第 33 卷 第 9 期 自 动 化 学 报 Vol. 33, No. 9
2007 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA September, 2007

多性能约束下的模糊容错控制系统设计: 离散系统情形

张 刚 [1] 韩祥兰 [2] 王执铨 [1]

摘 要 研究了模糊离散系统在同时具有极点指标、H_∞ 指标和方差指标约束下的容错控制器设计问题. 利用分解和等价原理, 将非线性系统多指标约束下的可靠控制问题, 转换为一系列线性极限子系统多性能指标约束下的容错控制器设计问题; 提出了一种新的多指标约束容错控制系统设计方法, 详细分析了各相容指标的取值范围; 并给出了相容指标约束下的容错控制器设计步骤.

关键词 容错控制, 执行器故障, 模糊系统, T-S 模型, 相容性

中图分类号 TP273

Fuzzy Fault-tolerant Control System Design for Multi-indices Constraints: Fuzzy Discrete-time Systems Case

ZHANG Gang[1] HAN Xiang-Lan[2] WANG Zhi-Quan[1]

Abstract This paper addresses the problem of fuzzy fault-tolerant controller design for fuzzy discrete-time systems with pole index, steady variance index and H_∞ constraints. Based on the decomposition and equivalence principle, the reliable control problem for fuzzy nonlinear systems is decomposed into a set of extreme sub-systems fault-tolerant control problems. A new fault-tolerant control design method is proposed, and the range of consistent indices is analyzed in detail. Finally, the design steps of fault-tolerant controller with multi preformance indeces constraints are provided.

Key words Fault-tolerant control, actuator failures, fuzzy systems, T-S model, consistency

1 引言

实际控制系统对性能指标的要求是多方面的[1], 当系统发生故障后, 人们也希望能通过一定的控制手段, 不仅使其继续安全稳定运行, 而且能够保持规定的多项性能约束. 但是, 模糊控制理论对于解决多种性能指标约束下的控制问题过于保守. 它要求正定矩阵 P 同时满足 N 个线性矩阵不等式方程[2~4], 随着模糊规则数的增加和系统阶数的递增, 往往很难得到这样的正定解矩阵, 甚至是无解的. 本文采用连续型执行器故障模型, 利用分解和等价原理[5~8], 将模糊非线性系统多性能指标约束下的可靠控制问题, 转换为一系列线性极限子系统容错控制器的设计问题; 分别在精确上界和近似上界情形下, 给出了有效的、多指标约束的模糊容错控制系统设计方法.

收稿日期 2006-4-3 收修改稿日期 2006-7-7
Received April 3, 2006; in revised form July 7, 2006
国家自然科学基金 (60574082) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60574082)
1. 南京理工大学自动化学院 南京 210094 2. 浙江大学宁波理工学院信息科学与工程分院 宁波 315100
1. Automation School, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094 2. School of Information Science and Engineering, Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo 315100
DOI: 10.1360/aas-007-0956

2 问题描述与引理

考虑由如下离散 T-S 模糊模型描述的非线性系统系统的模糊规则 i : 如果 x_1 是 F_{i1}, x_2 是 F_{i2}, $\cdots$, 且 x_n 是 F_{in}, 则

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A_i\boldsymbol{x}(k) + B_{i1}\boldsymbol{u}(k) + B_{i2}\boldsymbol{\omega}(k) \\ \boldsymbol{z}(k) = C_i\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

式中, N 是模糊推理规则数, $F_{ij}(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是模糊集合, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态变量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是系统的控制输入, $\boldsymbol{z}(t) \in \mathbf{R}^p$ 是系统的被控输出, $w(t) \in \mathbf{R}^q$ 是零均值高斯白噪声过程且强度为 $W > 0$, $(A_i\, B_{i1}\ \ B_{i2}\ C_i)$ 是第 i 个局部模糊模型的系统矩阵.

用单点模糊化、乘积推理和中心加权反模糊化, 可得模糊系统的整个状态方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A(\mu(k))\boldsymbol{x}(k) + \\ \qquad B_1(\mu(k))\boldsymbol{u}(k) + B_2(\mu(k))\boldsymbol{\omega}(k) \\ \boldsymbol{z}(k) = C(\mu(k))\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \quad (2)$$

对于控制输入 $\boldsymbol{u}_i(t), i=1,2,\cdots,m$, 定义其故障后的输出信号为 $\boldsymbol{u}_i^F$, 采用文献 [9, 10] 中的故障模型, 则包含执行器失效的故障闭环系统状态方程为

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\boldsymbol{x}}(k)=A(\mu(k))\boldsymbol{x}(k)+\\ \quad B_1(\mu(k))MK(\mu(k))\boldsymbol{x}(k)+B_2(\mu(k))\boldsymbol{\omega}(k)\\ \boldsymbol{z}(k)=C(\mu(k))\boldsymbol{x}(k)\end{array}\right. \tag{3}$$

本文除常用的标准符号外, 用 $catercorner(P)$ 表示方阵 P 的对角元素组成的行向量; 用符号 $\Phi(q,r)$ 表示复平面上中心在 $-q+j0$、半径为 r 的开圆盘 ($q>r>0$, 且 $q+r<1$).

设计目标是: 对不确定故障系统 (3), 设计状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}(k)=K(\mu(k))\boldsymbol{x}(k)$, 给出同时满足区域极点指标、协方差指标以及 H_∞ 指标约束的鲁棒容错控制器的充分条件; 研究各相容指标的取值范围; 当三类指标相容时, 给出有效的容错控制器设计方法.

引理 1. 给定 R_1, R_2 为适当维数的实常值矩阵, Y 为任意的对称实矩阵, 假设 $\Sigma(t)$ 为时变适维对角矩阵满足 $|\Sigma(t)|\le U$, 且 $\exists t>0$ 使得 $|\Sigma(t)|=U$, U 为正定对角矩阵, 则

$$Y+R_1\Sigma R_2+R_2^{\rm T}\Sigma^{\rm T}R_1^{\rm T}<0$$

的充分必要条件是存在正常数 $\beta>0$, 使得

$$Y+\beta R_1UR_1^{\rm T}+\beta^{-1}R_2^{\rm T}UR_2<0$$

3　主要结果

闭环系统 (3) 是一个变结构控制系统, 难以分析系统的性能指标并设计相应的容错控制器. 为此, 本文引入模糊子空间的划分以及 "极限子系统" 的概念[5~8], 将非线性系统 (3) 的可靠控制问题转换为 N 个极限子系统的多性能指标约束下的容错控制系统设计问题.

3.1　执行器故障系统的分解

将状态空间分解为 N 个子空间 S_i

$$S_i=\{\boldsymbol{x}|\,\mu_i(\boldsymbol{x})\ge\mu_j(\boldsymbol{x}), i=1,2,\cdots,N, i\ne j\}$$

$$j=1,2,\cdots,N$$

定义子空间 S_i 的特征函数为 η_i, 即当 $\boldsymbol{x}\in S_i$ 时, $\eta_i=1$; 当 $\boldsymbol{x}\notin S_i$ 时, $\eta_i=0$. 于是, 每一个子空间的模糊模型可以表示为

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{x}(k+1)=[A_i+\Delta A_i(\mu)]\boldsymbol{x}(k)+\\ \quad [B_{i1}+\Delta B_{i1}(\mu)]MK(\mu(k))\boldsymbol{x}(k)+\\ \quad [B_{i2}+\Delta B_{i2}(\mu)]\boldsymbol{\omega}(k)\\ \boldsymbol{z}(k)=[C_i+\Delta C_i(\mu)]\boldsymbol{x}(k)\end{array}\right. \tag{4}$$

这里, $\Delta A_i(\mu)=\sum\limits_{j=1,\,j\ne i}^{N}\mu_j(k)\Delta A_{ij}$, $\Delta A_{ij}=A_j-A_i$, $\Delta B_{i1}(\mu)=\sum\limits_{j=1,\,j\ne i}^{N}\mu_j(k)\Delta B_{i1j}$, $\Delta B_{i1j}=B_{j1}-B_{i1}$, $\Delta B_{i2}(\mu)=\sum\limits_{j=1,\,j\ne i}^{N}\mu_j(k)\Delta B_{i2j}$, $\Delta B_{i2j}=B_{j2}-B_{i2}$, $\Delta C_i(\mu)=\sum\limits_{j=1,\,j\ne i}^{N}\mu_j(k)\Delta C_{ij}$, $\Delta C_{ij}=C_j-C_i$. 定义模糊系统 (4) 的上界 E 为

$$\begin{array}{l}\Delta\Phi^{\rm T}(\mu)\Delta\Phi(\mu)\le E^{\rm T}E\\ E=[E_{A_i},E_{B_{i1}},E_{B_{i2}},E_{C_i}]\\ \Delta\Phi(\mu)=\\ [\Delta A_i(\mu),\Delta B_{i1}(\mu),\Delta B_{i2}(\mu),\Delta C_i(\mu)]=\\ \sum\limits_{j=1}^{N_i}\overline{\mu}(\boldsymbol{x}(t))[\Delta A_{ij},\Delta B_{i1j},\Delta B_{i2j},\Delta C_{ij}]\\ \forall\,\mu\in M,\ \ \bar{\mu}_i(\boldsymbol{x}(t))\ne 0,\quad \boldsymbol{x}(t)\in S_i,\\ i=1,2,\cdots,N_i\end{array} \tag{5}$$

上式中, 若存在一系列模糊隶属函数 μ_i^* 使得上界能够达到, 则称此时的上界为精确上界, 否则称为近似上界. 采用控制输入

$$\boldsymbol{u}(t)=K(\mu(t))\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}\eta_iK_i\boldsymbol{x}(t) \tag{6}$$

则可以定义 N 个独立的执行器故障极限子系统为

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{x}(t+1)=[A_i+E_{A_i}]\boldsymbol{x}(t)+[B_{i1}+E_{B_{i1}}]\cdot\\ \qquad\qquad MK_i\boldsymbol{x}(t)+[B_{i2}+E_{B_{i2}}]\boldsymbol{\omega}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)=[C_i+E_{C_i}]\boldsymbol{x}(t)\end{array}\right. \tag{7}$$
$$\boldsymbol{x}(t)\in S_i$$

对故障闭环系统 (4) 定义如下的分段光滑 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\sum_{i=1}^{N}\eta_iV_i(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}\eta_i\boldsymbol{x}^{\rm T}(t)P_i\boldsymbol{x}(t)$$

式中, $(P_1, P_2, \cdots, P_N)$ 为 N 个正定对称矩阵集合. 根据变结构控制理论可知: 对分段可微 Lyapunov 函数, Lyapunov 稳定性理论仍然成立. 因此, 如下的定义是合理的.

定义 1. 给定正常数 $\gamma > 0$, 若存在一个分段状态反馈控制 (6) 和正定对称矩阵集 $(P_1, P_2, \cdots, P_N)$, 使得下述矩阵不等式组成立

$$\begin{aligned}&-P_i + \left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_{i1}MK_i\right)^{\mathrm{T}} P_i\tilde{B}_{i2}\cdot\\&\left(\gamma^2 I - \tilde{B}_{i2}^{\mathrm{T}} P_i \tilde{B}_{i2}\right)^{-1}\tilde{B}_{i2}^{\mathrm{T}} P_i\left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_{i1}MK_i\right) +\\&\left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_{i1}MK_i\right)^{\mathrm{T}}\cdot P_i\left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_{i1}MK_i\right) +\\&\tilde{C}_i^{\mathrm{T}}\tilde{C}_i < 0\end{aligned} \tag{8}$$

则称系统 (4) 二次稳定, 且 H_∞ 范数 γ 有界. 式中, $\tilde{A}_i = A_i + \Delta A_i$, $\tilde{B}_{i1} = B_{i1} + \Delta B_{i1}$, $\tilde{B}_{i2} = B_{i2} + \Delta B_{i2}$, $\tilde{C}_i = C_i + \Delta C_i$.

3.2 精确上界情形下多性能指标约束的模糊容错控制系统设计

下面给出离散模糊系统的等价性原理.

定理 1. 若存在一系列模糊隶属函数 μ_i^* 使得式 (5) 中的精确上界能够达到, 给定正常数 $\gamma > 0$, 则离散模糊系统 (4) 二次稳定且 H_∞ 范数 γ 有界的充要条件是: 存在模糊控制 (6)，使具有精确上界的 N 个极限子系统 (7) 分别二次稳定且具有相同的 H_∞ 范数 γ 界.

证明.

充分性. 假设存在模糊控制使 N 个极限子系统分别二次稳定且 H_∞ 范数 γ 有界, 并存在隶属函数 $\{\mu_1^*(\boldsymbol{x}(k)), \cdots, \mu_N^*(\boldsymbol{x}(k))\}$, 使 (5) 中的精确上界能够达到，则对极限子系统 (7) 存在正定对称矩阵集 $(P_1, \cdots, P_N)$, 满足

$$\begin{aligned}J :=& -P_i + \left(\bar{A}_i + \bar{B}_{i1}MK\right)^{\mathrm{T}} P_i\bar{B}_{i2}\cdot\\&\left(\gamma^2 I - \bar{B}_{i2}^{\mathrm{T}} P_i\bar{B}_{i2}\right)^{-1}\bar{B}_{i2}^{\mathrm{T}} P_i\left(\bar{A}_i + \bar{B}_{i1}MK\right) +\\&\left(\bar{A}_i + \bar{B}_{i1}MK\right)^{\mathrm{T}} P_i\left(\bar{A}_i + \bar{B}_{i1}MK\right) +\\&\bar{C}_i^{\mathrm{T}}\bar{C}_i < 0\end{aligned} \tag{9}$$

式中, $\bar{A}_i = A_i + E_{A_i}$, $\bar{B}_{i1} = B_{i1} + E_{B_{i1}}$, $\bar{B}_{i2} = B_{i2} + E_{B_{i2}}$, $\bar{C}_i = C_i + E_{C_i}$, 显然, 上式小于零等价于存在正常数 $1 > \varepsilon_i > 0$, 使得

$$\begin{aligned}J \le& -P_i + \left(\bar{A}_i + \bar{B}_{i1}MK\right)^{\mathrm{T}} P_i\bar{B}_{i2}\cdot\\&\left(\gamma^2 I - \bar{B}_{i2}^{\mathrm{T}} P_i\bar{B}_{i2}\right)^{-1}\bar{B}_{i2}^{\mathrm{T}} P_i\left(\bar{A}_i + \bar{B}_{i1}MK\right) +\\&\left(\bar{A}_i + \bar{B}_{i1}MK\right)^{\mathrm{T}} P_i\left(\bar{A}_i + \bar{B}_{i1}MK\right) +\\&(1-\varepsilon_i)^{-1} C_i C_i^{\mathrm{T}} + \varepsilon_i^{-1} E_{C_i} E_{C_i}^{\mathrm{T}} < 0\end{aligned} \tag{10}$$

利用矩阵的 Schur 补定理以及引理 1 可知: 存在正常数 $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$, 使得矩阵不等式 (11)(见本页下方) 成立.

式 (11) 中, $\Psi = -P_i + (1-\varepsilon_i)^{-1} C_i C_i^{\mathrm{T}} + \varepsilon_i^{-1} E_{C_i} E_{C_i}^{\mathrm{T}}$, $\Xi_1^{\mathrm{T}} = [I \ MK_i^{\mathrm{T}}]$, $\Xi_2^{\mathrm{T}} = \left[E_{A_i}^{\mathrm{T}} \ B_{i1}{}^{\mathrm{T}}\right]$.

对于离散模糊系统 (4)，选择相同的正定对称矩阵集 $(P_1, \cdots, P_N)$, 并定义 $\tilde{J}$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{J} :=& -P_i + \left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_{i1}MK\right)^{\mathrm{T}} P_i\tilde{B}_{i2}\cdot\\&\left(\gamma^2 I - \tilde{B}_{i2}^{\mathrm{T}} P_i\tilde{B}_{i2}\right)^{-1}\tilde{B}_{i2}^{\mathrm{T}} P_i\left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_{i1}MK\right) +\\&\left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_{i1}MK\right)^{\mathrm{T}} P_i\left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_{i1}MK\right) +\\&\tilde{C}_i^{\mathrm{T}}\tilde{C}_i\end{aligned} \tag{12}$$

类似于前面的证明过程, 自然有

$$\tilde{J} \le J < 0$$

因此, 模糊反馈控制 (6) 使故障系统 (4) 渐进稳定且 H_∞ 范数 γ 有界.

必要性. 若模糊系统 (4) 渐进稳定且 H_∞ 范数 γ 有界, 则在子系统 (7) 中令 $\mu = \mu^*$, 可知式 (7) 中的极限子系统是渐进稳定的且 H_∞ 范数 γ 有界. □

基于定理 1 的结论, 多指标约束下的离散模糊容错控制问题可以重新描述为: 对第 N 个极限子系统设计容错控制策略, 使得第 i 个故障极限子系统满足约束条件：

1) 闭环系统的极点集 $\Lambda\left(\bar{A}_i + \bar{B}_{i1}MK_i\right) \subset \Phi(q, r)$;

2) 稳态状态协方差矩阵 X 满足 $catercorner(X_i) \le \boldsymbol{\sigma}_i^2$;

$$J \le \begin{bmatrix}\Psi & 0 & A_i + B_{i1}MK_i\\0 & -\gamma_i^2 I & B_{i2}\\(A_i + B_{i1}MK_i)^{\mathrm{T}} & B_{i2}^{\mathrm{T}} & -P_i^{-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha_i \Xi_1^{\mathrm{T}}\Xi_2\Xi_2^{\mathrm{T}}\Xi_1 & 0 & 0\\0 & \beta_i E_{B_{i2}} E_{B_{i2}}^{\mathrm{T}} & 0\\0 & 0 & (\alpha_i^{-1} + \beta_i^{-1}) I\end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} -rQ_i+\varepsilon_{i1}\bar{B}_{i1}M_0JM_0\bar{B}_{i1}^{\mathrm{T}} & \left(\bar{A}_i+qI\right)Q_i+\bar{B}_{i1}M_0S_i & 0 \\ Q_i\left(\bar{A}_i+qI\right)^{\mathrm{T}}+S_iM_0\bar{B}_{i1}^{\mathrm{T}} & -rQ_i & S_i^{\mathrm{T}}J^{1/2} \\ 0 & J^{1/2}S_i & -\varepsilon_{i1}I \end{bmatrix}<0 \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} -Q_i & Q_i\bar{A}_i^{\mathrm{T}}+S_i^{\mathrm{T}}M_0\bar{B}_{i1}^{\mathrm{T}} & S_i^{\mathrm{T}}J^{1/2} \\ \bar{A}_iQ_i+\bar{B}_{i1}M_0S_i & -Q_i+\bar{B}_{i2}W\bar{B}_{i2}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_{i2}\bar{B}_{i1}M_0JM_0\bar{B}_{i1}^{\mathrm{T}} & 0 \\ J^{1/2}S_i & 0 & -\varepsilon_{i2}I \end{bmatrix}<0 \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} -Q_i+\bar{C}_i^{\mathrm{T}}\bar{C}_i+\varepsilon_{i3}\bar{B}_{i1}M_0JM_0\bar{B}_{i1}^{\mathrm{T}} & 0 & \bar{A}_iQ_i+\bar{B}_{i1}M_0S_i & 0 \\ 0 & -\gamma_i^2I & \bar{B}_{i2}Q_i & 0 \\ Q_i\bar{A}_i^{\mathrm{T}}+S_i^{\mathrm{T}}M_0\bar{B}_{i1}^{\mathrm{T}} & Q_i\bar{B}_{i2}^{\mathrm{T}} & -Q_i & S_i^{\mathrm{T}}J^{1/2} \\ 0 & 0 & J^{1/2}S_i & -\varepsilon_{i3}I \end{bmatrix}<0 \tag{15}$$

3) 从扰动输入 $\boldsymbol{\omega}(k)$ 到被控输出 $\boldsymbol{z}_i(k)$ 的传递函数矩阵满足 $\|G(\boldsymbol{z})\|_\infty<\gamma_i$.

利用引理 1 以及矩阵的 Schur 补定理, 类似于文献 [11] 定理 3 的证明过程可知下述定理成立, 相似的证明过程可参见文献 [12~14].

定理 2. 考虑第 i 个极限子系统 (7), 存在控制 K_i 满足约束条件 1) 的充分必要条件是实变量 $\gamma_i>0, \varepsilon_{ij}>0\,(i=1,2,3)$ 以及矩阵变量 $Q_i=Q_i^{\mathrm{T}}>0$, S_i 的线性矩阵不等式组 (LMIs)(13)~(15) 有可行解而且若 $(Q_i,S_i,\varepsilon_{ij},\gamma_i)$ 是上述不等式组的任意解, 则反馈增益 $K_i=S_iQ_i^{-1}$ 必使第 i 个极限子系统 (7) 满足约束条件 1), 且稳态状态方差矩阵 $X_i<Q_i$, $\|H(s)\|_\infty$ 范数 γ 有界.

在下面的讨论中, 我们总是假设极限子系统 i 状态反馈极点可配置, 则关于矩阵变量 $(Q_i,S_i,\gamma_i^2,\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\varepsilon_{i3})$ 的线性矩阵不等式组 (13)~(15) 总有可行解, 下述极值问题有意义

$$\begin{aligned} &\min\left(\mathrm{tr}\left(Q_i\right)\right):\left(Q_i,S_i,\gamma_i^2,\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\varepsilon_{i3}\right) \\ &\text{s.t LMIs (13)}\sim(15) \end{aligned} \tag{16}$$

令 $(Q_{i0},S_{i0},\gamma_{i0}^2,\varepsilon_{i10},\varepsilon_{i20},\varepsilon_{i30})$ 为极值问题 (16) 的极小值点, 显然, 若给定方差上界指标 $\boldsymbol{\sigma}^2\geq catercorner\,(Q_{i0})$, 则 LMIs (13)~(15) 必有可行解. 于是, 自然有下述定理成立.

定理 3. 对极限子系统 i, 假设极点指标 $\Phi(q,r)$ 状态反馈可配置, 给定方差上界指标 $\boldsymbol{\sigma}^2\geq catercorner\,(Q_{i0})$, 则由矩阵不等式 (13)~(15) 和 $Q_i<\bar{Q}_i$ 构成的线性矩阵不等式组总有可行解, 从而下述极值问题有意义

$$\begin{aligned} &\min\left(\mathrm{tr}\left(\gamma_i^2\right)\right):\left(Q_i,S_i,\gamma_i^2,\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\varepsilon_{i3}\right) \\ &\text{s.t LMIs (13)}\sim(15), Q_i<\bar{Q}_i) \end{aligned} \tag{17}$$

这里, $\bar{Q}_i$ 是满足 $catercorner\left(\bar{Q}_i\right)=\boldsymbol{\sigma}^2$ 的任意正定对称矩阵.

记 $\left(\tilde{Q}_i,\tilde{S}_i,\tilde{\gamma}_i^2\right)$ 为上述极值问题的极小值点. 根据定理 2 和定理 3, 可以得出定理 4, 它为有效求取满足三类相容约束指标的容错控制器提供了理论依据.

定理 4. 对极限子系统 i, 假设区域极点指标 $\Phi(q,r)$ 状态反馈可配置, 给定 H_∞ 指标 $\gamma^2>\tilde{\gamma}^2$, 方差上界指标 $\boldsymbol{\sigma}^2\geq catercorner\,(Q_{i0})$, 则由矩阵不等式 (13)~(15) 和 $Q_i<\bar{Q}_i$ 构成的线性矩阵不等式组必有可行解, 且若 (Q_i,S_i) 是其任一可行解, 则反馈增益 $K_i=S_iQ_i^{-1}$ 即为所求的使极限子系统 i 同时满足三类指标约束的满意容错控制器.

综合定理 1~4，精确上界情况下，多指标约束的模糊容错控制系统设计步骤如下：

1) 计算式 (5) 中的精确上界，分解执行器故障系统为 N 个极限子系统 (7);

2) 对每一个极限子系统运用定理 4 设计同时满足三类指标约束的容错控制增益 K_i;

3) 将得到的控制增益 K_i 代入式 (6)，即可得到故障闭环系统 (4) 的容错控制器.

3.3　近似上界情形下多性能指标约束的模糊容错控制系统设计

定理 1 要求精确上界, 但在很多情况下, 很难找

到精确上界, 因此还要应用近似上界. 相应地, 有如下的等价定理.

定理 5. 假定近似上界和控制律分别为式 (5) 和式 (6), 如果存在正常数 $\sigma_i > 0$, $0 < \xi_i < 1$, $0 < \rho_i < \gamma^2$, $\chi_i > 0$ 以及正定对称矩阵集 $(P_1, P_2, \cdots, P_N)$ 使得线性矩阵不等式 (18)(见本页下方) 成立, 其中, $\Sigma_{i11} = -P_i + \zeta_i E_{A_i} E_{A_i}^{\mathrm{T}} + \sigma_i E_{B_{i1}} E_{B_{i1}}^{\mathrm{T}} + \eta_i B_{i1} M_0 J M_0 B_{i1}^{\mathrm{T}}$, $\Sigma_{i13} = P_i (A_i + B_{i1} M_0 K_i)$, 则相对于该控制, 模糊系统 (4) 渐进稳定且 H_∞ 范数 γ 有界.

证明. 证明过程与定理 1 类似, 不再赘述. □

基于定理 5，近似上界情况下多指标约束的模糊容错控制系统设计步骤为：

1) 利用近似上界的寻找方法获得最大容许上界 (5);

2) 将这些近似上界代入式 (7), 获得 N 个独立的极限子系统;

3) 对每一个极限子系统运用定理 4 设计同时满足三类指标约束的容错控制增益 K_i;

4) 通过稳定性检验方法检验稳定性条件 (18) 是否成立, 如果不成立, 则执行步骤 1), 选取另外的最大容许上界.

4 数值实例

考虑如下的状态空间模糊模型:

模糊系统规则 1. 如果 $\boldsymbol{x}_2$ 是 F_{11}, 则

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_1 \boldsymbol{x}(t) + B_{11} \boldsymbol{u}(t) + B_{12} \boldsymbol{\omega}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = C_1 \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

模糊系统规则 2. 如果 $\boldsymbol{x}_2$ 是 F_{21}, 则

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_2 \boldsymbol{x}(t) + B_{21} \boldsymbol{u}(t) + B_{22} \boldsymbol{\omega}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = C_2 \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

式中,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6.5000 & -0.0500 & -0.0025 \\ 0 & -5.0000 & 1.4500 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.5000 & 0.0500 & 0.0025 \\ 0 & -1.0000 & 0.5500 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0 \\ 0.5000 & 0 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5000 & 1.5000 \\ 0 & 1.5000 & -0.5000 \end{bmatrix},$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0 & 0.5000 & 0.5000 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = I_{3\times 3},\ W = 0.01 I_{3\times 3}.$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{i11} & \zeta_i E_{A_i} E_{B_{i2}}^{\mathrm{T}} & \Sigma_{i13} & 0 & 0 & C_i^{\mathrm{T}} & I & 0 \\ \zeta_i E_{B_{i2}} E_{A_i}^{\mathrm{T}} & -\gamma_i^2 I + \zeta_i E_{B_{i2}} E_{B_{i2}}^{\mathrm{T}} & P_i B_{i2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{i13}^{\mathrm{T}} & B_{i2}^{\mathrm{T}} P_i & -P_i & K_i^{\mathrm{T}} M_0 P_i & I & 0 & 0 & K_i^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & P_i M_0 K_i & -\sigma_i I + \eta_i M_0 J M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\zeta_i I & 0 & 0 & 0 \\ C_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i E_{C_i}^{\mathrm{T}} E_{C_i} - I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_i I & 0 \\ 0 & 0 & K_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_i I \end{bmatrix} < 0 \tag{18}$$

执行器故障模型为

$$M_L = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix}, \quad M_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

直接计算可知

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ 0 & 0.975 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0.0526 & 0 \\ 0 & 0.0256 \end{bmatrix}.$$

由于在大多数情况下, 当 $\mu(\boldsymbol{x}(t)) = 0.5$ 时, 系统在子空间边界上的近似上界最大, 因此采用近似上界: $E_{A_1} = E_{A_2} = 0.5(A_2 - A_1)$, $E_{B_{11}} = E_{B_{21}} = 0.5(B_{21} - B_{11})$, $E_{B_{12}} = E_{B_{22}} = 0.5(B_{22} - B_{12})$. 将上述近似上界代入式 (8), 得到第一个极限子系统为

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_1 = I_{3\times 3}$$

给定极点指标 $\Phi(0,1)$, 方差上界指标 $\boldsymbol{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 2.5 & 23.7 \end{bmatrix}$ 以及 H_∞ 指标 $\gamma = 1.5000$; 应用定理 4 直接计算得到极限子系统 1 的容错控制器为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 4.0949 & 0 & 0 \\ 0 & -9.4842 & 2.1650 \end{bmatrix},$$

此时相应的 Q_1 矩阵为

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.8355 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3849 & 7.3574 \\ 0 & 7.3574 & 23.6860 \end{bmatrix},$$

且矩阵 $\left(\bar{A}_1 + \bar{B}_{11} M_0 K_1\right)$ 的极点集

$$\Lambda\left(\bar{A}_1 + \bar{B}_{11} M_0 K_1\right) = (0.3528, -0.2420, -0.1099).$$

第二个子系统为

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.005 \\ 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{C}_1 = I_{3\times 3}$$

给定极点指标 $\Phi(0, 0.8)$, 方差上界指标 $\boldsymbol{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} 3.1 & 33.4 & 25.12 \end{bmatrix}$, H_∞ 范数 $\gamma = 0.5000$. 由定理 4 计算得到反馈控制增益为

$$K_2 = \begin{bmatrix} -2.3653 & -1.0102 & -0.0987 \\ -0.0692 & -0.0362 & -0.7009 \end{bmatrix},$$

相应的 Q_2 矩阵为

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 3.0600 & -8.4845 & 0.0650 \\ -8.4845 & 33.3125 & -1.7875 \\ 0.0650 & -1.7875 & 25.0456 \end{bmatrix}$$

且矩阵 $\left(\bar{A}_2 + \bar{B}_{21} M_0 K_2\right)$ 的极点集

$$\Lambda\left(\bar{A}_2 + \bar{B}_{21} M_0 K_2\right) = (0.6005, 0.4267, 0.3297).$$

将得到的控制增益矩阵 (K_1, K_2) 代入式 (18), 可知式 (18) 成立, 从而保证了整个模糊非线性系统具有良好的动态品质和稳态性能.

5 结论

本文通过引入模糊子空间的划分以及极限子系统的概念, 将复杂的模糊非线性系统的容错控制问题, 分解为一系列等价的线性极限子系统的可靠控制问题, 并详细分析了子系统与原始模糊非线性系统间的等价性质. 从而, 通过对极限子系统多性能指标的约束达到对原始模糊非线性系统的动态和稳态性能要求.

References

1 Guo Z. A survey of satisfying control and estimation. In: Proceedings of the 14th IFAC Congress. Beijing, China, 1999. 443～447

2 Chang W J, Wu S M. State variance constrained fuzzy controller design for 6 nonlinear TORA systems with minimizing control input energy. In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2003. 2616～2623

3 Liu H P, He K Z, Sun F C, Sun Z Q. Analysis and synthesis of fuzzy stochastic systems via LMI approach. In: Proceedings of IEEE Region 10th Conference on Computers, Communications, Control and Power Engineering. IEEE, 2002. **3**: 1700∼1703

4 Chang W J, Yeh Y L, Meng Y T. Discrete observed-state feedback fuzzy control with common state covariance assignment. In: Proceedings of IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control. IEEE, 2004. 624∼629

5 Cao S G, Rees N W, Feng G. Stability analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems. *International Journal of Control*, 1996, **64**(3): 1069∼1087

6 Cao S G, Rees N W, Feng G. Analysis and design of uncertain fuzzy control systems. In: Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. IEEE, 1996. 647∼653

7 Feng M, Harris C J. Feedback stabilization of fuzzy systems via linear matrix inequalities. *International Journal of Systems Science*, 2001, **32**(3): 221∼231

8 Cao S G, Rees N W, Feng G. Analysis and design for a class of complex control systems Part II: fuzzy controller design. *Automatica*, 1997, **33**(6): 1029∼1039

9 Wang Fu-Zhong, Yao Bo, Zhang Si-Ying. Reliable control of regional stabilizability for linear systems. *Control Theory and Applications*, 2004, **21**(5): 835∼839
(王福忠, 姚波, 张嗣瀛. 线性系统区域稳定的可靠控制. 控制理论与应用, 2004, **21**(5): 835∼839)

10 Yang Y, Yang G H, Soh Y C. Reliable control of discrete-time systems with actuator failure. *IEE Proceedings of Control Theory Application*, 2000, **147**(4): 428∼432

11 Zhang Gang, Wang Zhi-Quan. Fault tolerant control system design for linear uncertain systems with multi-indices constraints. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2005, **35**(2): 5∼9
(张刚, 王执铨. 多指标约束下的容错控制系统设计. 东南大学学报 (自然科学版), 2005, **35**(2): 5∼9)

12 Wang Yuan-Gang, Guo Zhi. Consistency of multiple performance indices of feedback control system. *Control Theory and Applications*, 2000, **20**(3): 423∼426
(王远钢, 郭治. 反馈控制系统多性能约束指标的相容性. 控制理论与应用, 2000, **20**(3): 423∼426)

13 Cheng Xiang-Quan, Guo Zhi, Wang Yuan-Gang. On dynamic output control with constraints on H_∞, pole placement and variance. *Control and Decision*, 2002, **17**(3): 282∼286
(程相权, 郭治, 王远钢. 满足 H_∞ 区域极点和方差指标约束的动态输出反馈控制研究. 控制与决策, 2002, **17**(3): 282∼286)

14 Wang Zi-Dong, Sun Xiang, Guo Zhi. Constrained variance design for asssigning regional poles: the discrete-time case. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*. 2000, **24**(1): 28∼31
(王子栋, 孙翔, 郭治. 配置区域极点的约束方差设计: 离散时间情形. 南京理工大学学报, 2000, **24**(1): 28∼31)

张 刚 博士. 主要研究方向为故障检测与诊断、容错控制.
E-mail: zhangganghxl@yahoo.com.cn
(**ZHANG Gang** Ph. D. at Automation School, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers fault detection and diagnose, fault-tolerant control.)

韩祥兰 博士, 讲师. 主要研究方向为智能决策支持、最优化理论与应用、综合集成系统. 本文通信作者.
Email: hanxianglan_nit@yahoo.com.cn
(**HAN Xiang-Lan** Ph. D., lecturer. Her research interest covers intelligent decision support, optimal theory and application, and metasynthetic system. Corresponding author of this paper.)

王执铨 教授. 主要研究方向为动态大系统理论、混沌控制理论与应用、容错控制.
(**WANG Zhi-Quan** Professor at Automation School, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers dynamic large-scale systems theory, chaos control theory and application, and fault-tolerant control.)