

非整数阶系统的频域辨识法

李远禄¹ 于盛林¹

摘要 提出了一类非整数阶系统的频域辨识最小二乘方法,给出了算法的详细推导过程.通过对已知系统仿真,结果表明该方法有如下优点:对于非整数阶对象,能够用更简单的模型获得更好的频域响应拟合;对于整数阶对象,采用阶数扫描的方法仍然能找到拟合其频域响应的最好的整数阶模型;与整数阶系统辨识算法相比,该算法更稳定.

关键词 非整数阶系统,非整数阶系统辨识,最小二乘方法
中图分类号 O231

Identification of Non-integer Order Systems in Frequency Domain

LI Yuan-Lu¹ YU Sheng-Lin¹

Abstract A least squares method for identification of non-integer order systems is introduced into frequency domain and an algorithm is presented. The verification was performed on systems with known parameters. Results show that non-integer order systems have important advantages over integer order systems: We can achieve better fittings of the frequency response data with simpler models for non-integer order systems; We can achieve the best integer-order model that fit the measured frequency response data by scanning orders for integer-orders systems; The algorithm is numerically more stable than in the case of integer order.

Key words Non-integer systems, non-integer order systems identification, least squares method

1 引言

理论推导和实验测试都已经表明存在非整数阶系统,如非整数阶粘弹性模型^[1],扩散模型^[2],电化学过程^[3],热传导现象^[4],对于这些本身带有非整数阶特性的系统,若采用整数阶系统去建模,不能准确描述这些系统.文献[5]表明,采用非整数阶系统描述那些本身带有非整数阶特性的对象时,能够更好地揭示对象的特性.文献[6~8]研究了时域中非整数阶系统的辨识方法,但非整数阶微分是一种非局部算子,具有记忆特性,因而,在时域中计算非整数阶微分要用到大量数据,而实验中经常难以满足该条件.文献[9]从频域角度讨论了非整数阶系统的辨识方法,但它只讨论了全零点和全极点型非整数阶系统的辨识,本文将其推广到一般的非整数阶传递函数模型.选择频域法来辨识非整数阶系统有两方面的优势,一方面,可避免时域中计算非整数阶微分时需要采集大量数据的困难;另一方面,还有大量的成熟的整数阶系统频域辨识理论和方法可借鉴^[10].

1.1 非整数阶系统的频域辨识法

假定一个频率特性已知的系统,其传递函数为

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s^q + \cdots + b_m s^{mq}}{a_0 + a_1 s^q + \cdots + a_n s^{nq}} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1)$$

收稿日期 2006-4-12 收修改稿日期 2006-8-4

Received April 12, 2006; in revised form August 4, 2006

航空科学基金(04D52032)资助

Supported by Air Science Foundation of P. R. China (04D52032)

1. 南京航空航天大学自动化学院 南京 210016

1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016

DOI: 10.1360/aas-007-0882

不失一般性假定 $a_n = 1$, 其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{\alpha(\omega) + j\beta(\omega)}{\sigma(\omega) + j\tau(\omega)} \quad (2)$$

式中 $A(j\omega)$ 和 $B(j\omega)$ 是复数, $\alpha(j\omega)$, $\beta(j\omega)$, $\sigma(j\omega)$, $\tau(j\omega)$ 为实数.

当实验测试获得了过程的频率特性, 然后将其分解为实频特性 $\text{Re}(\omega)$ 和虚频特性 $\text{Im}(\omega)$, 设在频率点 ω_i 上, 实测频率特性与估计频率特性的误差为

$$\varepsilon(j\omega_i) = [\text{Re}(\omega_i) + j\text{Im}(\omega_i)] - \frac{B(j\omega_i)}{A(j\omega_i)} \quad (3)$$

这是一个非线性极小化问题, 为了简化计算过程, 提出了一些简化方法, 其中使用最广泛的是 Levy 提出的一种加权最小二乘法的误差准则

$$J = \sum_{i=1}^L \|A(j\omega_i)\varepsilon(j\omega_i)\|^2 \quad (4)$$

这样就使这个非线性最小化问题转化成了线性最小化问题. 将式 (2) 代入式 (4), 可得

$$J = \sum_{i=1}^L \|[\sigma(\omega_i) + j\tau(\omega_i)][\text{Re}(\omega_i) + j\text{Im}(\omega_i)] - \alpha(\omega_i) - j\beta(\omega_i)\|^2 \quad (5)$$

为使 J 达到极小, 可分别使 J 对参数 $a_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ 和 $b_j, j = 0, 1, \dots, m$ 求导, 并令其为零, 经整理并写成矩阵形式, 则可得到

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m]^T \quad (8)$$

$$\mathbf{e} = [e_0 \ e_1 \ \dots \ e_m]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{f} = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{n-1}]^T \quad (10)$$

$$A_{k+1,l+1} = \sum_{i=1}^L \omega_i^{(l+k)q} \left\{ \text{Re}(\omega_i) \cos \frac{(k-l)q\pi}{2} + \text{Im}(\omega_i) \sin \frac{(k-l)q\pi}{2} \right\} \quad (11)$$

$k = 0, 1, \dots, m; \quad l = 0, 1, \dots, n-1$

$$B_{k+1,l+1} = - \sum_{i=1}^L \omega_i^{(l+k)q} \cos \frac{(k-l)q\pi}{2} \quad (12)$$

$k = 0, 1, \dots, m; \quad l = 0, 1, \dots, m$

$$e_{k+1} = - \sum_{i=1}^L \omega_i^{(n+k)q} \left\{ \text{Re}(\omega_i) \cos \frac{(k-n)q\pi}{2} + \text{Im}(\omega_i) \sin \frac{(k-n)q\pi}{2} \right\} \quad (13)$$

$k = 0, 1, \dots, m$

$$C_{k+1,l+1} = \sum_{i=1}^L \omega_i^{(l+k)q} \left\{ [\text{Re}(\omega_i)]^2 + [\text{Im}(\omega_i)]^2 \right\} \cdot \cos \frac{(k-l)q\pi}{2} \quad (14)$$

$k = 0, 1, \dots, n-1; \quad l = 0, 1, \dots, n-1$

$$D_{k+1,l+1} = \sum_{i=1}^L \omega_i^{(l+k)q} \left\{ -\text{Re}(\omega_i) \cos \frac{(k-l)q\pi}{2} + \text{Im}(\omega_i) \sin \frac{(k-l)q\pi}{2} \right\} \quad (15)$$

$k = 0, 1, \dots, n-1; \quad l = 0, 1, \dots, m$

$$f_{k+1} = \sum_{i=1}^L \omega_i^{(n+k)q} \left\{ [\text{Re}(\omega_i)]^2 + [\text{Im}(\omega_i)]^2 \right\} \cdot \cos \frac{(k-n)q\pi}{2} \quad (16)$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

很明显, 当 $q = 1$ 时, 就是常规的整数阶系统辨识的最小二乘法

2 算法验证与分析

为了验证方法的正确性和发现非整数阶系统的优越性, 分别对已知系统和实际系统进行了仿真. 考虑已知频率特性的系统

$$G_1(s) = \frac{3 + 7s}{1 + 2s + 5s^2 + 9s^3 + s^4} \quad (17)$$

$$G_2(s) = \frac{3 + 7s^{0.5}}{1 + 2s^{0.5} + 5s^1 + 9s^{1.5} + s^2} \quad (18)$$

采用模型

$$\hat{G}(s) = \frac{b_0 + b_1 s^q}{a_0 + a_1 s^q + a_2 s^{2q} + a_3 s^{3q} + s^{4q}} \quad (19)$$

在 $10^{-5} \sim 10^5 \text{Hz}$ 内, 用误差指标

$$J = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [G(j\omega_i) - \hat{G}(j\omega_i)]^2 \quad (20)$$

分别取 $q = 0.1, 0.2, \dots, 1$ 去辨识模型参数. 对于系统 $G_1(s)$, 其误差指标 J 与阶数 q 的关系如图 1.

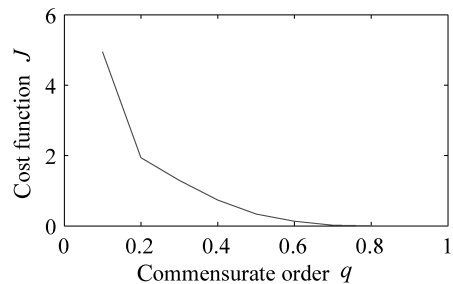


图 1 阶数 q 与误差指标 J 的关系

Fig. 1 Relationship between order q and cost function J

通过检查发现 $q = 1$ 时, 误差指标最小, $J = 1.0592\text{E}-011$, 计算中出现的矩阵逆条件数

$rcond = 6.197\text{E}-014$, 这时的辨识结果为 $\theta = [1.0000 \ 2.0000 \ 5.0000 \ 9.0000 \ 3.0000 \ 7.0000]$. 对于系统 $G_2(s)$, 其误差指标 J 与阶数 q 的关系如图 2.

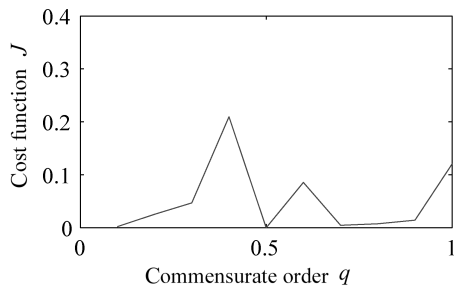


图 2 阶数 q 与误差指标 J 的关系

Fig. 2 Relationship between order q and cost function J

通过检查发现 $q = 0.5$ 时, 误差指标最小, $J = 5.7311\text{E}-023$, 计算中出现的矩阵逆条件数 $rcond = 1.707\text{E}-008$, 这时的辨识结果为 $\theta = [1.0000 \ 2.0000 \ 5.0000 \ 9.0000 \ 3.0000 \ 7.0000]$. 模型 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的模型误差曲线分别见图 3 和图 4.

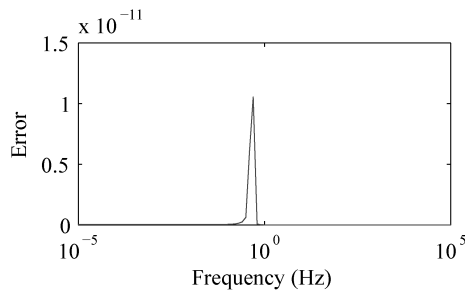


图 3 模型误差曲线

Fig. 3 Model error curve

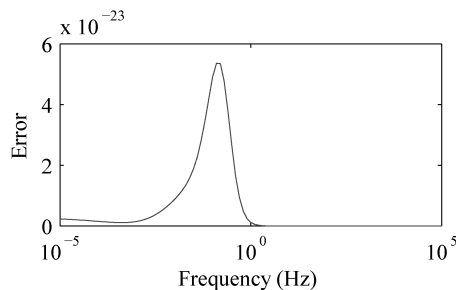


图 4 模型误差曲线

Fig. 4 Model error curve

从图中可看出低频段的误差比高频段的误差大, 同时还分析了模型误差的统计特性, 包括正态分布性和白化特性, 其结果为零均值近高斯性态, 该算法是一种有偏估计.

除此之外, 我们还做了大量的仿真, 结果表明系统本身具有非整数阶特性时, 用非整数阶传递函数能够更好地拟合其频率特性; 系统本身是整数阶系统时, 采用分数阶扫描的方法, 同样能找到这个合适的整数阶系统. 另外, 从仿真中得

到的矩阵逆条件数发现, 与同阶数整数阶系统辨识算法相比, 非整数阶系统辨识算法更稳定. 此外, 还发现非整数阶系统辨识方法同样存在几个不足: 1) 在拟合宽频数据时, 低频部分拟合误差较大; 2) 若传递函数 $G(s)$ 有极点使 $\|A(j\omega)\|^2$ 在整个频域内变化很大, 会引起大的误差.

3 结论

本文详细地推导了非整数阶系统的频域最小二乘辨识方法, 通过对已知系统和实际的仿真对比, 发现非整数阶系统辨识方法较整数阶系统辨识方法具有更多的优越性, 为研究和分析非整数阶系统提供了一个有力工具. 不过, 本文没有给出算法的严格数学论证, 该问题仍在进一步研究当中. 此外本算法是一种有偏估计, 不适合于强噪声干扰的系统辨识.

References

- 1 Adolfsson K, Enelund M, Olsson P. On the fractional order model of viscoelasticity. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2005, **9**(1): 15~34
- 2 Dranikov I L, Kondratenko P S, Matveev L V. Anomalous transport regimes in a stochastic advection-diffusion model. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2004, **98**(5): 945~952
- 3 Bisquert J, Compte A. Theory of the electrochemical impedance of anomalous diffusion. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 2001, **499**(1): 112~120
- 4 Battaglia J L, Lay L L, Batsale J C, Oustaloup A, Cois O. Heat flow estimation through inverted non-integer identification models. *International Journal of Thermal Science*, 2000, **39**(3): 374~389
- 5 Heymans N. Fractional calculus description of non-linear viscoelastic behaviour of polymers. *Nonlinear Dynamics*, 2004, **38**(1-2): 221~231
- 6 Dorcak L, Lesko V, Kostial I. Identification of Fractional-Order Dynamical Systems [Online], available: <http://arxiv.org/abs/math/0204187>, April 15, 2005
- 7 Poinot T, Trigeassou J C. Identification of fractional systems using an output-error technique. *Nonlinear Dynamics*, 2004, **38**(1-2): 133~154
- 8 Wang Z B, Cao G Y, Zhu X J. Identification algorithm for a kind of fractional order system. *Journal of Southeast University*, 2004, **20**(3): 297~302
- 9 Hartley T T, Lorenzo C F. Fractional-order system identification based on continuous order-distributions. *Signal Processing*, 2003, **83**(11): 2287~2300
- 10 Pintelon R, Guillaume P, Rolain Y, Schoukens J, Van H H. Parametric identification of transfer functions in the frequency domain: a survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(11): 2245~2259

李远禄 南京航空航天大学博士研究生. 主要研究方向为信号与图像处理、分数阶系统. 本文通信作者. E-mail: yuanlu.li@yahoo.com.cn (LI Yuan-Lu Ph. D. candidate at Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. His research interest covers signal and image processing, fractional-order systems. Corresponding author of this paper.)

于盛林 南京航空航天大学教授. 主要研究方向为信号与图像处理、混沌和分形. (YU Sheng-Lin Professor at Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. His research interest covers signal and image processing, chaos and fractal.)