

一类非完整系统的全局镇定

任艳青^{1,2} 马保离¹

摘要 当非完整系统只能局部转换为链式形式时, 由于存在变换奇异点集合, 针对链式系统所设计的全局反馈控制律只能局部镇定原非完整系统, 而且当期望状态接近奇异点时, 闭环系统的吸引区很小. 本文针对一类可局部转换为链式系统的非完整系统, 首先利用吸引区是状态空间中的一个不变集且与变换奇异点集不相交的条件导出了一个吸引区的不变子集, 然后给出了将系统状态从任意点驱动到吸引区不变子集内的开环控制算法, 最后结合开环控制和闭环控制得到一种混合控制算法. 该混合控制算法可以保证任意不在变换奇异点集合内的期望状态是全局渐近稳定的. 对平面两转动关节空间机器人的仿真结果证实了算法的有效性.

关键词 非完整系统, 链式标准形, 全局镇定, 奇异点, 吸引区
中图分类号 TP273.+2

Global Stabilization of a Class of Nonholonomic Systems

REN Yan-Qing^{1,2} MA Bao-Li¹

Abstract Due to the existence of singular sets of state and input transformations, the global feedback control laws developed for nonholonomic chained systems can only locally stabilize the original nonholonomic systems, which are locally convertible to nonholonomic chained form, and the size of attractive manifold of the closed-loop system becomes very small when the desired state is near to the singular sets. The global stabilization problem of a class of nonholonomic systems locally convertible to nonholonomic chained form is investigated in this paper. Firstly, a subset of attractive manifold is derived based on the condition that the attractive manifold is an invariant set with no intersection with the transformation singular sets. Then, an open-loop control scheme is developed to drive an arbitrary initial state to the subset of attractive manifold. By combining the open-loop and feedback control schemes, a hybrid control strategy is finally proposed, guaranteeing that any nonsingular desired state is globally asymptotically stable. Simulation results for a two-link planar space robot show the effectiveness of the proposed hybrid control scheme.

Key words Nonholonomic systems, chained form, global stabilization, singularity, attractive manifold

1 引言

由于大多数实际的非完整系统都可以通过状态和输入变换转化为链式系统, 因此非完整系统的镇定问题主要归结为链式系统的镇定问题. 目前对链式系统已经有不少控制算法^[1~8]. 但是, 大多数非完整系统并不能全局转化为链式系统, 所求得的状态和输入变换存在奇异点. 若直接利用针对链式系统所设计的全局有效的控制算法来镇定原非完整系

统, 仅可得到局部镇定的效果, 而且当期望状态距离变换奇异点集合很近时, 只能得到一个很小的吸引区, 大大限制了控制算法的适用范围.

为解决以上问题, 本文针对一类可局部转换为链式系统的非完整系统提出了一种新的混合控制算法, 该算法的基本思想为: 先利用链式闭环系统的一个正不变集与变换奇异点集不相交的条件导出原系统期望状态吸引区的一个子集. 当初始状态在该子集内时, 直接利用针对链式系统的控制律实现镇定; 当初始状态不在吸引区内时, 先利用开环控制将状态驱动到该子集内, 然后再利用针对链式系统的控制律将状态进一步镇定到期望点.

本文内容安排如下: 第 2 节给出了一类可局部转换为链式系统的非完整系统的模型及相应的状态和输入变换; 第 3 节讨论在链式系统镇定控制律下原非完整系统吸引区的估计问题; 第 4 节研究如何设计开环控制律将任意初始状态驱动到期望状态的吸引区子集内; 第 5 节以平面两转动关节空间机器人为例进行仿真来验证算法的有效性; 第 6 节为结论.

2 一类可局部转换为链式形式的非完整系统^[9,10]

考虑具有三个状态两个输入的无漂移非完整控制系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha(x_1, x_2) & \beta(x_1, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{其中, } \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha(x_1, x_2) \end{bmatrix}, \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

定义开集

$$\Omega \triangleq \{ \mathbf{x} : F(x_1, x_2) = \frac{\partial \beta(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha(x_1, x_2)}{\partial x_2} \neq 0 \}$$

则由于

$$\text{rank} [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & F(x_1, x_2) \end{bmatrix} = 3, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

因此系统在 Ω 内为小时间局部能控的.

定义

$$\begin{aligned} f_3(x_1, x_2) &\triangleq \int \beta(x_1, x_2) dx_2 \\ f_2(x_1, x_2) &\triangleq \alpha(x_1, x_2) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ &= \alpha(x_1, x_2) - \int \frac{\partial \beta(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_2 \end{aligned} \quad (2)$$

则容易得到以下结论.

结论 1. 对于集合 Ω 内的任意一点 \mathbf{x} , 都存在一个包含该点的邻域 $\Omega_{\mathbf{x}} \subset \Omega$ 以及定义在 $\Omega_{\mathbf{x}}$ 内的局部微分同胚坐标和输入变换将系统 (1) 转换为链式系统.

收稿日期 2006-7-17 收修改稿日期 2006-11-8
Received July 17, 2006; in revised form November 8, 2006
国家自然科学基金 (60274005, 60334030) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60274005, 60334030)
1. 北京航空航天大学第七研究室 北京 100083 2. 中国科学院自动化研究所 北京 100080
1. The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083 2. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080
DOI: 10.1360/aas-007-0979

证明. 考虑以下状态和输入变换

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ f_2(x_1, x_2) \\ x_3 - f_3(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{v} = \Psi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} u_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

由式 (3), (4) 得状态和输入变换的雅可比矩阵分别为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

由于 $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -(\frac{\partial \beta}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}) = -F(x_1, x_2) \neq 0 (\forall \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}} \subset \Omega)$, 因此状态和输入变换 (3), (4) 均为定义在 $\Omega_{\mathbf{x}}$ 内的局部微分同胚变换.

容易验证系统 (1) 在新坐标 \mathbf{z} 和新输入 \mathbf{v} 下可表示为如下链式系统

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}_3(\mathbf{z})v_1 + \mathbf{g}_4(\mathbf{z})v_2 \quad (5)$$

$$\text{其中, } \mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

注 1. 为了将系统 (1) 的期望状态 $\mathbf{x}_d = [x_{1d} \ x_{2d} \ x_{3d}]^T$ 转换为链式系统的原点, 可以将状态变换 (3) 修改为

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_{1d} \\ f_2(x_1, x_2) - f_2(x_{1d}, x_{2d}) \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中 $z_3 = x_3 - x_{3d} - f_3(x_1, x_2) + f_3(x_{1d}, x_{2d}) - f_2(x_{1d}, x_{2d})(x_1 - x_{1d})$.

3 镇定控制律和吸引区的估计

由第 2 节知, 系统 (1) 通过状态变换 (6) 和输入变换 (4) 可局部转换为链式系统 (5), 因此如果可以通过设计控制律镇定链式系统 (5), 就可以局部镇定原系统 (1).

关于链式系统, 学者们已经提出了很多镇定控制算法, 已有的镇定算法可以归结为三类: 时变光滑状态镇定律^[1~4]、非光滑状态镇定律^[5,6] 和混合镇定律^[7,8].

由于已有的非光滑和混合镇定律虽然能保证状态轨迹 (指数) 收敛到零, 但一般却不能保证系统渐近稳定, 从而导致闭环系统的鲁棒性较差. 因此本文采用可以保证链式系统渐近稳定的光滑时变状态反馈镇定控制律.

针对链式系统 (5) 的时变光滑镇定控制律有很多, 本文采用文献 [1] 给出的控制律, 并以如下引理形式给出.

引理 1^[1]. 以下时变光滑控制律

$$\begin{cases} v_1 = -k_1 z_1 + z_3^2 \sin(t) \\ v_2 = -k_2 z_2 - z_3 v_1 \end{cases} \quad (7)$$

可以保证链式系统 (5) 的原点全局渐近稳定. 其中, $k_1 > 0, k_2 > 0$.

注 2. 当系统 (1) 可全局转换为链式系统, 即 $\Omega = \mathbf{R}^3$ 时, 控制律 (7) 同样可以全局镇定系统 (1); 当系统 (1) 只能局部转换为链式系统, 即 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 时, 控制律 (7) 只能局部镇定系统 (1).

以下研究当 Ω 为状态空间的一个真开子集时, 闭环系统 (1) 和 (7) 的吸引区估计问题.

结论 2. 对任意常数 $c > 0$, 集合 $\Omega_c = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3 : |z_1| \leq \frac{2c}{k_1}, V_1 = \frac{1}{2}(z_2^2 + z_3^2) \leq c\}$ 为闭环系统 (5) 和 (7) 的一个正不变集.

结论 2 的证明需要引入如下定义.

定义 1^[11]. 考虑动态系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$ 和其状态空间内的一个集合 \mathbf{M} , 如果系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$ 的解轨线 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ 满足

$$\mathbf{x}(t_0) \triangleq \mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t_0) \in \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \in \mathbf{M}, \quad \forall t \geq t_0$$

即, 如果系统的解在某一个时刻 t_0 属于 \mathbf{M} , 那么它在所有的未来时刻都属于 \mathbf{M} , 则集合 \mathbf{M} 称为动态系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$ 的正不变集.

根据以上正不变集的定义容易得到以下判断一个集合是不变集的充分条件.

正不变集的判断条件^[11]. 对于系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$, 如果可以找到一个非负函数 $V(\mathbf{x}) \geq 0$ 使得该函数沿系统解的导数满足 $\dot{V} \leq 0 (\forall \mathbf{x}, t \geq t_0)$, 则对任意正常数 c , 集合 $\{\mathbf{x} : V \leq c\}$ 为系统的一个正不变集; 对于系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$, 如果可以找到一个非负函数 $V(\mathbf{x}) \geq 0$ 和一个正常数 μ 使得当 $V \geq \mu > 0$ 时, 该函数沿系统解的导数满足 $\dot{V} \leq 0$, 则集合 $\{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) \leq \mu\}$ 是系统的一个正不变集.

结论 2 的证明. 为了证明 Ω_c 为系统 (5) 和 (7) 的一个正不变集, 只需要证明集合 $\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3 : V_1 = \frac{1}{2}(z_2^2 + z_3^2) \leq c\}$ 是正不变集, 且集合 $\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3 : |z_1| \leq \frac{2c}{k_1}\}$ 是集合 $\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3 : V_1 = \frac{1}{2}(z_2^2 + z_3^2) \leq c\}$ 内的一个正不变集.

由于函数 $V_1(t) = \frac{1}{2}(z_2^2 + z_3^2)$ 非负, 且其沿系统 (5) 和 (7) 的导数为:

$$\dot{V}_1 = z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3 = z_2(-k_2 z_2 - z_3 v_1) + z_3 z_2 v_1 = -k_2 z_2^2 \leq 0$$

因此根据正不变集的判断条件知, 对所有 $c > 0$, 集合 $\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3 : V_1 = \frac{1}{2}(z_2^2 + z_3^2) \leq c\}$ 是系统的一个正不变集.

由于函数 $V_2 = \frac{1}{2}z_1^2$ 非负, 且当 $|z_1| \geq \frac{2c}{k_1}$, 即 $V_2 = \frac{1}{2}z_1^2 \geq \frac{1}{2}(\frac{2c}{k_1})^2 = \frac{2c^2}{k_1^2}$ 时, 在正不变集 $\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3 : \frac{1}{2}(z_2^2 + z_3^2) \leq c\}$ 内的轨线满足:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1 \dot{z}_1 = z_1(-k_1 z_1 + z_3^2 \sin(t)) \leq -k_1 |z_1|^2 + |z_1| |z_3|^2 \leq \\ &= -k_1 |z_1| (|z_1| - \frac{2c}{k_1}) \leq 0 \end{aligned}$$

所以集合 $\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3 : V_2 = \frac{1}{2}z_1^2 \leq \frac{2c^2}{k_1^2}\}$, 即集合 $\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3 : |z_1| \leq \frac{2c}{k_1}\}$ 为正不变集 $\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3 : \frac{1}{2}(z_2^2 + z_3^2) \leq c\}$ 内的一个正不变集, 从而集合 Ω_c 也是系统的一个正不变集. □

结论 3. 闭环系统 (1) 和 (7) 的吸引区的一个闭子集为

$$\Omega_{c^*} = \{z \in \mathbf{R}^3 : |z_1| \leq \frac{2c^*}{k_1}, V_1 = \frac{1}{2}(z_2^2 + z_3^2) \leq c^*\} \quad (8)$$

其中 c^* 满足

$$\Omega_{c^*} \subset \{z \in \mathbf{R}^3 : H(z) \triangleq F(x_1, x_2)|_{x=\Phi^{-1}(z)} \neq 0\} \quad (9)$$

证明. 状态空间的一个区域为吸引区的一个估计或子集的必要条件是该区域为状态空间的一个正不变集. 由结论 2 知集合 Ω_{c^*} 为闭环系统 (5) 和 (7) 的一个正不变集, 又由定理 1 知系统 (5) 和 (7) 全局渐近稳定, 所以 Ω_{c^*} 为系统 (5) 和 (7) 的吸引区的一个闭子集. 由条件 (9) 知, $\Omega_{c^*} \subset \{z \in \mathbf{R}^3 : H(z) \triangleq F(x_1, x_2)|_{x=\Phi^{-1}(z)} \neq 0\} \subset \Omega$, 因此 Ω_{c^*} 也是系统 (1) 和 (7) 的吸引区的一个闭子集. \square

注 3. 可以看出只要 $F(x_{1d}, x_{2d}) = H(\mathbf{0}) \neq 0$, 则总可以找到一个足够小的 $c = c^*$ 满足式 (9). 但是当 $F(x_{1d}, x_{2d})$ 很小时, c^* 一般也会很小, 这时只能得到一个很小的吸引区闭子集.

4 开环控制和全局镇定

4.1 开环控制

前面本文得到了闭环系统 (1) 和 (7) 期望状态吸引区的一个闭子集. 当初始状态在该子集内时, 可以直接利用控制律 (7) 渐近镇定系统 (1); 当初始状态不在该子集内时, 控制律 (7) 不一定能渐近镇定系统 (1).

本小节提出一种针对原非完整系统 (1) 的开环控制算法, 利用该算法可以将任意初始状态驱动到 Ω 内任意给定的期望状态的任意小邻域内. 这样当初始状态不在所估计的吸引区闭子集内时, 我们可以首先利用该开环控制算法将系统 (1) 的状态驱动到该吸引区闭子集内, 然后再利用闭环控制律 (7) 将系统 (1) 的状态进一步镇定到期望状态.

我们采用常值函数^[12] 和周期函数^[10,13] 相结合对非完整系统 (1) 设计开环控制, 控制算法为:

步骤 1. 利用常值输入驱动 x_1, x_2 到其期望状态.

由 $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2$ 及 u_1, u_2 为常数得 $x_1(t) = x_{10} + u_1 t, x_2(t) = x_{20} + u_2 t$, 假设希望在 t_1 时刻 x_1, x_2 到达期望状态, 则得到 $u_1 = (x_{1d} - x_{10})/t_1, u_2 = (x_{2d} - x_{20})/t_1$. 由于 α, β 均为 x_1, x_2 的分段连续函数, 因此在 t_1 时刻 x_3 到达有限值 $x_3(t_1) = x_{30} + \int_0^{t_1} [\alpha(x_{10} + u_1 t, x_{20} + u_2 t)u_1 + \beta(x_{10} + u_1 t, x_{20} + u_2 t)u_2] dt$.

步骤 2. 利用周期输入函数 $u_1(t), u_2(t)$ 将 x_3 驱动到 x_{3d} . 当 $u_1(t), u_2(t)$ 为周期函数时, 存在 x_1, x_2 平面内的一个闭区域 D . 记 ∂D 为 D 的边界, 则由 Stokes 公式得

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} dx_3 &= \int_{\partial D} \alpha(x_1, x_2) dx_1 + \beta(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \pm \int_D F(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

其中“ \pm ”取决于 x_1, x_2 沿 ∂D 运动的方向.

由积分中值定理得

$$\int_{\partial D} dx_3 = \pm F(x_1^*, x_2^*) \pi(D)$$

其中, $(x_1^*, x_2^*) \in D, F(x_1^*, x_2^*)$ 为 $F(x_1, x_2)$ 在区域 D 上的平均值, $\pi(D)$ 为区域 D 的面积.

假定 $x_d \in D$, 即 $F(x_{1d}, x_{2d}) \neq 0$, 则在 $x_1 - x_2$ 平面内存在一个包含 (x_{1d}, x_{2d}) 的邻域 Ω_{x_d} , 使得 $F(x_1, x_2) \neq 0 (\forall x \in \Omega_{x_d})$. 选择闭区域 $D \subset \Omega_{x_d}$, 则可保证 $F(x_1^*, x_2^*) \neq 0$, 因此 $\Delta \triangleq \int_{\partial D} dx_3 \neq 0$. 设计控制律使 (x_1, x_2) 沿 ∂D 的适当方向反复运动, 则存在正整数 l , 使得当 (x_1, x_2) 沿 ∂D 运动 l 圈时 (记此时刻为 t_2) 有 $x_1(t_2) = x_{1d}, x_2(t_2) = x_{2d}, |x_3(t_2) - x_{3d}| \leq |\Delta|$. 进一步, 对于任意小的正数 ε , 总可选择 $D \in \Omega_{x_d}$ 使得 $\pi(D) \leq \frac{\varepsilon}{\max_{x \in D} \{F(x_1, x_2)\}}$, 这样可以保证 (x_1, x_2) 沿 ∂D 的适当方向运动 l 圈时有 $x_1(t_2) = x_{1d}, x_2(t_2) = x_{2d}, |x_3(t_2) - x_{3d}| \leq |\Delta| = |F(x_1^*, x_2^*) \pi(D)| \leq |\max_{x \in D} (F(x_1, x_2)) \pi(D)| \leq \varepsilon$.

综上所述, 对于系统 (1), 可以通过以上开环控制算法将任意初始状态 x_0 驱动到 Ω 内的任意期望状态 x_d 的任意小邻域内. 因此可以利用上述开环控制算法将任意初始状态 x_0 驱动到 Ω 内的任意期望状态 x_d 的吸引区子集内.

4.2 全局渐近镇定

结合上述的闭环和开环控制律, 对于系统 (1) 的任意给定的初始状态 x_0 和 Ω 内的任意给定的期望状态 x_d , 可以得到以下全局渐近镇定控制律.

全局渐近镇定控制律.

1) 若 $x_0 \in \Omega_{c^*}$, 则采用闭环控制律 (7).

2) 若 $x_0 \notin \Omega_{c^*}$, 则采用 4.1 节给出的开环控制算法将状态驱动到 Ω_{c^*} 内, 然后切换为闭环控制律 (7).

结论 4. 若期望状态 $x_d \in \Omega$, 则以上混合控制律可以保证 x_d 为闭环系统 (1) 和 (7) 的全局渐近稳定平衡点.

证明. 对任意的初始状态 x_0 , 若 $x_0 \in \Omega_{c^*}$, 闭环控制律 (7) 保证 $x(t)$ 保持在 Ω_{c^*} 内且渐近收敛到 x_d . 若 $x_0 \notin \Omega_{c^*}$, 开环控制算法在有限时间内将状态驱动到 Ω_{c^*} 内, 同时由于开环控制 u_1, u_2 为 t 的分段光滑函数, 所以 $\alpha(x_1, x_2), \beta(x_1, x_2)$ 为 t 的分段光滑函数, 从而 $g_1 u_1 + g_2 u_2$ 也为 t 的分段光滑函数, 因此在开环控制起作用的有限时间段内状态 $x(t)$ 均保持有界; 当系统轨线进入 Ω_{c^*} 内后, 闭环控制律 (7) 起作用, 因此 $x(t)$ 将保持在 Ω_{c^*} 内并渐近收敛到 x_d . \square

5 算例与仿真

前面针对一类可局部转换为链式系统的非完整系统, 提出了一种结合开环控制和闭环控制的全局镇定算法, 本节将以平面两转动关节空间机器人为例验证所提出的全局镇定控制算法的有效性.

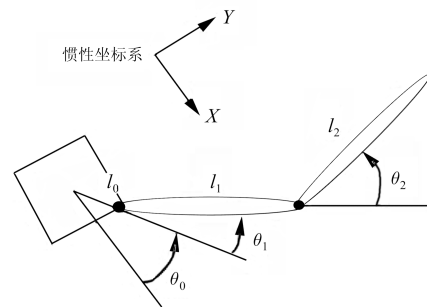


图 1 平面两转动关节空间机器人
Fig. 1 Planar two-link space robot

由基座和两个转动关节组成的平面空间机器人如图 1 所示 (见上页), 系统的广义坐标包括基座的姿态方位角 θ_0 和两个转动关节的关节角 θ_1, θ_2 .

当不受外力和角动量作用时, 空间机器人系统的角动量守恒. 假定初角动量为零, 则角动量守恒可以表示为

$$\dot{\theta}_0 = \alpha(\theta_1, \theta_2)\dot{\theta}_1 + \beta(\theta_1, \theta_2)\dot{\theta}_2 \quad (10)$$

其中,

$$\alpha(\theta_1, \theta_2) = -\frac{g_{10} + g_{11} \cos \theta_1 + g_{12} \cos \theta_2 + g_{13} \cos(\theta_1 + \theta_2)}{g_{00} + g_{01} \cos \theta_1 + g_{02} \cos \theta_2 + g_{03} \cos(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\beta(\theta_1, \theta_2) = -\frac{g_{20} + g_{21} \cos \theta_1 + g_{22} \cos \theta_2 + g_{23} \cos(\theta_1 + \theta_2)}{g_{00} + g_{01} \cos \theta_1 + g_{02} \cos \theta_2 + g_{03} \cos(\theta_1 + \theta_2)}$$

式中 $g_{ij} (i = 0, 1, 2; j = 0, 1, 2, 3)$ 为机械臂参数有关的常数, 具体形式参考文献 [14].

若定义系统的状态变量 $\mathbf{x} \triangleq [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_0]^T$, 输入 $u_1 \triangleq \dot{\theta}_1, u_2 \triangleq \dot{\theta}_2$, 则空间机器人系统 (10) 可以表示为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha(x_1, x_2) & \beta(x_1, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \end{aligned} \quad (11)$$

由第 2 节的结论, 且根据空间机器人的模型, 得

$$f_2(x_1, x_2) = \alpha(x_1, x_2) - \frac{2S_3c_0c_3 + 2 \arctan(\frac{t(b_0-b_1)+b_2}{p})S_2}{c_3^2p^2}$$

$$\frac{\frac{dS_1}{S_1}c_2c_3 + \log(\frac{S_1}{1+t^2})(dc_2c_3 - dc_3c_2) + x_2(dc_3c_1 - dc_1c_3)}{c_3^2}$$

$$f_3(x_1, x_2) = \frac{2 \arctan(\frac{t(b_0-b_1)+b_2}{p})c_0}{c_3p} + \frac{\log(\frac{S_1}{1+t^2})c_2 - x_2c_1}{c_3}$$

所对应的状态和输入变换如式 (3) 和 (4) 所示. 式中 $df (f = c_i, S_1, p)$ 为 f 的导数, $a_i, b_i, c_i, S_i (i = 0, 1, 2, 3), p$ 均为 x_1, x_2 的函数, 具体形式参见附录.

空间机器人系统 (10) 转化为链式系统的状态变换的奇异曲线为 $\frac{\partial \beta}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0$, 其在 $x_1 - x_2$ 坐标平面的投影如图 2 所示.

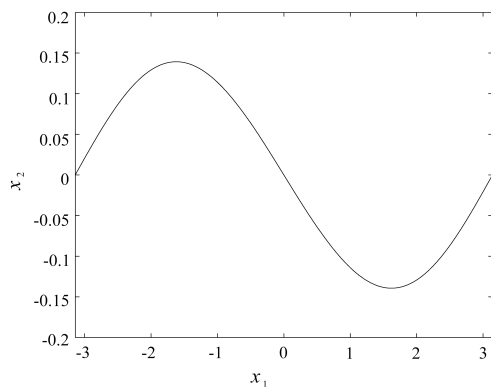


图 2 状态和输入变换的奇异曲线 $\frac{\partial \beta}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0$
Fig. 2 Singular curve of state and input transformations

当取 $\mathbf{x}_d = [\frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{2} \ 0]^T$, 控制律 (7) 中参数 $k_1 = 0.01$ 时, 可以得到 $c^* = 0.0084$, 此时期望状态的吸引区子集在 z 坐标系下如图 3 所示, 吸引区子集与奇异曲线 $\frac{\partial \beta}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0$ 的图像在 $z_2 - z_3$ 平面上的投影如图 4 所示.

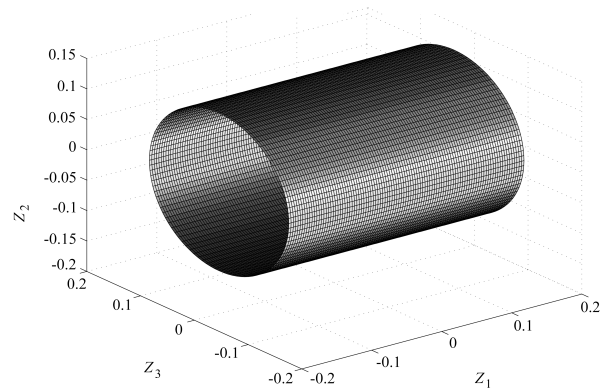


图 3 吸引区子集 $\Omega_{c^*=0.0084}$ 的图像
Fig. 3 The plot of subset of attractive manifold

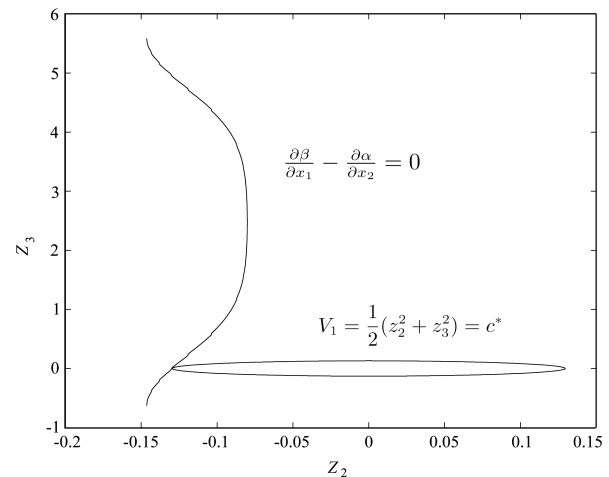


图 4 吸引区子集 $\Omega_{c^*=0.0084}$ 的边界和奇异曲线 $\frac{\partial \beta}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0$ 在 $z_2 - z_3$ 平面的投影

Fig. 4 Boundary of the subset of attractive manifold and projection of the singular curve on $z_2 - z_3$

以下对两种情况进行仿真.

1) 取空间机器人系统的初始状态和期望状态分别为: $\mathbf{x}_0 = [\frac{\pi}{2} + 0.1 \ \frac{\pi}{2} - 0.2 \ -0.0325]^T$, $\mathbf{x}_d = [\frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{2} \ 0]^T$. 容易验证, 初始状态在所估计的期望状态的吸引区子集内, 因此可以直接应用控制律 (7). 取控制律参数为 $k_1 = 0.01, k_2 = 0.01$, 仿真得到闭环系统各状态的误差曲线如图 5 所示, 其中 $\mathbf{e} = [x_1 - x_{1d} \ x_2 - x_{2d} \ x_3 - x_{3d}]^T$.

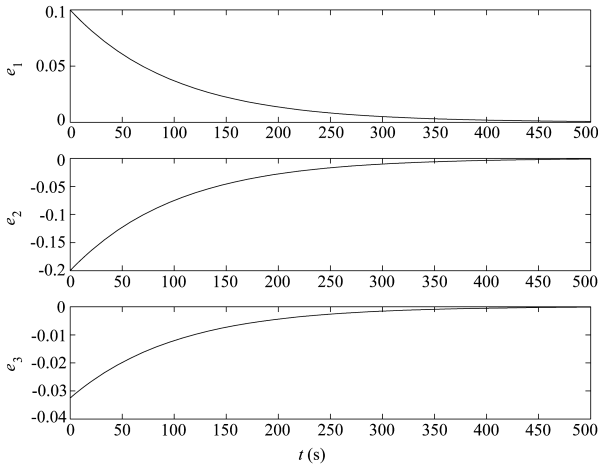


图 5 闭环控制的误差曲线

Fig. 5 The error curves of close-loop system

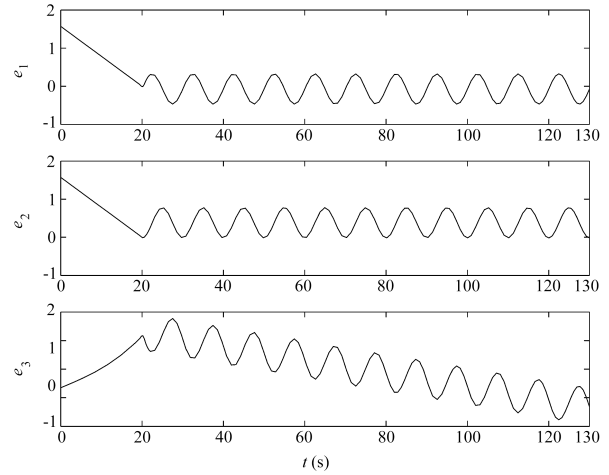


图 6 开环控制的误差曲线

Fig. 6 The error curves of open-loop system

2) 取空间机器人系统的初始状态和期望状态分别为 $\mathbf{x}_0 = [\pi \ \pi \ 0.3]^T$, $\mathbf{x}_d = [\frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{2} \ 0]^T$. 可以验证 \mathbf{x}_0 不在 \mathbf{x}_d 吸引区子集内 (若直接用控制律 (7) 进行仿真遇到奇异点时, 在该点控制 u_2 变为无穷大), 因此需要首先应用开环控制将 \mathbf{x}_0 驱动到 \mathbf{x}_d 吸引区的子集内.

开环控制的具体算法和有关参数的估算如下:

当 $0 < t \leq t_1 = 20\text{s}$ 时, 取 $u_1 = -\frac{\pi}{40}, u_2 = -\frac{\pi}{40}$, 这样当 $t = t_1$ 时, $x_1(t_1) = x_{1d}, x_2(t_1) = x_{2d}, x_3(t_1) = x_{30} + \int_0^{t_1} [\alpha(x_{10} + u_1 t, x_{20} + u_2 t)u_1 + \beta(x_{10} + u_1 t, x_{20} + u_2 t)u_2] dt = 0.3 - \frac{\pi}{40} \int_0^{20} [\alpha(\pi + \frac{\pi}{40}t, \pi + \frac{\pi}{40}t) + \beta(\pi + \frac{\pi}{40}t, \pi + \frac{\pi}{40}t)] dt = 0.6604$.

当 $t_1 < t \leq t_2 = 130\text{s}$ 时, 令 $u_1 = u_{1m} \cos(\omega(t - 20)), u_2 = u_{2m} \sin(\omega(t - 20))$, 因此 $x_1(t) = x_{1d} + \frac{u_{1m}}{\omega} \sin(\omega(t - 20)), x_2(t) = x_{2d} + \frac{u_{2m}}{\omega} [1 - \cos(\omega(t - 20))]$, 此时 $x_1 - x_2$ 平面内闭区域 D 的边界为 $\partial D = \{(x_1, x_2) : (\frac{x_1 - x_{1d}}{\frac{u_{1m}}{\omega}})^2 + (\frac{x_2 - x_{2d} - \frac{u_{2m}}{\omega}}{\frac{u_{2m}}{\omega}})^2 = 1\}$. 当 (x_1, x_2) 沿 ∂D

运动一周时 x_3 的变化量 $\Delta x_3 = \int_{t_1}^{t_1+T} [\alpha(x_1(t), x_2(t))u_1 + \beta(x_1(t), x_2(t))u_2] dt$, 适当选择 u_{1m}, u_{2m} , 使得以下两个条件成立:

P1. $D \subset \Omega_{\mathbf{x}_d}$.

P2. $|\Delta x_3| = |\Delta z_3|$ 小于吸引区 z_3 的半径 $r_{z_3} = \sqrt{2c^*}$.

由于从 (x_{1d}, x_{2d}) 到奇异曲线的最短距离为 $\delta = 1.7029$, 取 $u_{1m} = 0.25, u_{2m} = 0.25, \omega = 0.2\pi$, 则 $\frac{u_{1m}}{\omega} = 0.3979 < \delta, \frac{2u_{2m}}{\omega} = 0.7958 < \delta$, 满足条件 P1; 计算得到 $\Delta x_3 = -0.0495 < \sqrt{2c^*} = 0.1296$, 满足条件 P2. 经过 $l = 11$ 个周期, 即 $t_2 = t_1 + lT = 130\text{s}$ 时, $x_3(t_2) = x_3(t_1) + l * \Delta x_3 = 0.1159 < \sqrt{2c^*}$. 因此可知, 当 $t = t_2 = 130\text{s}$ 时, 状态轨线进入吸引区子集内 (见图 6).

当 $t > 130\text{s}$ 时切换为控制律 (7).

在以上混合控制律下系统各状态的误差曲线如图 7 所示.

仿真结果表明, 本文所提出的混合控制算法可以将空间机器人从任意初始状态渐近稳定到集合 Ω 内的任意期望状态, 证实了所提出的全局镇定控制算法的有效性.

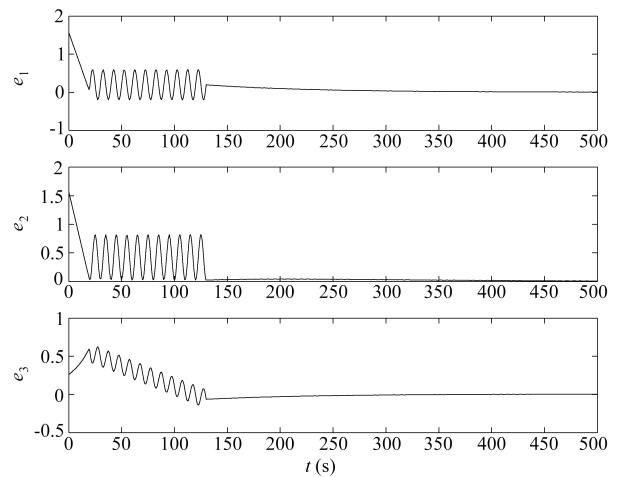


图 7 混合控制的误差曲线

Fig. 7 The error curves of hybrid control

6 结论

本文研究了一类可局部转换为链式标准型的非完整系统的全局镇定问题. 首先通过将系统模型转换为链式形式得到了一种局部渐近镇定控制律, 并利用闭环系统的不变集不包含变换奇异点的条件导出了吸引区的一个闭子集, 当系统初始状态在该子集内时, 该局部渐近镇定控制律可以将系统状态渐近镇定到期望状态. 当系统初始状态不在该子集内时, 开发了一种开环控制算法, 该算法可以保证将系统的任意初始状态驱动到除变换奇异点以外的任意期望状态. 结合开环控制算法和闭环控制律得到了一种混合控制算法, 该混合控制算法可以实现除变换奇异点以外的任意给定的期望状态的全局渐近镇定, 克服了以往控制算法只能实现局部渐近镇定的缺点. 对平面两转动关节空间机器人的仿真结果证实了所提出的混合控制算法的有效性.

本文方法可以推广到任意可以局部转换到链式系统的非完整系统, 其中吸引区的估计方法和本文完全相同, 开环控制可采用与本文类似的方法或更一般的几何控制方法.

References

- 1 Samson C. Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. *IEEE Transactions on Automation Control*, 1995, **40**(1): 64~77
 - 2 Ma Bao-Li, Huo Wei. Smooth time-varying exponential stabilization of nonholonomic chained systems. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(2): 301~305
(马保离, 霍伟. 非完整链式系统的时变光滑指数镇定. *自动化学报*, 2003, **29**(2): 301~305)
 - 3 Morin P, Samson C. Control of nonlinear chain systems from the Routh-Hurwitz stability criterion to time-varying exponential stabilizers. In: Proceedings of IEEE International Conference on Decision and Control. IEEE, 1997. 618~623
 - 4 Morin P, Samson C. Time-varying exponential stabilization of chained form systems based on a backstepping technique. In: Proceedings of the 35th IEEE Conferences on Decision and Control. IEEE, 1996. **2**: 1449~1454
 - 5 March N, Alamir M. Discontinuous exponential stabilization of chained form systems. In: Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2002. **1**: 350~355
 - 6 Astolfi A, Schaufelberger W. State and output feedback stabilization of multiple chained systems with discontinuous control. In: Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 1996. **2**: 1443~1448
 - 7 Pomet J B, Thuilot B, Bastin G, Campion G. A hybrid strategy for the feedback stabilization of nonholonomic mobile robots. In: Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation. IEEE, 1992. **1**: 129~134
 - 8 Sordalen O, Egeland O. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(1): 35~49
 - 9 Murray R M, Sastry S S. Steering nonholonomic systems in chained form. In: Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 1991. **2**: 1121~1126
 - 10 Matsuno F, Tsurusaki J. Chained form transformation algorithm for a class of 3-states and 2-inputs nonholonomic systems and attitude control of a space robot. In: Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 1999. **3**: 2126~2131
 - 11 Hassan K [Writer], Zhu Yi-Sheng [Translator]. *Nonlinear System*. Beijing: Electronical Industry Press, 2005
(Hassan K [著], 朱义胜 [译]. 非线性系统. 北京: 电子工业出版社, 2005)
 - 12 Tilbury D, Sordalen O, Bushnell L, Sastry S. A multisteering trailer system: conversion into chained form using dynamic feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1995, **11**(6): 807~818
 - 13 Murray R, Sastry S. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1993, **38**(5): 700~716
 - 14 Mukherjee R, Kamon M. Almost smooth time-invariant control of planar space multibody systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1999, **15**(2): 268~280
- 任艳青 2007年4月获北京航空航天大学硕士学位. 主要研究方向为空间机器人的轨迹跟踪和姿态控制. E-mail: yanqing.ren@ia.ac.cn
(REN Yan-Qing Received her master degree from Beijing University of Aeronautics and Astronautics in April 2007. Her research interest covers track following and attitude controlling of space robots.)
- 马保离 北京航空航天大学第七研究室教授. 主要研究方向为非线性系统控制. 本文通信作者. E-mail: mabaoli@buaa.edu.cn
(MA Bao-Li Professor at the Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics. His main research interest is control of nonlinear system. Corresponding author of this paper.)

附录

$$\begin{aligned}
 a_0 &= g_{20} + g_{21} \cos x_1 \\
 a_1 &= g_{22} + g_{23} \cos x_1 \\
 a_2 &= -g_{23} \sin x_1 \\
 b_0 &= g_{00} + g_{01} \cos x_1 \\
 b_1 &= g_{02} + g_{03} \cos x_1 \\
 b_2 &= -g_{03} \sin x_1 \\
 t &= \tan\left(\frac{x_2}{2}\right) \\
 S_1 &= t^2(b_0 - b_1) + 2b_2t + b_0 + b_1 \\
 c_0 &= d_0 + d_1 \cos x_1 + d_2 \cos^2 x_1 \\
 c_1 &= g_{02}g_{22} + g_{03}g_{23} + (g_{02}g_{23} + g_{03}g_{22}) \cos x_1 \\
 c_2 &= (g_{03}g_{22} - g_{02}g_{23}) \sin x_1 \\
 c_3 &= g_{02}^2 + g_{03}^2 + 2g_{03}g_{02} \cos x_1 \\
 d_0 &= g_{00}(g_{02}g_{22} + g_{03}g_{23}) - g_{20}(g_{02}^2 + g_{03}^2) \\
 d_1 &= g_{00}(g_{03}g_{22} + g_{02}g_{23}) + g_{01}(g_{02}g_{22} + g_{03}g_{23}) - \\
 &\quad 2g_{20}g_{02}g_{03} - g_{21}(g_{02}^2 + g_{03}^2) \\
 d_2 &= g_{01}(g_{02}g_{23} + g_{03}g_{22}) - 2g_{21}g_{02}g_{03} \\
 d_3 &= (g_{02}^2 + g_{03}^2)(g_{03}g_{22} + g_{02}g_{23}) - 2g_{02}g_{03}(g_{02}g_{22} + \\
 &\quad g_{03}g_{23}) \\
 p &= [g_{00}^2 - g_{02}^2 - g_{03}^2 + 2(g_{00}g_{01} - g_{03}g_{02}) \cos x_1 + \\
 &\quad g_{01}^2 \cos^2 x_1]^{\frac{1}{2}} \\
 S_2 &= c_3 p d c_0 - c_0 c_3 d p - c_0 p d c_3 \\
 S_3 &= \frac{[t(db_0 - db_1) + db_2]p^2 - [t(b_0 - b_1) + b_2]p d p}{p^2 + [t(b_0 - b_1) + b_2]^2}
 \end{aligned}$$