

有色噪声干扰输出误差系统的偏差补偿 递推最小二乘辨识方法

张勇¹ 杨慧中¹

摘要 借助于偏差补偿原理和预滤波思想, 推导了有色噪声干扰输出误差系统参数估计的偏差补偿递推最小二乘 (Bias compensation recursive least squares, BCRLS) 辨识方法. 该方法降低了辨识对输入信号平稳性的要求, 实现了偏差补偿方法参数估计的递推计算, 可以用于在线辨识. 提出的递推 BCRLS 辨识方法优于非递推偏差补偿最小二乘算法, 提高了参数估计精度. 仿真试验证实了算法的有效性.

关键词 输出误差系统, 参数估计, 递推辨识, 最小二乘, 偏差补偿原理
中图分类号 TP273

Bias Compensation Recursive Least Squares Identification for Output Error Systems with Colored Noises

ZHANG Yong¹ YANG Hui-Zhong¹

Abstract Based on the bias compensation principle and pre-filtering idea, this paper derives a bias compensation recursive least squares (BCRLS) identification algorithm for output error systems with colored noises. The algorithm proposed, which does not require the input signals to be stationary and ergodic, carries out the recursive computation of the bias compensation methods and can be on-line implemented. The BCRLS algorithm has advantage over the non-recursive bias compensation algorithms and can give highly accurate parameter estimation. The simulation results confirm the theoretical results.

Key words Output error systems, parameter estimation, recursive identification, least squares, bias compensation principle

1 引言

考虑下列有色噪声干扰输出误差系统的辨识问题^[1]

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t) + e(t) \quad (1)$$

其中, $y(t)$ 为系统输出, $u(t)$ 为系统输入, $e(t)$ 是与输入 $u(t)$ 不相关的有色干扰噪声, $A(z)$ 和 $B(z)$ 均为单位后移算子 z^{-1} 的互质多项式 [$z^{-1}y(t) = y(t-1)$], 且

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a} \\ B(z) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b} \end{aligned}$$

不妨设 $t \leq 0$ 时, $u(t) = 0, y(t) = 0, e(t) = 0$. 假设

收稿日期 2006-9-12 收修改稿日期 2007-2-1
Received September 12, 2006; in revised form February 1, 2007
国家自然科学基金 (60674092, 60574051), 江苏省高技术研究 (工业) (BG2006010) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60674092, 60574051), High-tech R&D Program of Jiangsu (Industry) (BG2006010)

1. 江南大学通信与控制工程学院 无锡 214122
1. School of Communication and Control Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122
DOI: 10.1360/aas-007-1053

系统模型阶次 n_a 和 n_b 已知. 对于噪声模型结构未知的系统, 常规最小二乘方法 (Least squares, LS) 给出的参数是有偏的^[2], 也无法运用基于模型等价理论的脉冲响应方法来估计其参数^[3]. 偏差校正或偏差消除或偏差补偿辨识方法是获得随机系统无偏参数估计的重要方法. 多年来, Zheng 等提出了一些偏差消除方法 (Bias compensation least squares, BCLS) 来研究各种有色噪声干扰系统的辨识问题, 例如输出误差系统^[4]、相关噪声干扰的 ARX 模型^[5]、自回归模型^[6]、变量误差模型^[7] 等. 而这些基于相关分析的偏差消除辨识方法都是假设系统输入是平稳的 (Stationary) 和各态遍历的 (Ergodic), 且算法是非递推的, 不能用于在线辨识. 尽管杨等^[8] 提出了辨识 Box-Jenkins 模型的偏差补偿方法无需平稳性假设, 也不能用于在线辨识. 最近, 丁等^[9] 针对 (白噪声干扰) 输出误差多输入单输出系统, 提出了偏差补偿递推最小二乘辨识算法 (Bias compensation recursive least squares, BCRLS); 这是一种很新颖和有效的辨识方法, 无需输入信号平稳和各态遍历的假设, 进一步说明 BCRLS 算法优于非递推 (基于相关分析) 的偏差补偿辨识算法. 本文针对有色噪声干扰的输出误差系统, 利用系统输

入输出数据 $\{u(t), y(t)\}$, 基于偏差补偿原理, 研究和提出的 BCRLS 算法, 来获得参数 a_i 和 b_i 的无偏估计.

本文借助于偏差补偿基本原理, 通过设计一个预滤波器, 对系统输入信号进行滤波, 把滤波器的已知零点嵌入到系统中, 然后利用零点提供的信息, 补偿最小二乘估计中噪声引起的偏差, 进而推导偏差补偿递推辨识方法. 它能够在线辨识非平稳信号作为输入时的有色噪声干扰输出误差系统的参数, 减小了辨识对输入为平稳信号的要求. BCRLS 辨识方法与非递推偏差补偿辨识方法相比, 模型参数估计精度得以提高, 这些通过仿真例子进行了说明. 并且该算法不同于 Zheng 的偏差补偿类方法^[4~7], 原因在于他的方法是非递推的, 也不同于文献 [9] 的白噪声干扰输出误差系统的偏差补偿递推辨识方法, 因为 BCRLS 算法讨论的是有色噪声干扰的输出误差系统.

2 偏差补偿辨识的基本原理

定义参数向量 θ 、信息向量 $\varphi(t)$ 和噪声向量 $\varphi_e(t)$ 如下

$$\begin{aligned}\theta &= [a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}]^T \in \mathbf{R}^n \\ \varphi(t) &= [-y(t-1), \dots, -y(t-n_a), u(t-1), \\ &\quad \dots, u(t-n_b)]^T \in \mathbf{R}^n \\ \varphi_e(t) &= [e(t-1), \dots, e(t-n_a), \\ &\quad 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^n, n = n_a + n_b.\end{aligned}$$

则系统 (1) 可转化为

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + \varphi_e^T(t)\theta + e(t) \quad (2)$$

极小化输出误差准则函数

$$J(t) = \sum_{i=1}^t [y(i) - \varphi^T(i)\theta]^2$$

容易得到参数 θ 的最小二乘估计

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{LS}(t) &= P(t) \sum_{i=1}^t \varphi(i)y(i) = \\ &\theta + P(t) \sum_{i=1}^t \varphi(i)[\varphi_e^T(i)\theta + e(i)] \quad (3)\end{aligned}$$

$$P^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \varphi(i)\varphi^T(i)$$

式 (3) 两边同乘以 $P^{-1}(t)$ 可得

$$P^{-1}(t)[\hat{\theta}_{LS}(t) - \theta] = \sum_{i=1}^t \varphi(i)[\varphi_e^T(i)\theta + e(i)]$$

两边除以 t 取极限得

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} P^{-1}(t)[\hat{\theta}_{LS}(t) - \theta] &= \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varphi(i)\varphi_e^T(i) \right] \theta + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varphi(i)e(i) \quad (4)\end{aligned}$$

由假设噪声 $e(t)$ 与输入 $u(t)$ 不相关, 可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u(i-j)e(i) = 0, \forall j$$

假设 $\{e(t)\}$ 是零均值、平稳随机有色噪声, 定义噪声时间平均相关函数

$$r_e(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t e(i-j)e(i), \quad j = 0, 1, \dots, n_a$$

相关矩阵 Λ , R 和相关向量 ρ , \mathbf{p} 定义如下

$$\begin{aligned}\Lambda &= \begin{bmatrix} r_e(0) & r_e(1) & \cdots & r_e(n_a-1) \\ r_e(1) & r_e(0) & \cdots & r_e(n_a-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_e(n_a-1) & r_e(n_a-2) & \cdots & r_e(0) \end{bmatrix} \\ \rho &= [r_e(1), r_e(2), \dots, r_e(n_a)] \\ R &= - \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varphi(i)\varphi_e^T(i) \right] = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n} \\ \mathbf{p} &= - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varphi(i)e(i) = [\rho, 0]^T \in \mathbf{R}^n\end{aligned}$$

R 和向量 \mathbf{p} 中 0 表示适当维数的零矩阵, 则利用式 (2), 由式 (4) 可得

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} P^{-1}(t)[\hat{\theta}_{LS}(t) - \theta] &= \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varphi(i)\varphi_e^T(i) \right] \theta + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varphi(i)e(i) &= \\ - (R\theta + \mathbf{p}) \quad (5)\end{aligned}$$

若输入 $u(t)$ 为持续激励信号, 则 $P(t)$ 是一个正定矩阵. 即对于 t , 下列持续激励条件成立

$$\frac{P(t)}{t} > 0$$

在某种程度上, 这个条件与文献 [10] 中提到的弱激励条件和文献 [11] 中提到的强激励条件密切相关.

定义

$$\Delta\theta(t) = -P(t)t[R\theta + \mathbf{p}]$$

则由式 (4) 与 (5) 可以写出以下关系

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{LS}(t) = \theta - \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)t[R\theta + p] = \theta + \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\theta(t) \quad (6)$$

下面对文献 [4] 需要输入信号平稳性和遍历性假定^[11] 做简要说明. 定义信息向量 $\varphi(t)$ 的相关函数矩阵

$$S_\varphi(t) = E[\varphi(t)\varphi^T(t)]$$

如果系统信号是二阶矩平稳和各态遍历的, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^{-1}(t)/t$ 存在, $S_\varphi(t)$ 是不依赖于 t 的常数矩阵 (记作 S_φ), 且 $S_\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} P^{-1}(t)/t$ (根据各态遍历的定义). 在这种假设下, 式 (6) 可写为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{LS}(t) = \theta - S_\varphi[R\theta + p] \quad (7)$$

式 (7) 是平稳信号输入下偏差补偿辨识的基本关系式, 文献 [4] 的方法隐含了各态遍历假设, 即要求 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^{-1}(t)/t$ 有限. 而在非平稳情形, $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)/t$ 是时变的, 用一个常数矩阵 S_φ 代替会造成大的误差 (参见下文仿真实例).

式 (6) 说明, 有色噪声干扰模型的最小二乘估计 $\hat{\theta}_{LS}(t)$ 是有偏的. 如果在最小二乘估计 $\hat{\theta}_{LS}(t)$ 中引入补偿项 $P(t)t[R\theta + p]$, 就可获得 θ 的无偏估计 $\hat{\theta}_B(t)$. 这就是偏差补偿最小二乘辨识的基本原理. 由于 p 与 R 是未知的, 我们用其估计项 $\hat{p}(t)$ 与 $\hat{R}(t)$ 代替. 因此 $\hat{\theta}_B(t)$ 可以表示为

$$\hat{\theta}_B(t) = \hat{\theta}_{LS}(t) + P(t)t[\hat{R}(t)\hat{\theta}_B(t-1) + \hat{p}(t)] \quad (8)$$

其中协方差阵 $P(t)$ 可以通过观测数据计算得到. 但 p 与 R 是未知的, 所以无偏估计 $\hat{\theta}_B(t)$ 的关键问题是如何估算 $\hat{p}(t)$ 与 $\hat{R}(t)$.

下面基于观测的输入输出数据 $\{y(t), u(t)\}$, 利用准则函数的递推计算及稳定的预滤波给定的相关零点信息, 在线估计出噪声时间平均相关函数; 再利用偏差补偿原理校正最小二乘估计, 推导一个偏差补偿递推最小二乘辨识算法, 以获得系统模型参数的无偏估计.

3 偏差补偿方法

在系统 (1) 中, 若 $e(t)$ 为白噪声, 则 $r_e(j) = 0, \forall j \neq 0$, 于是无偏递推辨识的关键就转化为对 $r_e(0)$ 的求解^[9]. 而本文中 $e(t)$ 被假设为有色相关噪声, 故文献 [9] 的方法不适用. 为了得到有色噪声干扰下系统 (1) 参数的无偏估计, 本文引入预滤波思想来研究系统 (1) 的偏差补偿辨识方法, 把滤波器的已知零点嵌入到系统中, 然后利用零点提供的信息, 补偿最小二乘估计中噪声引起的偏差, 进而推导偏差补偿递推辨识方法.

为了得到式 (8) 中的 $\hat{p}(t)$ 与 $\hat{R}(t)$, 在系统的输入端引入一个稳定的 n_a 阶预滤波器 $1/F(z)$, 其中

$$F(z) = (1 - \lambda_1 z^{-1})(1 - \lambda_2 z^{-1}) \cdots (1 - \lambda_{n_a} z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots + f_{n_a} z^{-n_a}$$

其所有零点满足 $0 < \lambda_i < 1 (i = 1, 2, \dots, n_a)$. 令

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{F(z)}u(t)$$

$$\bar{B}(z) = F(z)B(z) = \bar{b}_1 z^{-1} + \bar{b}_2 z^{-2} + \cdots + \bar{b}_n z^{-n}$$

于是系统 (1) 可以等价于

$$y(t) = \frac{\bar{B}(z)}{A(z)}\bar{u}(t) + e(t) \quad (9)$$

再定义参数向量 $\bar{\theta}$, 信息向量 $\bar{\varphi}(t)$ 和噪声向量 $\bar{\varphi}_e(t)$ 如下

$$\bar{\theta} = [a_1, \dots, a_{n_a}, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n]^T \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$$

$$\bar{\varphi}(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n_a), \bar{u}(t-1), \dots, \bar{u}(t-n)]^T \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$$

$$\bar{\varphi}_e(t) = [e(t-1), \dots, e(t-n_a), 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^{\bar{n}}, \bar{n} = n_a + n$$

则系统 (9) 可转化为

$$y(t) = \bar{\varphi}^T(t)\bar{\theta} + \bar{\varphi}_e^T(t)\bar{\theta} + e(t) \quad (10)$$

参数向量 $\bar{\theta}$ 的最小二乘估计为

$$\hat{\theta}_{LS}(t) = P_1(t) \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}(i)y(i) = \bar{\theta} + P_1(t) \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}(i)[\bar{\varphi}_e^T(i)\bar{\theta} + e(i)] \quad (11)$$

$$P_1^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}(i)\bar{\varphi}^T(i)$$

类似于式 (4) 与 (5) 的推导, $\bar{\theta}$ 有式 (12) 的关系

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{LS}(t) = \bar{\theta} + \lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t)t \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}(i)\bar{\varphi}_e^T(i) \right] \bar{\theta} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}(i)e(i) \right\} = \bar{\theta} - \lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t)t[R_1\bar{\theta} + p_1] \quad (12)$$

其中

$$R_1 = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}(i) \bar{\varphi}_e^T(i) = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$$

$$\mathbf{p}_1 = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}(i) e(i) = [\boldsymbol{\rho}, 0]^T \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$$

参照式 (8) 的推导, 可以得到 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_B$ 的无偏估计

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_B(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t) + P_1(t)t[\hat{R}_1(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_B(t-1) + \hat{\mathbf{p}}_1(t)] \quad (13)$$

其中未知的 \mathbf{p}_1 与 R_1 已经用其估计 $\hat{\mathbf{p}}_1(t)$ 与 $\hat{R}_1(t)$ 代替, 下面讨论如何计算 $\hat{\mathbf{p}}_1(t)$ 与 $\hat{R}_1(t)$. 记

$$\bar{B}^*(z) = z^{n_a} F(z) z^{n_b} B(z) = z^n \bar{B}(z) = \bar{b}_1 z^{n-1} + \bar{b}_2 z^{n-2} + \dots + \bar{b}_n$$

则

$$\bar{B}^*(\lambda_i) = \bar{b}_1 \lambda_i^{n-1} + \bar{b}_2 \lambda_i^{n-2} + \dots + \bar{b}_n = 0 \quad (14)$$

定义矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n_a}^{n-1} & \dots & \lambda_{n_a} & 1 \end{array} \right]^T \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{\bar{n} \times n_a}$$

容易得到

$$H^T \bar{\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (15)$$

式 (12) 两边同左乘矩阵 H^T , 可得

$$H^T \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t) = - \lim_{t \rightarrow \infty} H^T P_1(t)t[R_1 \bar{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{p}_1]$$

其近似方程为

$$H^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t) = -H^T P_1(t)t[\hat{R}_1(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_B(t-1) + \hat{\mathbf{p}}_1(t)] \quad (16)$$

定义残差

$$\epsilon(i) = y(i) - \bar{\varphi}^T(i)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t) \quad (17)$$

和准则函数

$$J_1(t) = \sum_{i=1}^t [y(i) - \bar{\varphi}^T(i)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t)]^2 \quad (18)$$

由式 (10) 和下式

$$\sum_{i=1}^t \epsilon(i) \bar{\varphi}^T(i) = 0 \quad (19)$$

参考式 (5) 的推导, 不难得到

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} J_1(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t \epsilon^2(i) = \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t \epsilon(i) [y(i) - \bar{\varphi}^T(i)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}] = \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t \epsilon(i) y(i) = \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t \epsilon(i) [\bar{\varphi}^T(i)\bar{\boldsymbol{\theta}} + \bar{\varphi}_e^T(i)\bar{\boldsymbol{\theta}} + e(i)] = \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t \epsilon(i) [\bar{\varphi}_e^T(i)\bar{\boldsymbol{\theta}} + e(i)] = \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t [y(i) - \bar{\varphi}^T(i)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}] [\bar{\varphi}_e^T(i)\bar{\boldsymbol{\theta}} + e(i)] = \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}^T(i) [\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}] [\bar{\varphi}_e^T(i)\bar{\boldsymbol{\theta}} + e(i)] + \\ & \sum_{i=1}^t [\bar{\varphi}_e^T(i)\bar{\boldsymbol{\theta}} + e(i)]^2 = \\ & r_e(0) + \mathbf{p}_1 \bar{\boldsymbol{\theta}}^T + \bar{\boldsymbol{\theta}}^T [\mathbf{p}_1^T + R_1 \bar{\boldsymbol{\theta}}] - \\ & [\mathbf{p}_1 + R_1 \bar{\boldsymbol{\theta}}]^T P_1(t)t[\mathbf{p}_1 + R_1 \bar{\boldsymbol{\theta}}] \end{aligned}$$

其近似方程为

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} J_1(t) &= \hat{r}_e(0) + \hat{\mathbf{p}}_1^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_B(t-1) + \\ & \hat{\boldsymbol{\theta}}_B^T(t-1) [\hat{\mathbf{p}}_1^T(t) + \hat{R}_1 \hat{\boldsymbol{\theta}}_B(t-1)] - \\ & [\hat{\mathbf{p}}_1(t) + \hat{R}_1(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_B(t-1)]^T P_1(t)t[\hat{\mathbf{p}}_1(t) + \\ & \hat{R}_1(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_B(t-1)] \quad (20) \end{aligned}$$

式 (16) 和 (20) 共有 $n_a + 1$ 个线性方程, 包含了未知标量 $\hat{r}_e(0)$ 、向量 $\hat{\mathbf{p}}_1(t)$ 和矩阵 $\hat{R}_1(t)$, 总共有 $n_a + 1$ 个未知量 $\hat{r}_e(j)$ ($j = 0, 1, \dots, n_a$), 从而可以求解得到未知量.

从 $P_1(t)$ 的定义式和式 (11), 可以得到 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t)$ 的递推关系

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t-1) + P(t)\bar{\varphi}(t)[y(t) - \\ & \bar{\varphi}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t-1)] \\ P_1^{-1}(t) &= P_1^{-1}(t-1) + \bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t) \end{aligned}$$

参照文献 [9] 和上式中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t)$ 的递推关系, 不难得到

准则函数的递推关系

$$J_1(t) = \sum_{i=1}^t [y(i) - \bar{\varphi}^T(i) \hat{\theta}_{LS}(t)]^2 =$$

$$J_1(t-1) + \frac{[y(t) - \bar{\varphi}^T(t) \hat{\theta}_{LS}(t-1)]^2}{1 + \bar{\varphi}^T(t) P_1(t-1) \bar{\varphi}(t)} \quad (21)$$

由式 (13)~(21), 可以归纳出 BCRLS:

$$\hat{\theta}_B(t) = \hat{\theta}_{LS}(t) + P_1(t) t [\hat{R}_1(t) \hat{\theta}_B(t-1) + \hat{p}_1(t)] \quad (22)$$

$$\hat{\theta}_{LS}(t) = \hat{\theta}_{LS}(t-1) + L_1(t) [y(t) - \bar{\varphi}^T(t) \hat{\theta}_{LS}(t-1)] \quad (23)$$

$$L_1(t) = P_1(t-1) \bar{\varphi}(t) [1 + \bar{\varphi}^T(t) P_1(t-1) \bar{\varphi}(t)]^{-1} \quad (24)$$

$$P_1(t) = P_1(t-1) - L_1(t) \bar{\varphi}^T(t) P_1(t-1) \quad (25)$$

在计算 $\hat{\theta}_B(t)$ 的 BCRLS 算法中, 初值一般假设为 $P_1(0) = p_0 I_{\bar{n}}$, p_0 为一个大正数 (如 $p_0 = 10^6$), $I_{\bar{n}}$ 为 \bar{n} 阶单位阵; $\hat{\theta}_{LS}(0)$ 和 $\hat{\theta}_B(0)$ 为零向量或者一个较小的实数向量, 如 $\hat{\theta}_{LS}(0) = \hat{\theta}_B(0) = \mathbf{1}_{\bar{n}}/p_0$, 其中 $\mathbf{1}_{\bar{n}}$ 表示元均 1 的 \bar{n} 维向量, 其具体计算步骤总结如下:

- 1) 采集数据 $\{u(t), y(t)\}$, 设定数据长度 L_e , 并设计稳定滤波器 $F(z)$, 用于对系统输入信号滤波, 形成扩充系统 (9).
- 2) 设定初值, 令 $t = 1$ 时, 取 $p_0 = 10^6$, $P_1(0) = p_0 I_{\bar{n}}$, $\hat{\theta}_{LS}(0) = \hat{\theta}_B(0) = \mathbf{1}_{\bar{n}}/p_0$, $J_1(0) = 0$.
- 3) 根据式 (10) 构造 $\bar{\varphi}(t)$.
- 4) 用式 (21) 计算 $J_1(t)$, 式 (25) 计算 $P_1(t)$, 式 (24) 计算 $L_1(t)$, 式 (23) 计算 $\hat{\theta}_{LS}(t)$, 并由式 (16) 和 (20) 计算出噪声相关函数 $\hat{r}_e(j)$ ($j = 0, 1, \dots, n_a$), 进而得到 $\hat{p}_1(t)$ 与 $\hat{R}_1(t)$.
- 5) 用式 (22) 计算无偏估计 $\hat{\theta}_B(t)$.
- 6) 通过无偏估计 $\hat{\theta}_B(t)$ 和稳定滤波 $F(z)$ 给定的已知零点计算 $\hat{\theta}_B(t)$.
- 7) 如果 $t = L_e + 1$, 那么终止计算, 并且得到参数 θ 的无偏估计 $\hat{\theta}_B(L)$; 否则 t 增加 1, 回到 3).

4 仿真例子

例. 考虑一个二阶仿真对象

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t) + e(t)$$

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

$$B(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

$$\theta = [-1.60, 0.78, 0.84, 0.46]^T$$

假定有色随机噪声干扰由以下 MA 模型产生

$$e(t) = v(t) + 0.6v(t-1) + 0.3v(t-2)$$

其中 $\{v(t)\}$ 采用零均值方差为 σ_v^2 白噪声序列, 系统输入 $\{u(t)\}$ 采用零均值单位方差 ($\sigma_u^2 = 1.00^2$) 不相关可测随机变量序列. 引入如下滤波器

$$F(z) = (1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})$$

将二阶随机线性系统扩展成

$$y(t) = \frac{\bar{B}(z)}{A(z)} \bar{u}(t) + e(t)$$

$$\bar{B}(z) = \bar{b}_1 z^{-1} + \bar{b}_2 z^{-2} + \bar{b}_3 z^{-3} + \bar{b}_4 z^{-4}$$

$$\bar{\theta} = [-1.60, 0.78, 0.84, -0.7166, -0.2408, 0.2208]^T$$

改变 σ_v^2 可以控制噪信比 δ_{ns} . 当 $\sigma_v^2 = 0.50^2$ 时, 系统的噪信比为 $\delta_{ns} = 13.00\%$; 当 $\sigma_v^2 = 1.00^2$ 时, 系统的噪信比为 $\delta_{ns} = 26.01\%$. 系统噪信比定义为输出中 $v(t)$ 的方差 $\text{var}[e(t)] = \sigma_e^2$ 与无噪输出 $x(t)$ 的方差 $\text{var}[x(t)] = \sigma_x^2$ 之比的平方根^[12], 用数学关系式可以表达为

$$\delta_{ns} = \sqrt{\frac{\text{var}[e(t)]}{\text{var}[x(t)]}} \times 100\% = \frac{\sigma_e}{\sigma_x} \times 100\%$$

$$x(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t)$$

在输入数据为平稳信号情况下, 运用 BCRLS 算法、递推最小二乘法 (RLS)、BCLS 算法辨识这个系统的参数, 不同噪信比下的仿真结果如表 1 和表 2, 图 1 和图 2 所示, 其中 $\delta = \|\hat{\theta}(t) - \theta\|/\|\theta\|$ 为系统模型参数估计误差, 数据长度 $L_e = 3000$, 三种方法的参数估计误差 δ 随 t 变化曲线如图 1 和图 2 所示, 参数估计误差曲线可以用来衡量参数估计收敛于真值的速率和参数估计精度.

表 1 平稳信号输入下的参数估计和误差 ($\delta_{ns} = 13.00\%$)

Table 1 Estimates and errors for stationary cases ($\delta_{ns} = 13.00\%$)

t	a_1	a_2	b_1	b_2	δ (%)
参数 RLS 估计					
100	-1.26010	0.50537	0.70450	0.51342	22.78833
500	-1.21858	0.48332	0.69102	0.42877	25.06472
1000	-1.23117	0.49091	0.68655	0.43931	24.41734
1500	-1.23560	0.49335	0.69483	0.44580	24.04583
2000	-1.23341	0.49805	0.68730	0.44646	24.10465
2500	-1.24755	0.50720	0.69449	0.45119	23.19928
3000	-1.24664	0.50591	0.69467	0.45286	23.26614
参数 BCLS 估计					
100	-1.27730	0.83662	0.71066	0.43450	17.47165
500	-1.58474	0.71829	0.83342	0.45385	3.17629
1000	-1.63044	0.72806	0.84668	0.47530	3.09063
1500	-1.65125	0.74833	0.86495	0.48434	3.44347
2000	-1.65527	0.75911	0.85999	0.48783	3.37928
2500	-1.64875	0.76812	0.85993	0.48634	2.97215
3000	-1.65607	0.76013	0.86378	0.49343	3.57487
参数 BCRLS 估计					
100	-1.62200	0.78149	0.86715	0.55416	4.96929
500	-1.56115	0.73888	0.82164	0.44127	3.08507
1000	-1.57444	0.75267	0.81981	0.45198	2.14050
1500	-1.59615	0.76755	0.83854	0.46252	0.66083
2000	-1.59875	0.77512	0.83303	0.46629	0.52713
2500	-1.60427	0.78101	0.83820	0.46887	0.49743
3000	-1.59868	0.77536	0.83601	0.47141	0.64387
真值	-1.60000	0.78000	0.84000	0.46000	

表 2 平稳信号输入下的参数估计和误差 ($\delta_{ns} = 26.01\%$)

Table 2 Estimates and errors for stationary cases ($\delta_{ns} = 26.01\%$)

t	a_1	a_2	b_1	b_2	δ (%)
参数 RLS 估计					
100	-0.96872	0.28323	0.56690	0.52856	42.11293
500	-0.90217	0.26441	0.57671	0.40723	44.93423
1000	-0.89950	0.25591	0.55458	0.41869	45.57315
1500	-0.89303	0.25413	0.55585	0.42254	45.83928
2000	-0.89198	0.26233	0.54272	0.42127	45.85706
2500	-0.91101	0.27020	0.55171	0.42979	44.76268
3000	-0.91235	0.27072	0.55334	0.43266	44.66742
参数 BCLS 估计					
100	-1.01707	0.85886	0.60092	0.41307	31.49979
500	-1.56282	0.65746	0.82614	0.44802	6.39984
1000	-1.65952	0.67467	0.85363	0.49085	6.21363
1500	-1.70697	0.71580	0.89171	0.51003	7.12532
2000	-1.71479	0.73825	0.88144	0.51683	6.97345
2500	-1.70158	0.75737	0.88164	0.51396	6.15466
3000	-1.71733	0.74166	0.88997	0.52858	7.41054
参数 BCRLS 估计					
100	-1.64202	0.78526	0.89430	0.64910	9.95655
500	-1.52323	0.69867	0.80537	0.42469	6.05032
1000	-1.54935	0.72568	0.80062	0.44456	4.22855
1500	-1.59241	0.75497	0.83710	0.46508	1.32619
2000	-1.59755	0.77019	0.82606	0.47254	1.05362
2500	-1.60858	0.78213	0.83642	0.47776	0.99733
3000	-1.59752	0.77085	0.83206	0.48278	1.28251
真值	-1.60000	0.78000	0.84000	0.46000	

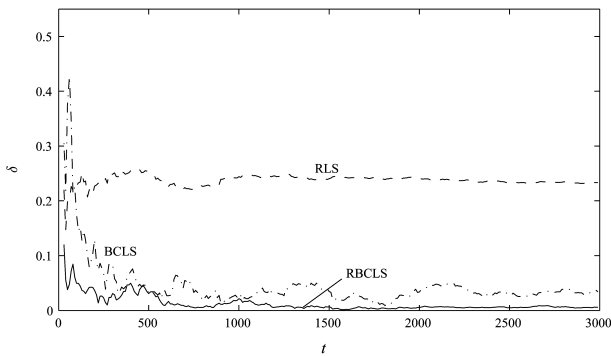


图 1 平稳信号输入下参数估计误差 δ 随 t 的变化曲线 ($\delta_{ns} = 13.00\%$)

Fig. 1 The estimation errors δ changing with t for stationary cases ($\delta_{ns} = 13.00\%$)

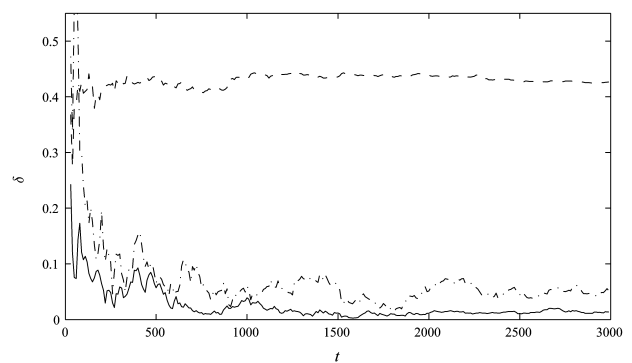


图 2 平稳信号输入下参数估计误差 δ 随 t 的变化曲线 ($\delta_{ns} = 26.01\%$)

Fig. 2 The estimation errors δ changing with t for stationary cases ($\delta_{ns} = 26.01\%$)

在输入数据为非平稳信号输入下, 运用本文提出的方法和 RLS, BCLS^[4] 算法辨识估计的系统参数, 结果如表 3 和图 3 所示, 其中输入数据 $\{u'(t)\}$ 和噪声数据 $\{v'(t)\}$ 由下列关系产生^[9]

$$\begin{aligned} u'(t) &= (1 + t^{0.5})u(t) \\ v'(t) &= (1 + t^{0.5})v(t) \end{aligned}$$

在这种条件下, $P_1(t)/t$ 是随时间变化的, 并且随着 $t \rightarrow \infty$, 即使 $v'(t) = v(t)$ 是白噪声, $P_1(t)/t$ 是时变的, 没有极限, 因而是非平稳的.

下面改变滤波器特性, 对该例再次进行仿真试验. 令

$$F(z) = (1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})$$

得到的参数估计误差曲线如图 4 所示.

表 3 非平稳信号输入下的参数估计和误差
Table 3 Estimates and errors for non-stationary cases

t	a_1	a_2	b_1	b_2	δ (%)
参数 RLS 估计					
100	-1.23548	0.48123	0.67997	0.51187	24.75866
500	-1.21120	0.47532	0.69342	0.41123	25.60509
1000	-1.22034	0.47900	0.67601	0.43931	25.32634
1500	-1.23413	0.49029	0.69500	0.45115	24.18106
2000	-1.23225	0.50036	0.68204	0.45192	24.15888
2500	-1.25698	0.51514	0.69680	0.45834	22.58091
3000	-1.25335	0.51096	0.69681	0.45909	22.83582
参数 BCLS 估计					
100	-1.49693	0.78906	0.79916	0.51852	6.21830
500	-1.63668	0.67448	0.85699	0.45303	5.60125
1000	-1.64863	0.70757	0.84655	0.48321	4.47782
1500	-1.66544	0.75003	0.87288	0.49394	4.25980
2000	-1.66992	0.76232	0.86266	0.50115	4.25818
2500	-1.64963	0.77673	0.86032	0.49229	3.10107
3000	-1.66378	0.76043	0.86785	0.50337	4.17083
参数 BCRLS 估计					
100	-1.65026	0.77567	0.86483	0.56666	5.96498
500	-1.54320	0.72874	0.81206	0.41215	4.67366
1000	-1.55925	0.74358	0.80403	0.44718	3.29849
1500	-1.60015	0.76964	0.84164	0.46880	0.67746
2000	-1.60016	0.77829	0.82938	0.47516	0.91985
2500	-1.60872	0.78665	0.84004	0.47634	0.97385
3000	-1.59817	0.77550	0.83592	0.47847	0.96609
真值	-1.60000	0.78000	0.84000	0.46000	

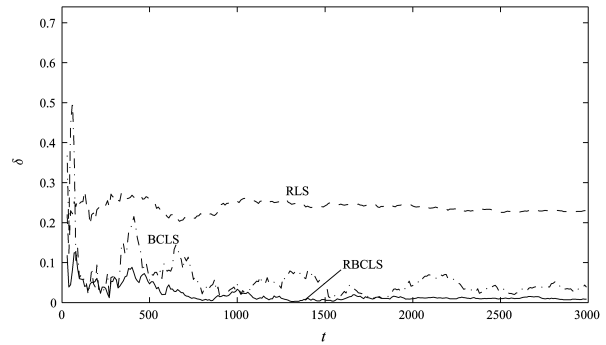


图 3 非平稳信号输入下参数估计误差 δ 随 t 的变化曲线
Fig. 3 The estimation errors δ changing with t for non-stationary cases

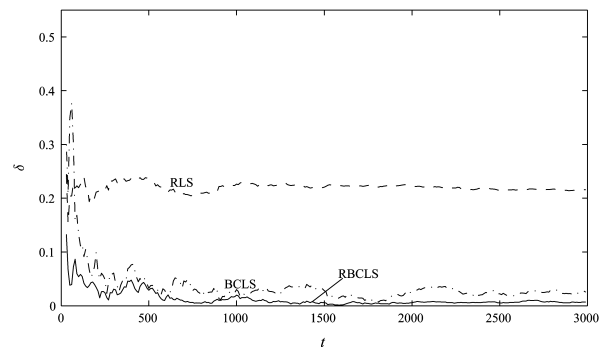


图 4 平稳信号输入下参数估计误差 δ 随 t 的变化曲线 ($\delta_{ns} = 13.00\%$)

Fig. 4 The estimation errors δ changing with t for stationary cases ($\delta_{ns} = 13.00\%$)

从表 1~3、图 1~4 的仿真结果可以看出: 对于有色噪声干扰的输出误差系统, 偏差补偿方法和偏差补偿递推辨识方法的参数估计精度优于递推最小二乘方法; 而偏差补偿递推辨识方法的精度和平稳性优于偏差补偿方法, 尤其在噪声比较大和非平稳输入情况下; 选择不同的滤波器, 参数估计没有明显的变化.

5 结论

本文利用样本相关函数, 在偏差补偿原理的基础上, 推导了一个辨识有色噪声干扰输出误差系统的偏差补偿递推最小二乘辨识方法, 实现了偏差补偿方法的递推辨识. 所提出的偏差补偿递推最小二乘辨识方法不仅保留了偏差补偿最小二乘算法的特点, 还提高了辨识精度, 弥补了偏差补偿算法估计波动比较大的不足, 同时降低了辨识对系统输入信号平稳性的要求.

References

- 1 Ljung L. *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1999
- 2 Xie Xin-Min, Ding Feng. *Adaptive Control Systems*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002
(谢新民, 丁锋. 自适应控制系统. 北京: 清华大学出版社, 2002)
- 3 Zhang Yong, Yang Hui-Zhong, Ding Feng. An identification method of systems with colored noises. *Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2006, **38**(8): 167~171
(张勇, 杨慧中, 丁锋. 有色噪声干扰下的一种系统辨识方法. 南京航空航天大学学报, 2006, **38**(8): 167~171)
- 4 Zheng W X. On a least squares based algorithm for identification of stochastic linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, **46**(6): 1631~1638
- 5 Feng C B, Zheng W X. Robust identification of stochastic linear systems with correlated noise. *IEE Proceedings*, 1991, **138**(5): 484~492
- 6 Zheng W X. Fast identification of autoregressive signals from noisy observations. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2005, **52**(1): 43~48
- 7 Zheng W X. Parameter estimation of stochastic linear systems with noisy input. *International Journal of Systems Science*, 2004, **35**(3): 185~190
- 8 Yang Hui-Zhong, Zhang Yong. Comparisons of bias compensation methods and other identification approaches for Box-Jenkins models. *Control Theory & Applications*, 2007, **24**(2): 215~222
(杨慧中, 张勇. Box-Jenkins 模型偏差补偿方法与其它辨识方法的比较研究. 控制理论与应用, 2007, **24**(2): 215~222)
- 9 Ding F, Chen T, Qiu L. Bias compensation based recursive least squares identification algorithm for MISO systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2006, **53**(5): 349~353
- 10 Ding F, Chen T. Combined parameter and output estimation of dual-rate systems using an auxiliary model. *Automatica*, 2004, **40**(10): 1739~1748
- 11 Ding F, Chen T. Performance bounds of forgetting factor least squares algorithm for time-varying systems with finite measurement data. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2005, **52**(3): 555~566
- 12 Ding Feng, Yang Jia-Ben. Computation formulas of the noise to signal ratio of input output systems. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 1998, **38**(9): 107~110
(丁锋, 杨家本. 系统信噪比的计算. 清华大学学报 (自然科学版), 1998, **38**(9): 107~110)



张勇 江南大学通信与控制工程学院硕士研究生. 2004 年获得大庆石油学院电气信息工程学院自动化系学士学位. 主要研究方向为系统辨识及优化控制.

E-mail: yinghuzhangyong@163.com

(ZHANG Yong Master student at the School of Communication and Control Engineering, Jiangnan University.

He received his bachelor degree in automatic control from Faculty of Electric and Information, Daqing Petroleum Institute in 2004. His research interest covers system identification and optimizing control.)



杨慧中 江南大学通信与控制工程学院教授. 主要研究方向为工业过程建模与优化控制及相关理论与技术的研究. 本文通信作者.

E-mail: yhz@sytu.edu.cn

(YANG Hui-Zhong Professor at the School of Communication and Control Engineering, Jiangnan University.

Her research interest covers modeling and optimizing control. Corresponding author of this paper.)

附录

式 (19) 的证明. 将式 (17) 代入式 (19) 中, 可得

$$\sum_{i=1}^t \epsilon(i) \bar{\varphi}^T(i) = \sum_{i=1}^t [\bar{\varphi}(i) \epsilon(i)]^T = \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}^T(i) y(i) - \left\{ \left[\sum_{i=1}^t \bar{\varphi}(i) \bar{\varphi}^T(i) \right] \hat{\theta}_{LS}(t) \right\}^T$$

把式 (11) 代入上式, 于是有

$$\sum_{i=1}^t \epsilon(i) \bar{\varphi}^T(i) = \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}^T(i) y(i) - \left\{ \left[\sum_{i=1}^t \bar{\varphi}(i) \bar{\varphi}^T(i) \right] P_1(t) \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}(i) y(i) \right\}^T$$

由 $P_1(t)$ 的定义, 上式有

$$\sum_{i=1}^t \epsilon(i) \bar{\varphi}^T(i) = \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}^T(i) y(i) - \sum_{i=1}^t \bar{\varphi}^T(i) y(i) = 0$$

□