

非线性最优控制系统的保辛摄动 近似求解

谭述君¹ 钟万勰¹

摘要 非线性两端边值问题是在非线性最优控制计算中遇到的主要困难, 通常将其转化为线性两端边值问题的迭代求解. 因此, 很有必要发展求解线性时变非齐次方程的两端边值问题的精确、高效算法. 本文通过引入区段混合能的概念, 将问题转化为区段的混合能矩阵及向量的求解, 进一步给出了它们的保辛摄动算法. 该算法具有很强的并行性, 高效而精确. 本文还指出经典的 Riccati 变换方法是该方法的一个特例. 数值算例验证了本文方法的有效性.

关键词 非线性两端边值问题, 非齐次 Riccati 变换, 变系数非线性矩阵 Riccati 方程, 区段混合能, 保辛摄动, 并行运算

中图分类号 TP273

Computation of Nonlinear Optimal Control via Symplectic Conservative Perturbation Method

TAN Shu-Jun¹ ZHONG Wan-Xie¹

Abstract The nonlinear two-point boundary-value problem (TPBVP) poses the major difficulty in the computation of nonlinear optimal control systems, which is usually solved through iteration of the corresponding linearization TPBVP. Therefore, it is necessary to develop accurate and efficient algorithms for TPBVPs of linear time varying systems. By introducing the concept of interval mixed energy, the nonlinear TPBVP can be solved by converting the interval mixed energy matrices and vectors. And the classical Riccati transformation can be regarded as a special case of the interval mixed energy method. Then, an symplectic conservative and strongly parallel perturbation algorithm has been presented. Numerical results demonstrate its effectiveness.

Key words Nonlinear two-point boundary-value problem, inhomogenous Riccati transformation, nonlinear matrix Riccati equation with variable coefficients, interval mixed energy, symplectic conservative perturbation, parallel arithmetic

1 引言

非线性最优控制问题的提法如下^[1~3]:

在满足动力方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

的条件下, 选取最优控制向量 $\mathbf{u}^*(t)$ 极小化下面指标泛函

$$J(\mathbf{u}) = \Theta(\mathbf{x}_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)$ 分别是 n 维状态向量和 m 维控制向量, 动力方程和指标泛函都有可能引起非线性. 本文假定初始状态给定, 末端状态自由, 末端时间 t_f 固定, 并且控制向量没有任何限制. 对于有约束的情况, 做相应的修改^[4], 如罚函数等方法, 就可应用.

非线性最优控制系统导向非线性两端边值问题的求解, 专著[1](第 10 章)、[2](第 7 章)、[3](第 4 部分) 等对此问题进行了专题讨论总结, 虽然远未完善, 但一直受到人们的关注^[4~6]. 一般说来, 借助于拟线性化法 (Quasilinearization) 等可将其转化为线性两端边值问题的迭代求解, 即下面线性对偶方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{(N+1)} = A(t)\mathbf{x}^{(N+1)} + D(t)\boldsymbol{\lambda}^{(N+1)} + \mathbf{f}_x \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(N+1)} = B(t)\mathbf{x}^{(N+1)} - A^T(t)\boldsymbol{\lambda}^{(N+1)} + \mathbf{f}_\lambda \end{cases} \quad (3)$$

及其两端边值条件

$$\mathbf{x}^{(N+1)}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}^{(N+1)}(t_f) = -S_f \mathbf{x}_f^{(N+1)} + \boldsymbol{\theta}_f \quad (4)$$

的求解, 其中, 系数 $A(t), D(t), B(t)$ 及 $\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_\lambda$ 由当前迭代值 $\mathbf{x}^{(N)}, \boldsymbol{\lambda}^{(N)}$ 确定, N 表示迭代次数; 直到收敛.

线性两端边值问题 (3) 通常通过非齐次 Riccati 变换, 即

$$\boldsymbol{\lambda}^{(N+1)}(t) = -S(t)\mathbf{x}^{(N+1)}(t) + \boldsymbol{\theta}(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (5)$$

转化为矩阵 Riccati 相关方程的求解

$$-\dot{S} = B + A^T S + SA - SDS, \quad S(t_f) = S_f \quad (6)$$

$$-\dot{\boldsymbol{\theta}} = (A - DS)^T \boldsymbol{\theta} - S\mathbf{f}_x - \mathbf{f}_\lambda, \quad \boldsymbol{\theta}(t_f) = \boldsymbol{\theta}_f \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{(N+1)} &= (A - DS)\mathbf{x}^{(N+1)} + D\boldsymbol{\theta} + \mathbf{f}_x, \\ \mathbf{x}^{(N+1)}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (8)$$

这样, 两端边值问题 (3) 就解耦为初值问题 (6)~(8) 的求解. 由于受控系统方程 (8) 是稳定的, 基于 Riccati 变换的方法被广泛采用^[1~4]. 然而, 变系数方程组 (6)~(8) 的求解有很大难度, 通常采用 Runge-Kutta 等差分近似算法^[1~3]; 但是, 非线性两端边值问题是 Hamilton 体系的, 其近似线性体系仍然是 Hamilton 体系的, 算法应该保辛^[7], 上述差分算法没有注意到这一点, 不够理想, 特别地, Runge-Kutta 在求解时变系数矩阵 Riccati 微分方程时易出现数值不稳定性^[8]; 况且方程组 (6)~(8) 是从 Hamilton 体系下的对偶方程 (3) 导出的, 有其特性, 不宜割裂开来求解.

文献 [9] 提出了求解初值问题的保辛摄动法, 取得良好的效果. 本文则在区段混合能的基础上, 将保辛摄动方法扩展到两端边值问题 (3) 或 (6)~(8) 的求解, 并指出基于 Riccati 变换的方法实际上是区段混合能方法的一个特例, 具有内在稳定性的优点. 迭代步中核心问题的有效求解将会使原问题的初值敏感性、收敛速度等问题得到改善. 数值算例显示了本文算法的有效性.

收稿日期 2006-6-2 收修改稿日期 2006-10-31
Received June 2, 2006; in revised form October 31, 2006
国家重点基金资助项目 (10632030), 国家重点基础研究专项经费资助项目 (2005CB321704) 资助
Supported by Key Program of the National Natural Science Foundation of P. R. China (10632030), National Major Basic Research Special Foundation of P. R. China (2005CB321704)
1. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室 大连 116023
1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023
DOI: 10.1360/aas-007-1004

2 基于区段混合能的求解方法

区段混合能方法是从变分原理导出的, 算法设计具有灵活稳定的特点. 线性非齐次两端边值问题式 (3) 对应的指标泛函可以表述为

$$J_A(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_f^T S_f \tilde{\mathbf{x}}_f - \tilde{\mathbf{x}}_f^T \boldsymbol{\theta}_f + \int_{t_0}^{t_f} [\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}} - H(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}})] dt \quad (9)$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}}$ 为 $\mathbf{x}^{(N+1)}$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ 为 $\boldsymbol{\lambda}^{(N+1)}$,

$$H(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T D(t) \tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T A(t) \tilde{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T B(t) \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{f}_x - \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}_\lambda \quad (10)$$

为 Hamilton 函数.

相应于变分式 (9), 引入区段 $[t_a, t_b]$ 的混合能 $V(\tilde{\mathbf{x}}_a, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b)$

$$V(\tilde{\mathbf{x}}_a, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b^T \tilde{\mathbf{x}}_b - J_A = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b^T \tilde{\mathbf{x}}_b - \int_{t_a}^{t_b} [\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}} - H(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}})] dt \quad (11)$$

对于线性 Hamilton 系统, 区段混合能可一般性地描述为

$$V(\tilde{\mathbf{x}}_a, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b) = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b^T G(t_a; t_b) \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b^T F(t_a; t_b) \tilde{\mathbf{x}}_a - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_a^T Q(t_a; t_b) \tilde{\mathbf{x}}_a + \tilde{\mathbf{x}}_a^T \mathbf{r}_\lambda(t_a; t_b) + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b^T \mathbf{r}_x(t_a; t_b) \quad (12)$$

其中, $Q(t_a; t_b), G(t_a; t_b), F(t_a; t_b), \mathbf{r}_x(t_a; t_b), \mathbf{r}_\lambda(t_a; t_b)$ 是表征该区段混合能的矩阵和向量, 因为系统是时变的, 故而记为 $(\cdot)(t_a; t_b)$, 为表述的方便, 后面简记为 $Q, G, F, \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\lambda$, 不至于混淆概念.

区段量 $Q, G, F, \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\lambda$ 满足如下微分关系^[10]

$$\frac{\partial Q(t_a; t_b)}{\partial t_a} = B + A^T Q + QA - QDQ, \quad Q(t_b; t_b) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial G(t_a; t_b)}{\partial t_a} = FDF^T, \quad G(t_b; t_b) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial F(t_a; t_b)}{\partial t_a} = F(A - DQ), \quad F(t_b; t_b) = I \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_x(t_a; t_b)}{\partial t_a} = F(D\mathbf{r}_\lambda + \mathbf{f}_x), \quad \mathbf{r}_x(t_b; t_b) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\lambda(t_a; t_b)}{\partial t_a} = (A - DQ)^T \mathbf{r}_\lambda - Q\mathbf{f}_x - \mathbf{f}_\lambda, \quad \mathbf{r}_\lambda(t_b; t_b) = 0 \quad (17)$$

比较式 (13), (17) 中 Q, \mathbf{r}_λ 和式 (6), (7) 中 $S, \boldsymbol{\theta}$ 满足的微分方程, 可以发现二者是完全一样的; 而区段混合能还引入了 Riccati 方程中不曾出现的其它矩阵 G, F 和向量 \mathbf{r}_x , 见式 (14)~(16), 它们与 Q, \mathbf{r}_λ 具有相同的地位, 从这个意义上讲, Riccati 变换方法是区段混合能求解方法的一个特例.

区段混合能保留了更多原 Hamilton 体系的特性, 在算法设计中具有更大灵活性. 事实上, 区段混合能变分原理可以导出区段对偶方程

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_b = F(t_a; t_b) \tilde{\mathbf{x}}_a + G(t_a; t_b) \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b + \mathbf{r}_x(t_a; t_b) \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_a = -Q(t_a; t_b) \tilde{\mathbf{x}}_a + F^T(t_a; t_b) \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b + \mathbf{r}_\lambda(t_a; t_b) \end{cases} \quad (18)$$

区段对偶方程式 (18) 对应于连续的对偶方程式 (3), 实质上是用区段两端的性质来描述整个区段上的性质; 利用前面引入的 Riccati 变换式 (5), 在两端有

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_a = -S_a \tilde{\mathbf{x}}_a + \boldsymbol{\theta}_a, \quad \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_b = -S_b \tilde{\mathbf{x}}_b + \boldsymbol{\theta}_b, \quad (19)$$

将式 (19) 代入式 (18), 整理得

$$S_a = Q(t_a; t_b) + F^T(t_a; t_b) S_b [I + G(t_a; t_b) S_b]^{-1} \times F(t_a; t_b) \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\theta}_a = -F^T(t_a; t_b) S_b [I + G(t_a; t_b) S_b]^{-1} (G(t_a; t_b) \boldsymbol{\theta}_b + \mathbf{r}_x(t_a; t_b)) + F^T(t_a; t_b) \boldsymbol{\theta}_b + \mathbf{r}_\lambda(t_a; t_b) \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_b = [I + G(t_a; t_b) S_b]^{-1} (F(t_a; t_b) \tilde{\mathbf{x}}_a + G(t_a; t_b) \boldsymbol{\theta}_b + \mathbf{r}_x(t_a; t_b)) \quad (22)$$

可见, 如果将整个区间 $[t_0, t_f]$ 划分为 N 个区段: $[t_0, t_1], \dots, [t_{k-1}, t_k], \dots, [t_{N-1}, t_N]$, 记 $[t_a, t_b]$ 为其中的第 k 区段, 相应区段的混合能矩阵和向量记为 $(Q_k, G_k, F_k, \mathbf{r}_{x,k}, \mathbf{r}_{\lambda,k})$, 那么当 k 遍历整个区间就得到了微分方程的解. 因此, 微分方程 (6)~(8) 的求解就转换为区段混合能矩阵和向量 $(Q_k, G_k, F_k, \mathbf{r}_{x,k}, \mathbf{r}_{\lambda,k})$ 的求解问题.

说明:

1) 各区段矩阵和向量 $(Q, G, F, \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\lambda)(t_a; t_b)$ 运算的独立性. 从上面推导可以看出, 各区段独立地满足微分方程式 (13)~(17), 因此, 对它们可执行并行运算, 这是本文算法第一个层次上的并行性.

2) 相邻区段的合并及其合并次序的无关性^[11]. 事实上, 引入了区段混合能, 任意相邻的区段 $[t_a, t_b]$ 和 $[t_b, t_c]$ 混合能可以合并得到组合区段 $[t_a, t_c]$ 的混合能, 合并公式见文 [11], 描述为 $(Q_c, G_c, F_c, \mathbf{r}_{x,c}, \mathbf{r}_{\lambda,c}) = (Q_1, G_1, F_1, \mathbf{r}_{x,1}, \mathbf{r}_{\lambda,1}) \sim (Q_2, G_2, F_2, \mathbf{r}_{x,2}, \mathbf{r}_{\lambda,2})$. 这样, 大区段 (如上面的 $[t_k, t_f]$) 的混合能就可以由其连续的分段混合能合并得到, 而不是单纯的通过微分方程式 (13)~(17) 求解. 而相邻区段合并次序的无关性使得多个连接分段的合并可以并行运算, 这是本算法第二个层次上的并行性.

3) 边界条件的独立性. 对于递推式 (20), (21), 如果记区段 $[t_a, t_b]$ 为 $[t_k, t_f]$, 那么 $S_k, \boldsymbol{\theta}_k$ 则由区段矩阵及向量 $(Q, G, F, \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\lambda)(t_k; t_f)$ 与边界条件 $S_f, \boldsymbol{\theta}_f$ 的一次运算得到. 因此, 对于重复改变边界条件试算的情况, 区段 $[t_k, t_f]$ 矩阵及向量只需求解一次, 从而大大提高边界重分析的效率.

各区段矩阵及向量运算的独立性, 相邻区段合并的次序无关性, 以及边界条件的独立性等使算法具有极高的并行性, 有利于提高计算效率, 这对于需要迭代求解的非线性两端边值问题是极为有利的.

3 区段混合能的保辛摄动

通过引入区段混合能, 问题转化为区段混合能矩阵及向量的求解. 区段矩阵和向量的算法也应该有所讲究, Hamilton 体系的近似算法应当保辛^[7].

引入状态变量 $\tilde{\mathbf{v}}(t) = \{\tilde{\mathbf{x}}^T(t), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\}^T$, 式 (3) 重写为

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}(t) = H(t) \tilde{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{f}(t)$$

其中,

$$H(t) = \begin{bmatrix} A(t) & D(t) \\ B(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{Bmatrix} f_x(t) \\ f_\lambda(t) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

在区段 $[t_a, t_b]$ 内, 将时变 Hamilton 矩阵和外力分成两部分.

$$H(t) = H_0 + H_1(t), \quad f(t) = f_0 + f_1(t) \quad (24)$$

其中, H_0 和 f_0 在区段内是定常的; $H_1(t)$ 和 $f_1(t)$ 则是余下时变的“小量”.

相应的零阶近似系统为

$$\dot{\tilde{v}}_0(t) = H_0 \tilde{v}_0(t) + f_0 \quad (25)$$

零阶系统的解可以表示为

$$\tilde{v}_0(t) = \Phi_0(t; t_a) \tilde{v}_0(t_a) + \tilde{v}_{0p}(t; t_a) \quad (26)$$

其中, $\Phi_0(t; t_a)$ 和 $\tilde{v}_{0p}(t; t_a)$ 分别是零阶系统的辛传递矩阵和零初值特解, 可解析求解.

利用零阶系统的 $\Phi_0(t; t_a)$ 和 $\tilde{v}_{0p}(t; t_a)$, 引入正则变换

$$\tilde{v}(t) = \Phi_0(t; t_a) \tilde{v}_1(t) + \tilde{v}_{0p}(t; t_a) \quad (27)$$

将式 (27) 代入式 (23), 推导出摄动方程

$$\dot{\tilde{v}}_1(t) = \bar{H}_1(t) \tilde{v}_1(t) + \bar{f}_1(t) \quad (28)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(t) &= \Phi_0^{-1}(t; t_a) H_1(t) \Phi_0(t; t_a) \\ &= -J \Phi_0^T J H_1 \Phi_0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(t) &= \Phi_0^{-1}(t; t_a) (H_1(t) \tilde{v}_{0p}(t; t_a) + f_1(t)) \\ &= -J \Phi_0^T J (H_1 \tilde{v}_{0p} + f_1) \end{aligned}$$

上面用到了 $\Phi_0(t; t_a)$ 是辛矩阵的事实, 即 $\Phi_0^T J \Phi_0 = J$. 由于 $H(t)$ 及 H_0 皆为 Hamilton 矩阵, 不难验证 $[J \bar{H}_1(t)]^T = J \bar{H}_1(t)$, 即 $\bar{H}_1(t)$ 仍是 Hamilton 矩阵. 这说明, 正则变换后的微分方程 (28) 仍然在 Hamilton 体系下, 即保辛了.

摄动系统 (28) 和零阶系统 (25) 皆是 Hamilton 体系, 因此有其相应的区段混合能 $V_1(\tilde{x}_{1a}, \tilde{\lambda}_{1b})$ 和 $V_0(\tilde{x}_{0a}, \tilde{\lambda}_{0b})$, 如下

$$\begin{aligned} V_1(\tilde{x}_{1a}, \tilde{\lambda}_{1b}) &= \tilde{\lambda}_{1b}^T \tilde{x}_{1b} - \int_{t_a}^{t_b} [\tilde{\lambda}_1^T \dot{\tilde{x}}_1 - H_1(\tilde{x}_1, \tilde{\lambda}_1)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_{1b}^T G_1 \tilde{\lambda}_{1b} + \tilde{\lambda}_{1b}^T F_1 \tilde{x}_{1a} - \frac{1}{2} \tilde{x}_{1a}^T Q_1 \tilde{x}_{1a} + \tilde{x}_{1a}^T r_{1\lambda} + \tilde{\lambda}_{1b}^T r_{1x} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} V_0(\tilde{x}_{0a}, \tilde{\lambda}_{0b}) &= \tilde{\lambda}_{0b}^T \tilde{x}_{0b} - \int_{t_a}^{t_b} [\tilde{\lambda}_0^T \dot{\tilde{x}}_0 - H_0(\tilde{x}_0, \tilde{\lambda}_0)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_{0b}^T G_0 \tilde{\lambda}_{0b} + \tilde{\lambda}_{0b}^T F_0 \tilde{x}_{0a} - \frac{1}{2} \tilde{x}_{0a}^T Q_0 \tilde{x}_{0a} + \tilde{x}_{0a}^T r_{0\lambda} + \tilde{\lambda}_{0b}^T r_{0x} \end{aligned} \quad (31)$$

其中, 相应的 Hamilton 函数分别为

$$\begin{aligned} H_1(\tilde{x}_1, \tilde{\lambda}_1) &= \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_1^T \bar{D}_1(t) \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_1^T \bar{A}_1(t) \tilde{x}_1 - \\ &= \frac{1}{2} \tilde{x}_1^T \bar{B}_1(t) \tilde{x}_1 + \tilde{\lambda}_1^T \bar{f}_{1x} - \tilde{x}_1^T \bar{f}_{1\lambda} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} H_0(\tilde{x}_0, \tilde{\lambda}_0) &= \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_0^T D_0(t) \tilde{\lambda}_0 + \tilde{\lambda}_0^T A_0(t) \tilde{x}_0 - \\ &= \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T B_0(t) \tilde{x}_0 + \tilde{\lambda}_0^T f_{0x} - \tilde{x}_0^T f_{0\lambda} \end{aligned} \quad (33)$$

其中, $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{D}_1$ 和 $\bar{f}_{1x}, \bar{f}_{1\lambda}$ 分别是摄动系统 $\bar{H}_1(t)$ 和 $\bar{f}_1(t)$ 的分块矩阵和向量; 而 A_0, B_0, D_0 和 $f_{0x}, f_{0\lambda}$ 则分别是零阶系统 H_0 和 f_0 的分块矩阵和向量. 自然地, 各系统的混合能矩阵和向量与 Hamilton 函数矩阵和向量之间满足微分方程式 (13)~(17).

下面根据正则变换关系式 (27) 来推导由摄动系统和零阶系统的混合能 $V_1(\tilde{x}_{1a}, \tilde{\lambda}_{1b})$ 和 $V_0(\tilde{x}_{0a}, \tilde{\lambda}_{0b})$ 得到原系统混合能 $V(\tilde{x}_a, \tilde{\lambda}_b)$ 的组合关系.

在区段的左端 t_a , 正则变换式 (27) 给出 $\tilde{v}_1(t_a) = \tilde{v}(t_a)$, 从而摄动系统的混合能可写为

$$V_1(\tilde{x}_{1a}, \tilde{\lambda}_{1b}) = V_1(\tilde{x}_a, \tilde{\lambda}_{1b}) \quad (34)$$

在区段的右端 t_b , 正则变换式 (27) 给出

$$\tilde{v}(t_b) = \Phi_0(t_b; t_a) \tilde{v}_1(t_b) + \tilde{v}_{0p}(t_b; t_a) \quad (35)$$

式 (35) 表明, 对零阶系统 (25), 若左端值取 $\tilde{v}_0(t_a) = \tilde{v}_1(t_b)$, 则右端值相应为 $\tilde{v}_0(t_b) = \tilde{v}(t_b)$, 用区段混合能表示为

$$V_0(\tilde{x}_{0a}, \tilde{\lambda}_{0b}) = V_0(\tilde{x}_{1b}, \tilde{\lambda}_b) \quad (36)$$

观察式 (34) 和式 (36), 可认为同一区段的摄动系统混合能 $V_1(\tilde{x}_{1a}, \tilde{\lambda}_{1b})$ 和零阶系统混合能 $V_0(\tilde{x}_{0a}, \tilde{\lambda}_{0b})$ 在 $\tilde{v}_1(t_b)$ 处“连接”, 是空间上的“连接”, 如图 1 所示. 可进行区段合并

$$V(\tilde{x}_a, \tilde{\lambda}_b) = \text{sta}_{\tilde{x}_{1b}, \tilde{\lambda}_{1b}} \{V_1(\tilde{x}_a, \tilde{\lambda}_{1b}) + V_0(\tilde{x}_{1b}, \tilde{\lambda}_b) - \tilde{\lambda}_{1b}^T \tilde{x}_{1b}\} \quad (37)$$

完成变分运算就得到了区段的合并公式, 即

$$\begin{aligned} (Q, G, F, r_x, r_\lambda) &= (Q_1, G_1, F_1, r_{1x}, r_{1\lambda}) \circ \\ &= (Q_0, G_0, F_0, r_{0x}, r_{0\lambda}) \end{aligned} \quad (38)$$

其中, $(Q, G, F, r_x, r_\lambda)$ 即为原系统 (23) 的区段混合能 $V(\tilde{x}_a, \tilde{\lambda}_b)$ 矩阵和向量, 见式 (12).

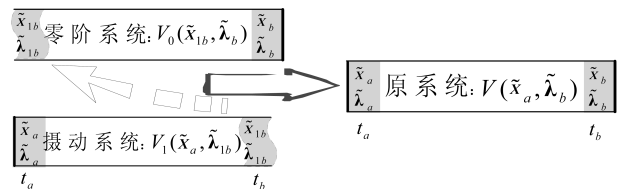


图 1 零阶系统和摄动系统的混合能区段合并示意图

Fig. 1 Combination of interval mixed energy of zero-order system and perturbed system

因此, 分别求解出零阶系统 (25) 和摄动系统 (28) 的区段混合能矩阵及向量, 利用式 (38) 就得到了原系统的区段混合能矩阵及向量, 这就是区段混合能的保辛摄动方法.

零阶系统 (25) 的区段混合能矩阵及向量可利用精细积分法求得计算机上的精确解^[6], 这是保证摄动精度的基础.

而摄动系统 (28) 虽仍然是时变的, 但已是摄动后的“小量”, 故在这一步上做些近似是允许的. 摄动系统的近似求解也应当保辛, 而混合能矩阵的加法摄动是保辛的^[11]. 因此可对其区段矩阵及向量满足的微分方程 (13)~(17) 采用 Taylor 级数展开等近似方法^[11] 求解, 这里不再赘述.

4 数值算例

为了说明本文算法的有效性, 本文选用文献 [4] 中的强非线性算例, 分别就其收敛速度、精度以及对迭代初值的敏感性, 与常用的 Runge-Kutta 算法进行比较.

首先选取迭代初值格式为

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 - 0.5t \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 3 - 0.5t \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq t_f$$

给定 $\mathbf{x}(0) = \{0, 3.0\}^T$, $t_f = 6.0$, 进行求解. 表 1 比较了采用保辛摄动算法和四阶 Runge-Kutta 算法迭代计算的收敛速度, 其中 $d(x_1^{(i)} - x_1^{(i-1)})$ 为相邻两次迭代间的距离^[4]. 可以看出第 5 次迭代之后本文算法收敛速度大大高于 Runge-Kutta 算法 (高出 2~5 个数量级).

进一步计算表明, 对于给定初值 $\mathbf{x}(0) = \{0, 3.0\}^T$ 的情形, Runge-Kutta 算法采用 $\eta = 0.3$ 的步长是发散的; 而对于给定初值 $\mathbf{x}(0) = \{0, 2.0\}^T$ 的情形, Runge-Kutta 算法采用 $\eta = 0.3$ 的计算步长则可以得到正确结果, 这表明问题初值和计算步长都会影响到 Runge-Kutta 算法的数值稳定性. 而本文算法对于上述情形在大计算步长 $\eta = 0.4$ 仍然都收敛于真解, 说明本文算法具有更好的数值鲁棒性.

本文算法对迭代初值选取的要求比较宽松. 给定 $\mathbf{x}(0) = \{0, 3.0\}^T$, $t_f = 18.0$, 仍然采用上述迭代初值格式启动, 此时迭代初值相对于最优值的偏离是很大的, 如图 2 和图 3 所示. 图例给出了在计算步长 $\eta = 0.2$ 时本文算法的迭代结果, 迭代 5 次已基本收敛到最优解 (其中参考解是采用小计算步长 $\eta = 0.1$ 迭代 20 次得到的迭代结果), 收敛速度是很快的; 而采用 Runge-Kutta 法, 只有当步长减小到 $\eta = 0.01$, 才能得到正确的结果.

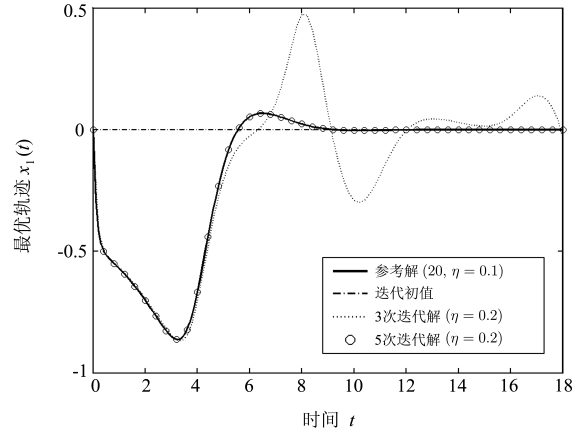


图 2 迭代初值偏离较大时的收敛结果

Fig. 2 Convergent results by bad initial trial value

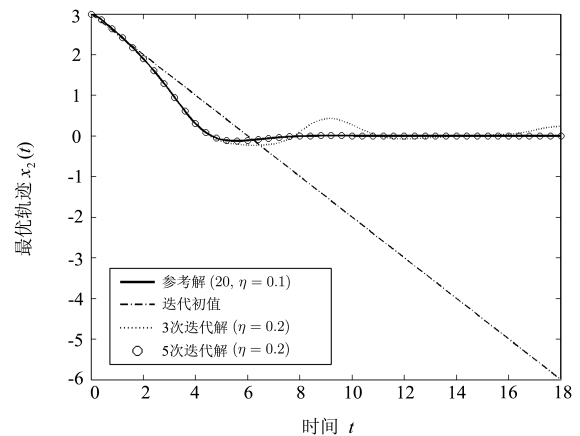


图 3 迭代初值偏离较大时的收敛结果

Fig. 3 Convergent results by bad initial trial value

另外, 高度的并行性是本文保辛摄动算法的另一大优点, 而且, 计算的独立性可有效地避免数值误差的传播.

表 1 相邻迭代结果的距离 ($\eta = 0.2, t_f = 6.0$)

Table 1 Distances between iterations ($\eta = 0.2, t_f = 6.0$)

迭代次数 i	$d(x_1^{(i)} - x_1^{(i-1)})$		$d(\lambda_1^{(i)} - \lambda_1^{(i-1)})$		$d(u^{(i)} - u^{(i-1)})$	
	保辛摄动	Runge-Kutta	保辛摄动	Runge-Kutta	保辛摄动	Runge-Kutta
5	1.2703e-04	3.0958e-04	1.5162e-03	2.8313e-03	7.5811e-04	1.4156e-03
6	5.4700e-07	5.6138e-06	3.7977e-06	1.4141e-04	1.8989e-06	7.0704e-05
7	2.2125e-09	2.6793e-07	1.5126e-08	5.5623e-06	7.5629e-09	2.7811e-06
8	8.9407e-12	1.1338e-08	7.8044e-11	1.5068e-07	3.9022e-11	7.5341e-08
9	4.0856e-14	6.3019e-10	3.6593e-13	5.7898e-09	1.8296e-13	2.8949e-09
10	6.6613e-16	2.9304e-11	3.1086e-15	1.3731e-10	1.5543e-15	6.8656e-11

5 结论

非线性动力系统最优控制的求解是一个挑战, 一般需要借助于迭代法求解, 每次迭代都将转化成为一个线性时变系统的两端边值问题. 因此, 发展线性时变非齐次两端边值问题的快速精确求解算法是迫切需要的. 本文引入了区段混合能概念, 指出传统的 Riccati 变换方法是区段混合能方法的特例. 推导了基于区段混合能方法的求解列式, 并给出了时变系统区段混合能的保辛摄动求解方法. 该算法具有很强的并行性, 高效而精确. 最后的算例验证了本文方法的有效性.

本文算法是对线性时变 LQ 最优控制中出现的齐次两端边值问题求解的一个扩展, 可进一步应用到时变或非线性系统的最优滤波、跟踪等课题中去.

References

- 1 Sage A P, White C C. *Optimum Systems Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1977
- 2 Bryson A E, Ho Y C. *Applied Optimal Control*. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1975
- 3 Kirk D E. *Optimal Control Theory*. New Jersey: Prentice-Hall, 1970
- 4 Schley C H, Lee I. Optimal control computation by the Newton-Raphson method and the Riccati transformation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, **12**(2): 139~144
- 5 Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, **21**(2): 193~207
- 6 Holsapple R, Venkataraman R, Doman D. A modified simple shooting method for solving twopoint boundary-value problems. In: Proceedings of IEEE Aerospace Conference. IEEE, 2003. **6**: 2783~2790
- 7 Zhong Wan-Xie. Analytical structural mechanics and finite element. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, **2**(4): 1~8
- 8 Kenney C S, Leipnik R B. Numerical integration of differential matrix Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, **30**(10): 962~970
- 9 Zhong Wan-Xie, Yao Zheng. Time domain FEM and symplectic conservation. *Journal of Mechanical Strength*, 2005, **27**(2): 178~183
(钟万鏖, 姚征. 时间有限元与保辛. 机械强度, 2005, **27**(2): 178~183)
- 10 Zhong Wan-Xie. *Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics*. Beijing: Higher Education Press, 2006
(钟万鏖. 应用力学的辛数学方法. 北京: 高等教育出版社, 2006)
- 11 Zhong Wan-Xie, Ouyang Hua-Jiang, Deng Zi-Chen. *Computational Structural Mechanics and Optimal Control*. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1993
(钟万鏖, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理工大学出版社, 1993)

谭述君 博士研究生. 主要研究方向为控制系统中数值方法, 控制系统计算机辅助软件. 本文通信作者.

E-mail: ccnntsj@student.dlut.edu.cn

(TAN Shu-Jun Ph.D. candidate at Dalian University of Technology. His research interest covers effective numerical methods in control theory and numerical software of CACSD. Corresponding author of this paper.)

钟万鏖 教授, 中国科学院院士. 主要研究方向为工程力学, 计算力学, 计算结构力学与最优控制的模拟理论. E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn

(ZHONG Wan-Xie Professor at Dalian University of Technology, academician of Chinese Academy of Sciences. His research interest covers engineering mechanics, computational mechanics, and analogies between structural mechanics and optimal control.)