K[6], 所以本文对确定 K 或 C 不加区别, 均称为摄像机标定. 在下面的讨论中, 主要讨论对矩阵 C 的确定问题. 由于 C 是一个 3×3 对称齐次矩阵[1], 所以它仅有 5 个独立的元素需要确定.

2.2 极点与扩散焦点

给定摄像机平移运动下摄取的二幅图像, 对应点之间的连线必然交于一点, 该交点在三维重构领域称为极点 (Epipole), 在运动分析领域称为扩散焦点 (Focus of expansion). 假定二幅图像间摄像机的平移运动为 $\boldsymbol{t}$, 摄像机的内参数矩阵为 K, 则极点 $\boldsymbol{e}$ 为

$$\lambda\boldsymbol{e}=K\boldsymbol{t}$$

这里 $\boldsymbol{e}$ 为齐次坐标形式.

在本文中, 我们假定所有摄像机正交运动下图像的极点已经计算得到. 关于如何计算极点, 感兴趣的读者可参阅文献 [6] 第 220～222 页.

2.3 一组正交运动对摄像机内参数的约束

假定 $\boldsymbol{t}_1$ 和 $\boldsymbol{t}_2$ 为一组正交运动向量, 那么

$$\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_2=0$$

利用平移运动与极点之间的关系, 上式也可以写成

$$\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_2=(K\boldsymbol{t}_1)^{\mathrm{T}}(K^{-\mathrm{T}}K^{-1})(K\boldsymbol{t}_2)=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{e}_2=0 \qquad (1)$$

由于平移 $\boldsymbol{t}_1$ 下的极点 $\boldsymbol{e}_1$ 和平移 $\boldsymbol{t}_2$ 下的极点 $\boldsymbol{e}_2$ 假定已知, 所以式 (1) 为对内参数矩阵 C 的一个约束. 给定 5 组正交平移运动, 就可以得到 5 个形如式 (1) 的约束方程. 很显然, 并不是所有 5 组运动下的约束方程都必然是独立的.

[1] 如果 C 是一个解, 那么 λC 也必然是一个解, 这里 λ 是一个任意非零常数.

3　三正交情况下的一个不独立的具体例子

3.1　等价性

命题 1. 给定 5 组摄像机正交平移运动 $\{(\boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i)\ i = 1,2,3,4,5\}$, 它们对应的 5 组极点为 $\{(\boldsymbol{e}_1^i, \boldsymbol{e}_2^i)\ \ i = 1,2,3,4,5\}$, 则下面的约束方程组关于矩阵 $C(c_{33} = 1)$ 有唯一解.

$$\left(\boldsymbol{e}_1^i\right)^{\mathrm{T}} C\boldsymbol{e}_2^i = 0, \qquad i = 1,2,3,4,5 \tag{2}$$

与下面关于对称矩阵 A 的约束方程组

$$\left(\boldsymbol{t}_1^i\right)^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{t}_2^i = 0, \qquad i = 1,2,3,4,5 \tag{3}$$

有唯一解 $A(a_{33} = 1) = I$ 等价. 其中, c_{33} 为矩阵 C 的第三行、第三列元素, a_{33} 为矩阵 A 的第三行、第三列元素, I 为单位阵.

命题 1 可以很容易证明, 这里就不赘述. 基于命题 1, 关于对式 (2) 独立性的讨论, 就可以转化为对式 (3) 独立性的讨论.

命题 2. 给定 1 组摄像机三正交运动 (即 3 个向量相互正交)$\{\boldsymbol{t}_x, \boldsymbol{t}_y, \boldsymbol{t}_z\}$, 另外给定 2 组平移正交向量 $\{\boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i, (i = 1,2)\}$, 在这 7 个平移向量 $\{\boldsymbol{t}_x, \boldsymbol{t}_y, \boldsymbol{t}_z, \boldsymbol{t}_1^1, \boldsymbol{t}_2^1, \boldsymbol{t}_1^2, \boldsymbol{t}_2^2\}$ 中, 如果任意 3 个不共面, 则由 5 组正交平移运动 $\{(\boldsymbol{t}_x, \boldsymbol{t}_y), (\boldsymbol{t}_x, \boldsymbol{t}_z), (\boldsymbol{t}_y, \boldsymbol{t}_x), (\boldsymbol{t}_1^1, \boldsymbol{t}_2^1), (\boldsymbol{t}_1^2, \boldsymbol{t}_2^2)\ \}$ 产生的 5 个关于矩阵 A 的约束方程组 (3) 不一定线性独立.

下面是一个约束方程组非线性独立的具体例子.

已知摄像机三正交平移运动为

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

另 2 组正交平移运动为

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}52/11+1\\78/11+6\\-130/11-7\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}14\\8\\-13/3-11\end{pmatrix}$$

则由这 5 组正交平移运动产生的 5 个约束方程不独立.

证明.

首先, 很容易验证, 下面的 7 个向量中没有任何 3 个共面 (如利用 Matlab).

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}52/11+1\\78/11+6\\-130/11-7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}14\\8\\-13/3-11\end{pmatrix}$$

其次, 将给定的三正交平移向量代入约束方程组 (3), 则矩阵 A 成为

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

此时, 矩阵 A 仅有 2 个未知量需要确定. 再将另 2 组正交平移向量代入式 (3), 则有以下 2 个关于 a_1, a_2 的约束方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 52/11+1 \\ 78/11+6 \\ -130/11-7 \end{pmatrix} =$$

$$(52/11+1)a_1 + (78/11+6)a_2 - 130/11 - 7 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ -13/3-11 \end{pmatrix} =$$

$$14a_1 + 32a_2 - 46 = 0$$

方程 $(52/11+1)a_1 + (78/11+6)a_2 - 130/11 - 7 = 0$ 可以简化为

$$63a_1 + 144a_2 - 207 = 0$$

由于下面的约束方程组

$$\begin{cases} 14a_1 + 32a_2 - 46 = 0 \\ 63a_1 + 144a_2 - 207 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵的行列式为 0, 即 $\det\begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 63 & 144 \end{pmatrix} = 144 \times 14 - 32 \times 63 = 2016 - 2016 = 0$. 所以这两个约束方程不独立. 上述证明同时表明, 5 个约束方程中仅有 4 个是独立的. □

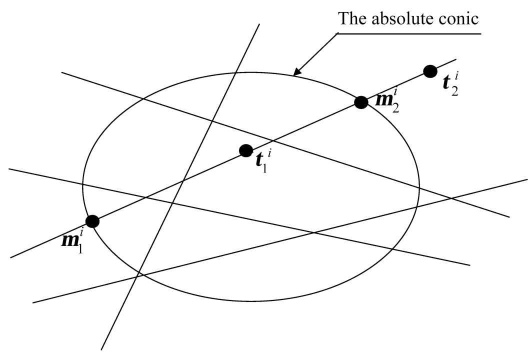

图 1　$\{(\boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i),\ i = 1,2,3,4,5\}$ 为 5 组正交向量在无穷远平面上对应的 5 组点对, $\{(\boldsymbol{m}_1^i, \boldsymbol{m}_2^i),\ i = 1,2,3,4,5\}$ 为直线 $\boldsymbol{t}_1^i$, $\boldsymbol{t}_2^i$ 与绝对二次曲线的交点, 即圆环点, 则 $(\boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i, \boldsymbol{m}_1^i, \boldsymbol{m}_2^i)$ 4 点调和共扼

Fig. 1　$\{(\boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i),\ i = 1,2,3,4,5\}$ are the five pairs of points at infinity corresponding to the five sets of orthogonal translations. $\{(\boldsymbol{m}_1^i, \boldsymbol{m}_2^i),\ i = 1,2,3,4,5\}$ are the circular points, *i.e.*, the intersecting points between the absolute conic and the lines determined by $\{(\boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i),\ i = 1,2,3,4,5\}$. $(\boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i, \boldsymbol{m}_1^i, \boldsymbol{m}_2^i)$ are harmonic conjugate points.

从上面的讨论知, 由于一个平移向量在三维射影空间中等价为无穷远平面上的一点, 所以, 确定式 (3) 的唯一解等价于在无穷远平面上唯一地确定绝对二次曲线 (Absolute conic). 如图 1 (见上页) 所示. 由于一组平移运动 $\{\boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i\}$ 在无穷远平面上决定了一条过 $\boldsymbol{t}_1^i$, $\boldsymbol{t}_2^i$ 两点的直线, 该直线与绝对二次曲线交于两个圆环点 (Circular points) $\boldsymbol{m}_i^i$, $\boldsymbol{m}_2^i$, 则 $\left(\boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i, \boldsymbol{m}_1^i, \boldsymbol{m}_2^i\right)$ 为调和共扼点, 它们之间的交比为 –1, 即

$$\mathrm{Cross}\{\boldsymbol{m}_1^i, \boldsymbol{m}_2^i, \boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i\} = -1 \tag{4}$$

所以, 问题变成给定 5 组无穷远平面上的点对 $\left(\boldsymbol{t}_1^i, \boldsymbol{t}_2^i,\ i = 1,2,3,4,5\right)$, 如何利用式 (4) 唯一确定绝对二次曲线的问题. 但我们目前还无法解决这个问题.

4 结论

本文证明了当 5 组正交运动中其中的 3 组构成一个三正交运动时, 此时尽管构成 5 组正交运动的 7 个平移向量没有任意 3 个共面, 但产生的 5 个约束方程却可能不独立, 并给出了一个不独立的具体例子.

References

1 Hu Zhan-Yi, Wu Fu-Chao. Recent progress in active vision based camera calibration. *Chinese Journal of Computers*, 2002, **25**(11): 1149~1156
(胡占义, 吴福朝. 基于主动视觉摄像机标定方法. 计算机学报, 2002, **25**(11): 1149~1156)

2 Ma S D. A self-calibration technique for active vision system. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1996, **12**(1): 114~120

3 Yang C J, Hu Z Y. An intrinsic parameters self-calibration technique for active vision system. In: Proceedings of IEEE International Conference on Pattern Recognition. IEEE, 1998. 67~69

4 Li Hua, Wu Fu-Chao, Hu Zhan-Yi. A new linear camera self-calibration technique. *Chinese Journal of Computers*, 2000, **23**(11): 1121~1129
(李华, 吴福朝, 胡占义. 一种新的线性摄像机自标定方法. 计算机学报, 2000, **23**(11): 1121~1129)

5 Lei Cheng, Wu Fu-Chao, Hu Zhan-Yi. A new camera self-calibration method based on active vision system. *Chinese Journal of Computers*, 2000, **23**(11): 1130~1139
(雷成, 吴福朝, 胡占义. 一种新的基于主动视觉系统的摄像机自标定方法. 计算机学报, 2000, **23**(11): 1130~1139)

6 Hartley R, Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. London: Cambridge University Press, 2000

孙凤梅 北方工业大学副教授. 主要研究方向为光电信息处理和计算机视觉. 本文通信作者. E-mail: fmsun@163.com
(**SUN Feng-Mei** Associate professor at North China University of Technology. Her research interest covers photo-electric information processing and 3D computer vision. Corresponding author of this paper.)

王卫宁 首都师范大学副教授. 主要研究方向为光电信息处理和计算机视觉. E-mail: wangwn2008@yahoo.com
(**WANG Wei-Ning** Associate professor at Capital Normal University. Her research interest covers photo-electric information processing and 3D computer vision.)