

控制与本质非线性问题

黄琳¹ 耿志勇¹ 王金枝¹ 段志生¹ 杨莹¹

摘要 回顾了控制理论的发展,并讨论了线性系统、单平衡位置系统的本质特征.重点介绍了多平衡点非线性系统的本质非线性特征,复杂多彩的动态特性,包括自振、混沌、同宿轨、异宿轨,特别是讨论了高阶系统的复杂性.进一步讨论了控制介入到本质非线性系统后可能的发展前景与挑战.

关键词 本质非线性,多平衡点,总体性质

中图分类号 TP273

Problems in Control and Intrinsic Nonlinearities

HUANG Lin¹ GENG Zhi-Yong¹ WANG Jin-Zhi¹ DUAN Zhi-Sheng¹ YANG Ying¹

Abstract This paper reviews the development of control theory and the characteristics of linear systems and systems with unique equilibrium. Intrinsic nonlinear characteristics and complex dynamical behaviors are discussed for nonlinear systems with multiple equilibria, including self-oscillation, chaos, homoclinic orbit and heteroclinic orbit, especially for higher order systems. Further, challenges and opportunities are discussed when control is involved with intrinsic nonlinear characteristics.

Key words Intrinsic nonlinearity, multiple equilibria, global properties

1 控制科学发展的回顾

控制科学大致起源于上世纪二十年代,其代表性的工作可以以美国 Nyquist 的经典论文为标志,这一工作大致反映了当时伺服系统的基本要求,即使单个的被控制量保持恒定,或使单个的控制量去追踪一个给定的运动,这两者在常系数线性系统的模式下都可以归结为系统的单个工作点或单平衡位置的稳定性.对于单平衡位置稳定性的研究几乎支撑了当时整个伺服机构理论的研究,其中包含频域方法和根轨迹方法.此时,有人从控制工程的直觉提出了系统稳定性应由输入输出的性质来进行描述,即提出系统稳定应是有界输入下只对应有界输出(BIBO 稳定).后来,人们在线性系统可控可观的假定下发现这种 BIBO 稳定与平衡位置的渐近稳定根本是等价的,这一发现在时变线性系统只要加上某种“一致性”假定以后也能成立,于是人们就更加坚

信单平衡位置稳定性研究的合理及其可能具有很大的应用空间.

上世纪六十年代兴起的现代控制理论,一方面使控制理论的研究不再囿于单输入单输出系统而扩大了其理论研究和实际应用的范围,另一方面在控制目的上依然围绕着单平衡位置稳定性问题而展开.这一时期的工作由于系统模式、问题提法以及相应的性能指标的一般化与理论化,使得控制理论获得巨大的发展动力,并迅速成长出一门新的应用数学分支——控制数学.数学理论的深入与完善,以及控制工程由于系统、环境与性能要求的复杂化大都依靠计算机的计算和仿真,使控制理论与应用的发展各自走自己的路,并不密切相关.但无论是控制数学还是以计算机为基础的应用方法,其工作的出发点依然首先是讨论系统单平衡位置的稳定性.

上世纪八十年代,针对系统的非线性模式而出现了以微分流形理论为基础,应用微分同胚映射来对非线性系统进行线性化的方法.这一方法的核心在于寻求状态空间、控制空间和联系控制与状态的反馈空间的几个可微映射,将系统转化成一个线性系统,被称为非线性系统的反馈线性化方法.这种方法在卫星姿态控制中已有应用,但控制的目的依然是保证单平衡位置的稳定性.对于具有本质非线性现象的系统,这种将系统纳入线性框架的做法不再

收稿日期 2006-11-10 收修改稿日期 2007-2-25
Received November 10, 2006; in revised form February 25, 2007
国家自然科学基金(60334030, 10472001, 60404007)资助
Supported by National Natural Science Foundation of China
(60334030, 10472001, 60404007)
1. 北京大学工学院力学与空天技术系湍流与复杂系统国家重点实验室
北京 100871
1. State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems,
Department of Mechanics and Aerospace Technology, College of
Engineering, Peking University, Beijing 100871
DOI: 10.1360/aas-007-1009

起作用. 事实上这种非线性控制理论完全是平行于线性系统几何理论的, 人们在开始接触这类方法时, 常对微分流形理论的概念、理论、方法感到难以理解, 如果能将微分流形理论中的概念和线性代数中的概念作一番对照, 就比较容易理解了.

控制理论在上个世纪八十年代的展中, 控制的目的基本上都围绕实现单平衡位置稳定性这一主题展开, 人们几乎一想到设计控制器, 其第一目的就是实现闭环系统平衡位置的渐近稳定.

2 丰富多彩的本质非线性现象

人们对于在系统中出现的本质非线性现象的了解起源于上个世纪三十年代关于自振的研究. 事实上自振这一种物理现象, 人们在机械式钟表早已见到, 但作为极限环的研究则首推 Van der Pol 方程, 随后这种自振现象不仅在电子线路中, 而且在生态系统中都得到了解释. 上个世纪四十年代后发展起来的非线性振动主要还是解决一个自由度即二阶系统的问题, 甚至关于平面二阶自治系统的极限环的研究在上世纪中叶直至八十年代还是相当多数学家与应用数学家关注的中心. 随着混沌现象在上世纪八十年代成为研究的热点, 人们对非线性系统中的本质非线性现象的研究、发现均投入了大量的兴趣, 这不仅在力学界, 而且在物理、数学, 乃至工程应用均有大量涉及.

这里所指的“本质非线性”是指那些动力学特征不可能在线性系统中出现的动力学特性. 相对说来, 线性系统由于其解满足迭加原理而十分简单, 线性系统原点附近的性能就反映了系统的全部性能, 因而对线性系统不存在局部与全局的本质区别, 而其解就常系数线性系统而言也只有发散、收敛与简单周期运动这三类, 并且只要有周期运动, 则这一周期运动所决定的子空间内的运动就都是周期的, 这表明周期运动将不可能是孤立的, 因此在非线性系统中出现的多平衡位置、自振、混沌、同宿轨、异宿轨等都不可能在线性系统中发生, 并且由于微分同胚变换不改变任何吸引子的维数, 因而这也不可能在那些可通过微分同胚变换转换成线性系统的非线性系统中发生. 这也表明用微分流形方法研究的非线性控制理论在讨论这些本质非线性现象时并不奏效, 要研究这些问题十分有趣但是困难重重.

对于一个具有多平衡点的系统, 以最简单的自治非线性系统而言, 如果系统的每个解最后都收敛

到一个平衡点, 容易从拓扑学的角度证明这些平衡点之中一定存在 Lyapunov 意义下不渐近稳定的平衡点. 这种复杂的图象在包含摆、简单的电力系统、锁相回路、同步电机的系统中常出现. 当平衡位置在空间中是周期分布时, 常称这类系统为类摆系统. 如果要求描述这类系统的状态空间与现实的物理空间之间一一对应时, 对应的状态空间应是具旋转特征的柱空间或环空间^[1~3]. 现代的微分方程、动力系统乃至控制理论的研究, 总着眼于不通过具体求解而研究系统的性质, 由于柱空间同欧氏空间 \mathbf{R}^n 并不能用连续变换相互联系, 因而即使分析低阶 (二阶) 类摆系统 $\ddot{x} + k\dot{x} + \varphi(x) = 0, \varphi(x + \Delta) = \varphi(x)$ 的特征, 俄罗斯学者也用了近十几个命题才大致说清楚其运动特征^[2], 这充分体现了这类系统的复杂性, 不可能用简单的办法将周期分布平衡位置的系统化通常单平衡位置系统处理. 对于比较简单的二阶类摆系统, 其平衡位置常常是稳定的焦点与鞍点相间排列, 这种具周期分布的平衡位置常常是系统物理特征决定的, 是不可随意改动的, 即使设计控制器也只能依据物理的客观存在将其保留. 研究柱面空间上的系统, 如果只考虑单平衡点邻域内的局部性问题, 这与通常欧氏空间并无区别, 但当讨论系统的大范围总体性质的问题时就很不一样了, 例如使用柱面空间描述时会发现一些十分复杂的同宿轨、异宿轨与不同形式周期解的存在.

自振现象是人们最早认识的本质非线性现象. 从简单非线性系统中的自振可以看出, 在自振的轨道的邻域内, 一方面不存在别的周期解, 另一方面对在该邻域内取值的任何初始条件来说当 $t \rightarrow +\infty (-\infty)$ 时, 其轨道的极限就是稳定 (不稳定) 的自振. 这一性质让人们能够用来使系统产生一个确定振幅固定频率的周期过程, 这在很多工程领域均有广泛的应用, 例如激光器. 物理上的自振的出现应该是与初始条件存在小偏离的情况无关, 这就是自振的稳定性. 对于自振的稳定性问题, 人们最初的想法认为这也是一种 Lyapunov 意义下的渐近稳定问题, 深入的研究发现了这一想法的局限性. 一方面由于自振常常并不能准确地求出, 即使求出来其摄动所满足的方程也是时变系统. 另一方面更重要的是自振本身是一个系统具动态特征的不变集, 而不变集的稳定性并不能用来描述有动态特征的自振的稳定性, 而应用轨道稳定性刻划, 但这与 Lyapunov 意义下的运动稳定性又有着严格的区别, Lyapunov 意

义下运动的渐近稳定可推出轨道稳定而反过来并不成立, 即自振的运动稳定性远比其它解收敛到极限环要求高得多. 事实上, 任何一个封闭轨道运动本身都不可能是 Lyapunov 意义下渐近稳定的, 这如同两个用同样速度在同一轨道上奔跑的前后两个人将永远不能合在一起是同一道理. 当人们将轨道运动及其摄动代入系统方程后, 其摄动满足的方程将是周期系数的, 其线性近似系统将有一个特征指数为 1, 即处于稳定但不渐近稳定的状态. 用特征指数的方法分析系统轨道的稳定性, 目前好的可用的结果依然很少.

上个世纪下半叶开始是二阶系统自振 (极限环) 研究的热期, 但二阶系统无论建立环域还是 Poincare 映射都相对容易, 而对高阶系统研究自振, 问题就比较大, 这会涉及到: 1) 在高维空间中如何构造一个环域, 它应是系统的一个不变集; 2) 设法建立一个可以用来作 Poincare 映射的截面, 并且保证该截面上出发的运动可以返回到这一截面, 这样才能建立一个 Poincare 映射; 3) 还要对简单的压缩映射拓宽到可建立不动点定理的映射, 这些工作当然要比二阶时对应情况复杂得多.

上个世纪八十年代前后出现了关于混沌的研究, 由于混沌是出自确定性系统而出现的近于随机的现象, 这种吸引子具有分数维而被称为奇怪吸引子, 其维数通常是由 Hausdorff 维数来刻画, 并一直被视为复杂性科学发展进程中一个重要的里程碑. 由于可能应用于保密通讯和脑科学中而成为大家关注的焦点. 过去对于吸引子, 例如平衡点是零维的, 自振是一维的, 以及其它的不变集合, 其维数均为整数, 而混沌的维数是重新定义的 Hausdorff 维数, 这一维数不是拓扑变换的不变量而只是微分同胚变换的不变量, 其取值为分数从本质上刻画了混沌吸引子的奇妙特征^[4~8].

所有上述发生在系统中的本质非线性, 一方面是客观存在的, 必须研究它们; 另一方面这些都具有双刃剑的特征, 即既可为人利用又可造成损害, 这把剑的无论哪一个刃, 对控制研究来说都是充满兴趣的.

3 控制对本质非线性的介入 — 一个充满挑战的领域

以单平衡位置稳定性为中心的控制理论, 持续了近八十年, 这一方面由当时的科技、生产与工程需

求所确定, 同时也受制于当时的科学发展水平, 毕竟非线性科学也还只有不到三十年的发展历史, 不仅从科学自身发展的逻辑看, 而且从应用前景考虑, 现在应该是将控制引入非线性系统去研究实现和消除系统中出现的本质非线性的时候了.

由于非线性系统本身十分复杂, 一般性地研究控制的作用很难奏效, 必须针对某一类具有结构特征和应用背景的系统进行, 例如采用在控制应用上已十分广泛且已有足够研究基础的 Lurie 系统 (见图 1) 作为起步. 这一系统具有一个线性结构和一个非线性函数的环节, 其中 $\varphi(\sigma)$ 具有某种约束. 这种 Lurie 系统在混沌控制中已受到重视, 这是由于 $\varphi(\sigma)$ 的限制可以归结为 u 与 x 的一个特定二次型约束, 其中 σ 是线性部分的输出, 它是线性部分状态的线性函数. 无论是绝对稳定性、自振或混沌的研究, 都与可能发生在系统中的谐波过程有关, 因而这一类问题就有可能在原来研究的绝对稳定性框架下解决, 即得到以 $\varphi(\sigma)$ 的约束条件和 $G(s)$ 所表达的频域不等式解决. 类似的思路 Chua 亦曾指出关于混沌同步理论应建立在 Lurie 控制理论的框架上^[7].

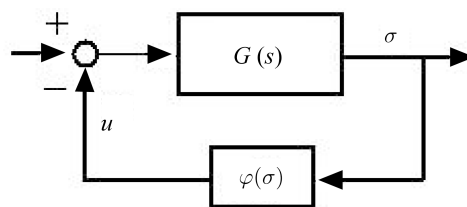


图 1 Lurie 系统框图

Fig. 1 Scheme of a Lurie system

对于非线性系统, 要能刻画其系统性能, 应遵循两个原则, 即

- 1) 反映的是不依赖于具体解, 即不依赖于初始条件的解的一种共性, 或系统的一种特性;
 - 2) 这种性质是可以进行研究和判断的.
- 这些性质包括^[1]:

Lagrange 稳定: 即系统一切解均有界;

双态性: 系统中的解或收敛或无界, 即一切有界解均收敛;

Levinson 耗散: 存在一个有界闭集, 一切解最终均进入该闭集;

类梯度性: 系统中的一切解均收敛.

系统中存在自振、第二类周期解、混沌、部分坐标的混沌.

在研究这些总体性质时,关键在于:

1) 利用由频域不等式刻划的条件,采用联系频域与时域之间的 KYP 引理,将对应的条件转化为矩阵不等式,特别是线性矩阵不等式,再利用凸规划方法求解;

2) 为了讨论自振或第二类周期解,采用由变号 Lyapunov 函数刻划的不变锥,构造系统的不变集,利用该集合建立 Poincare 映射和适于应用的不动点定理(有界紧集上的 Browder 定理);

3) 利用系统具双态性的不等式以排除系统存在自振与混沌的可能.这个条件比系统稳定要低得多,且很多具有特殊物理结构的系统要求全局稳定是不可能的.

相对于解决系统中是否具有特定总体性质的研究,设计控制器以保证产生或避免这些总体性质具有更大的研究空间.从信息流的角度考虑,控制本质上是用一些具动力学特性的通道对系统的输入与输出之间进行联接,在联接过程中要考虑到系统的具体结构与特征,这些联接包括并联、串联、反馈、交叉反馈等.由于系统的总体性质可以用闭合后系统的矩阵所满足的一些矩阵不等式来刻划,虽然这些刻划常常是充分未必必要的,但当我们将表述控制作用的一些矩阵(例如静态反馈时只有一个矩阵)作为变量放在这些矩阵不等式中,通过适当的计算方法可以求出这些反映控制的矩阵解,此时就完成了设计控制器的任务.在设计控制器上,传统的思路并不包含交叉反馈,而是着眼于解耦,协调控制只是一种愿望,但实例证明,交叉反馈有时可以取得更好的效果,例如可以通过增加交叉反馈的办法保证闭合系统中自振、混沌的消失,当然也可以利用交叉反馈将其产生出来^[9,10].

非线性科学已经向我们显示出一个五彩缤纷的动力学世界,这些性质我们不仅在宏观世界中碰到并有所应用,而且在微观世界中非线性的特性所显示出的生命力则更生动且充满未知,今天人们无论是对纳米还是基因的研究,发现其规律与宏观世界所见到的有很多本质区别,我们现在还不清楚在那个领域里控制意味着什么,以及控制引起的动态变化是否与我们目前控制工程中所见的一样,但如果只是把我们关于控制目的的研究限制在单平衡位置稳定性上,我们可能走不了多远,究竟那里的本质非线性又意味着什么,什么是那里的控制,又怎样来设计与实现控制器等,都是具有很大吸引力而促使我

们去研究的.

科学的发展并不都是已有工程的推动,特别是新的领域新的科学问题,周培源先生在一篇文章中列举了十九世纪一系列关于电磁研究的成果后就指出“所有这些理论工作在当时并不是为了解决从生产上提出的特殊问题,谁也没有想到它们会给二十世纪带来电的大规模应用”^[11],这个精辟的看法与爱因斯坦的名言“想象力比知识更重要”,都鼓励我们认清楚一点,即对科学研究来说,现有工程中遇到的问题要去研究、解决、发展、完善,未知的领域则更值得人们去探索.

References

- Huang Lin. *Theoretical Foundation of Stability and Robustness*. Beijing: Science Press, 2003
(黄琳. 稳定性与鲁棒性的理论基础. 北京: 科学出版社, 2003)
- Leonov G A, Ponomarenko V, Smirnova V B. *Frequency Domain Methods for Nonlinear Analysis*. Singapore: World Scientific, 1996
- Leonov G A, Burkin I M, Shepeljavyi A L. *Frequency Methods in Oscillation Theory*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992
- Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flows. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, **20**(2): 130~141
- Madan R. *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*. Singapore: World Scientific, 1993
- Stewart I. The Lorenz attractor exists. *Nature*, 2000, **406**(6799): 948~949
- Curra P F, Chua L O. Absolute stability theory and synchronization problem. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, **7**(6): 1375~1383
- Huang Lin, Yang Ying, Geng Zhi-Yong, Wang Jin-Zhi, Duan Zhi-Sheng. Analysis and control of diversity of system dynamic properties: on the post-absolute stability. *Control Theory and Applications*, 2005, **22**(1): 1~9
(黄琳, 杨莹, 耿志勇, 王金枝, 段志生. 系统动态性能的多样性分析与控制: 后绝对稳定性研究. 控制理论与应用, 2005, **22**(1): 1~9)
- Duan Z S, Wang J Z, Huang L. Input and output coupled nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 2005, **52**(3): 567~575
- Yang Y, Duan Z S, Huang L. Design of nonlinear inter connections guaranteeing the absence of periodic solutions. *Systems and Control Letters*, 2006, **55**(4): 338~346
- Zhou Pei-Yuan. *Enhance the Fundamental Theories: Some Points of Understanding the Natural Science and Fundamental Theories*. Beijing: Press of Popular Science, 1997. 11
(周培源. 努力把基础理论搞上去: 谈谈自然科学和基础理论的几个认识问题. 北京: 科学普及出版社, 1997. 11)



黄琳 中国科学院院士, 北京大学工学院教授. 主要研究方向为稳定性理论及应用, 鲁棒控制和复杂系统控制理论.

E-mail: hl35hj75@pku.edu.cn

(**HUANG Lin** Academician of Chinese Academy of Sciences, professor at the College of Engineering, Peking University.

His research interest covers stability theory and its application, robust control, and complex systems control theories.)



耿志勇 北京大学工学院教授. 1995 年于中科院系统科学所获理学博士学位, 1995 年 7 月至 1997 年 6 月在北京大学力学与工程科学系做博士后研究工作. 主要研究方向为鲁棒控制、非线性系统控制理论.

E-mail: zygeng@pku.edu.cn

(**GENG Zhi-Yong** Professor at the College of Engineering, Peking University. He received his Ph. D. degree from Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers robust control and nonlinear systems control theories.)

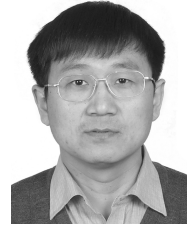


王金枝 北京大学工学院副教授. 1998 年于北京大学获理学博士学位, 之后在中科院系统科学所做博士后研究工作. 主要研究方向为鲁棒控制、受限系统控制. E-mail: jinzhiw@pku.edu.cn

(**WANG Jin-Zhi** Associate professor at the College of Engineering,

Peking University. She received her Ph. D. degree from

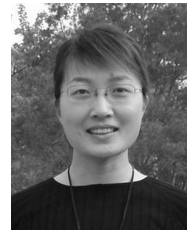
Peking University in 1998, and worked as a postdoctoral fellow in the Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and System Science, Chinese Academy of Sciences. Her research interest covers robust control and control of limited systems.)



段志生 北京大学工学院副教授. 2000 年于北京大学获理学博士学位, 2002 年开始在北京大学力学与工程科学系工作. 主要研究方向为鲁棒控制、大系统稳定性和关联协调控制.

E-mail: duanzs@pku.edu.cn

(**DUAN Zhi-Sheng** Associate professor at the College of Engineering, Peking University. He received his Ph. D. degree from Peking University in 2000. His research interest covers robust control and stability of large scale systems.)



杨莹 北京大学工学院副教授. 2003 年于北京大学获理学博士学位. 主要研究方向为鲁棒控制、非线性系统控制理论. 本文通信作者. E-mail: yy@pku.edu.cn

(**YANG Ying** Associate professor at the College of Engineering, Peking University. She received her Ph. D. degree from Peking University in 2003. Her research interest

covers robust control and nonlinear systems control theory. Corresponding author of this paper.)