第 33 卷 第 8 期 自 动 化 学 报 Vol. 33, No. 8
2007 年 8 月 ACTA AUTOMATICA SINICA August, 2007

具有未知干扰的互质因子摄动不确定性系统最优鲁棒调节: 优化设计及连续性

李昇平 [1,2]

摘 要 研究了含未知干扰的互质因子摄动离散时间系统达到最优性能鲁棒性的控制器设计及这种设计的连续性. 给出了含未知干扰的互质因子摄动离散时间系统最优鲁棒调节器的一种设计方法. 分析了含未知干扰互质因子摄动系统的性能鲁棒性优化设计的连续性, 证明了互质因子摄动系统性能鲁棒性的优化设计作为从设计模型到鲁棒控制器的映射是连续的, 并且, 若设计模型的参数集是紧的, 这种映射是一致连续的.

关键词 互质因子摄动系统, 未知干扰, 鲁棒调节, 连续性, 自适应控制
中图分类号 TP13

Optimal Synthesis of Robust Regulation for Plants with Coprime Factor Perturbations: Optimization and Continuity Properties

LI Sheng-Ping[1,2]

Abstract This paper investigates optimal design of robust regulation and the continuity of the design when a discrete-time plant is subjected to both coprime factor perturbations and unknown external disturbances. We show that the controller design is continuous when a map is from the nominal model of the plant to optimal robust regulation controller; moreover, if the set of plants is compact, the map is uniformly continuous.

Key words Coprime factor perturbations system, unknown disturbances, robust regulation, continuity properties, adaptive control

1 引言

自 20 世纪 80 年代以来, 系统的鲁棒性问题得到了广泛的研究, 针对几种不同类型的不确定性模型得到了稳定鲁棒性和性能鲁棒性分析的若干有用结果. 结构奇异值理论[1, 2]给出了时不变 2-范数有界结构摄动系统稳定性的一个非保守条件. 对于诱导 ∞-范数有界的结构不确定性系统, ℓ_1 控制理论[3~6] 给出了系统鲁棒稳定性和鲁棒性能的必要和充分条件. 尽管不确定性系统的鲁棒分析已经在不同的范数指标下得到了较为圆满的解决, 但系统的鲁棒性综合, 特别是性能鲁棒性综合还有大量问题悬而未决. D-K 递归方法[2] 可以用来求解 2-范数有界结构摄动系统鲁棒性综合问题和诱导 ∞-范数有界结构不确定性系统的稳定性和性能鲁棒性的综合问题, 但由于综合问题本身是非凸的, 一般情况下只能得到局部最优解. 本文考虑了含有诱导 ∞-有界互质因子摄动 (二块摄动) 和未知外部干扰系统的性能鲁棒综合问题. 通过将该问题转化为含待定参数的二块 ℓ_1 优化问题, 然后化为有限个二块 ℓ_1 优化问题进行求解. 利用 Scaled-Q 法[7], 互质因子摄动 (二块摄动) 系统的性能鲁棒综合问题最终归结为有限个线性规划问题. 从而给出了含诱导 ∞-有界互质因子摄动系统的性能鲁棒性的最优综合方法.

在研究诸如反馈系统的适定性和鲁棒性, 特别是对于发展自适应控制理论, 研究辨识与反馈的相互作用等问题时, 反馈系统设计的连续性具有基本的重要性. 因此连续性问题成为 ℓ_1 设计方法的基本问题之一. ℓ_1 设计的连续性是指从对象的标称设计模型到反馈控制器的映射的连续性. 文献 [8] 针对持续干扰的最优抑制问题首先证明了对象不含单位圆上零极点时单块问题 ℓ_1 优化设计的连续性. 文献 [9] 对互质因子摄动系统稳定鲁棒性优化问题, 利用对偶性原理研究了二块问题 ℓ_1 设计的连续性, 证明了当名义设计模型满足一定的条件时二块问题 ℓ_1 设计具有一致连续性. 迄今为止, 不确定性系统性能鲁棒性的 ℓ_1 优化设计的连续性问题仍无人涉及, 本文利用二块问题 ℓ_1 设计的连续性质[9] 首先分析了含未知干扰互质因子摄动系统的性能鲁棒性优化设计的连续性, 证明了互质因子摄动系统性能鲁棒性的优化设计作为从设计模型到鲁棒控制器的映射是连续的, 而且, 若设计模型的参数集是紧的, 这种映射是一致连续的.

2 记号和问题描述

令 ℓ_∞ 表示所有满足 $\|x\|_\infty = \sup_i |x(i)| < \infty$ 的序列 $x = \{x(i)\}_{i=0}^\infty$ 所构成的空间. 令 ℓ_1 表示所有满足 $\|g\|_1 = \sum_{i=0}^\infty |g(i)| < \infty$ 的序列 $g = \{g(i)\}_{i=0}^\infty$ 所构成的空间. 令 $G \triangleq \sum_{i=0}^\infty g(i) z^i$ 表示序列 g 的 Z 变换, A 表示 ℓ_1 序列的 Z 变换所构成的空间. 令 $G \in A$, 则 $G: \ell_\infty \to \ell_\infty$, $Gx = g * x$, 其中 $*$ 表示卷积运算. 空间 A 的诱导范数由下式给出

$$\|G\|_A = \sup_{x \in \ell_\infty} \|Gx\|_\infty = \sup_{x \in \ell_\infty} \|g * x\|_\infty = \|g\|_1$$

因此赋范空间 A 与 ℓ_1 空间等距同构, 在不引起混淆的情况下将两者视为同一空间.

考虑用以下含未知干扰的互质因子摄动模型集描述的不确定离散时间系统

$$(\hat{a}(z) + \Delta_a) y(t) = (z^d \hat{b}(z) + \Delta_b) u(t) + v(t) \tag{1}$$

式中, $y(t)$, $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别表示输出, 输入和外部干扰, t 为离散时刻, d 为输入延迟, $\hat{a}(z) = 1 + a(1)z^1 + \cdots + a(n)z^n$, $\hat{b}(z) = b(0) + b(1)z^1 + \cdots + b(m)z^m$.

在式 (1) 中, 假设: 1) $\hat{a}(z)$ 和 $\hat{b}(z)$ 互质, 即它们不含相同的不稳定零点; 2) 互质因子摄动 $\Delta = \mathrm{diag}(\Delta_a, \Delta_b) \in D(w_a, w_b)$, 其中 $D(w_a, w_b) = \{\mathrm{diag}(\Delta_1, \Delta_2) \mid \Delta_1, \Delta_2$ 为 $\ell_\infty \to \ell_\infty$ 严格因果算子且 $\|\Delta_1\|_1 \le w_a, \|\Delta_2\|_1 \le w_b\}$; 3) $v(t)$ 为未知干扰, 满足 $\sup_t |v(t)| \le w_v$.

考虑如图 1 所示反馈调节系统, 若对任意 $\Delta = \mathrm{diag}(\Delta_a, \Delta_b) \in D(w_a, w_b)$ 系统是内稳定的, 则称该系统为鲁棒 ℓ_∞ 稳定. 对于鲁棒 ℓ_∞ 稳定系统, 鲁棒调节指标定义为 $\sup_{\Delta \in D(2)} \sup_{\|v\|_\infty \le w_v} \|y\|_\infty$, 本文将研究使得鲁棒调节指标 $J_{\mathrm{regul}} = \sup_{\Delta \in D(2)} \sup_{\|v\|_\infty \le w_v} \|y\|_\infty$ 极小化的反馈控制优化设计方法及其连续性.

收稿日期 2006-2-8 收修改稿日期 2006-5-6
Received February 8, 2006; in revised form May 6, 2006
国家自然科学基金 (60374009), 新世纪优秀人才支持计划, 广东省自然科学基金 (04010976) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60374009), Program for New Century Excellent Talents in University, the Nature Science Foundation of Guangdong Province (04010976)
1. 汕头大学机械电子工程系 汕头 515063 2. 东北大学流程工业综合自动化教育部重点实验室 沈阳 110006
1. Department of Mechantronics Engineering, Shantou University, Shantou 515063 2. Ministry Key Laboratory of Industrial Process Integrated Automation, Northeastern University, Shenyang 110006
DOI: 10.1360/aas-007-0875

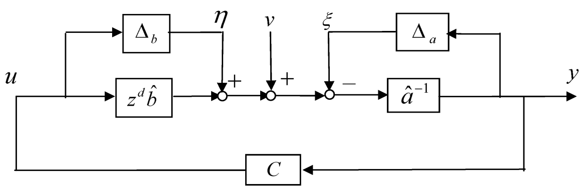

图 1 反馈控制系统

Fig. 1 Feedback control system

3 鲁棒调节控制器的优化设计

令 G_{yv} 和 G_{uv} 表示分别从 $v(t)$ 到 y 和 u 的传递函数. 显然有 $G_{yv}=G_{y\xi}=G_{y\eta}$ 和 $G_{uv}=G_{u\xi}=G_{u\eta}$.

由文献 [5], 系统稳定的充分必要条件为

$$w_a\|G_{yv}\|_A+w_b\|G_{uv}\|_A<1 \tag{2}$$

并且, 若系统鲁棒稳定, 则鲁棒性能指标可表示为

$$J_{\rm regul}=\frac{w_v\|G_{yv}\|_A}{1-w_a\|G_{yv}\|_A-w_b\|G_{uv}\|_A} \tag{3}$$

因此最优 ℓ_1 鲁棒控制器的设计问题可归结为: 求取控制器 C 在保证系统鲁棒稳定的情况下性能指标 (3) 最小化.

定义一个辅助问题: 对于给定的 $\beta>0$ 求取 C 使得 $\|G_{yv}\|_A/(1-w_a\|G_{yv}\|_A-w_b\|G_{uv}\|_A)\le\beta$. 令 $\lambda=1/\beta+w_a$, 该问题等价于求 C 使得

$$\lambda\|G_{yv}\|_A+w_b\|G_{uv}\|_A\le 1 \tag{4}$$

根据 Youla 参数化[10], 标称系统的所有镇定控制器可参数化为

$$C=\hat{n}\hat{d}^{-1}=(\hat{x}+\hat{a}\hat{q})(\hat{y}-z^d\hat{b}\hat{q})^{-1} \tag{5}$$

其中 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 为 Bezout 等式 $z^d\hat{b}\hat{x}+\hat{a}\hat{y}=1$ 的解, $\hat{q}\in A$ 为自由参数. 因此, 最优 ℓ_1 鲁棒控制器的设计问题最终归结为求使式 (4) 成立的最大的 λ , 该问题可写成

$$\lambda_*=\sup\left\{\lambda|\min_{\hat{q}}\left[\lambda\|G_{yv}(\hat{q})\|_A+w_b\|G_{uv}(\hat{q})\|_A\right]\le 1\right\} \tag{6}$$

最优 ℓ_1 鲁棒控制器可由下式获得

$$q_*=\arg\{\min_{\hat{q}}\lfloor\lambda_*\|G_{yv}(\hat{q})\|_A+w_b\|G_{uv}(\hat{q})\|_A\rfloor\} \tag{7}$$

问题 (7) 为二块 ℓ_1 优化问题, 一般不存在有限维最优解. 我们采用 Scaled-Q 方法[7] 进行求解. 引入记号

$$\gamma(\lambda)=\min_{\hat{q}}\lfloor\lambda\|G_{yv}(\hat{q})\|_A+w_b\|G_{uv}(\hat{q})\|_A\rfloor \tag{8}$$

及其上界 $\bar{\gamma}_N(\lambda)$ 和下界 $\underline{\gamma}_N(\lambda)$, 其中 $\bar{\gamma}_N(\lambda)$ 为对应于 N 阶截断 $\hat{q}$ 的最优解. 由文献 [7] 可知, $\underline{\gamma}_N(\lambda)\le\gamma(\lambda)\le\bar{\gamma}_N(\lambda)$, $\lim_{N\to\infty}\underline{\gamma}_N(\lambda)=\gamma(\lambda)$ 和 $\lim_{N\to\infty}\bar{\gamma}_N(\lambda)=\gamma(\lambda)$. 因此, 对于给定精度指标 ρ, 存在 N 使得 $\bar{\gamma}_N(\lambda)-\gamma(\lambda)<\rho$.

注 1. 算法得到的次优解 $\hat{q}_{\rm submin}$ 满足 $\gamma(\lambda)\le\bar{\gamma}_N\lambda<1$, 即相应的次优控制器满足闭环系统鲁棒 ℓ_∞ 稳定条件 (2). 因此, 若被控对象可镇定, 则由上述算法得到的次优鲁棒调节器总能保证闭环系统的鲁棒稳定性.

4 鲁棒调节器优化设计的连续性分析

由式 (1) 可知, 受控系统的标称模型为 $P=z^d\hat{b}\hat{a}^{-1}$, 其中 $\hat{a}$, $\hat{b}$ 均为多项式, 所以 $\hat{a},\hat{b}\in A$. 根据文献 [10], P 的图象 (Graph) 可表示成 $G_P=\begin{bmatrix}\hat{a} & z^d\hat{b}\end{bmatrix}^{\rm T}$. 以 CF 表示所有形如 $P=z^d\hat{b}\hat{a}^{-1}$ 系统的图象集合, 并在 CF 上定义 ℓ_∞ 范数诱导的标准图象拓扑. 记 $P^i=z^d\hat{b}_i\hat{a}_i^{-1}$, $C_*^i=\hat{n}_i^*(\hat{d}_i^*)^{-1}$, $(i=0,1,\cdots)$ 分别表示对象序列及其相应的最优鲁棒调节器序列, 则连续性问题可表述为: 在 CF 中当 $G_{p^i}\to G_p$, 且 $w_a^i\to w_a$, $w_b^i\to w_b$ 时, 是否有 $G_{C_*^i}\to G_{C_*}$? 下面研究这个问题.

定理 1. 对受控系统标称模型 $P^i=z^d\hat{b}_i\hat{a}_i^{-1}$, $P=z^d\hat{b}\hat{a}^{-1}$ 及相应的摄动参数, 求解优化问题 (7) 所得满足给定精度的次优鲁棒调节控制器分别记为 $C_*^i=\hat{n}_i^*(\hat{d}_i^*)^{-1}$ 和 $C_*=\hat{n}^*(\hat{d}^*)^{-1}$, $(i=0,1,\cdots)$. 若在 CF 中 $G_{p^i}\to G_p$, 且 $w_a^i\to w_a$, $w_b^i\to w_b$, 则在 CF 中 $G_{C_*^i}\to G_{C_*}$.

证明. 鲁棒调节器优化算法可表示成

$$\lambda_*=\sup\{\lambda|\operatorname*{submin}_C[\lambda\|G_{yv}(C)\|_A+w_b\|G_{uv}(C)\|_A]\le 1\} \tag{9}$$

式中, 为了突出闭环传递函数对控制器的依赖将 G_{yv} 写成 $G_{yv}(C)$, submin 表示满足给定精度的次优化. 以下证明分三步进行.

首先证明:

$$\lambda_*\|G_{yv}(C_*(\lambda_*))\|_A+w_b\|G_{uv}(C_*(\lambda_*))\|_A=1 \tag{10}$$

其中, $C_*(\lambda_*)$ 表示优化问题当 $\lambda=\lambda_*$ 时满足给定精度的次优解. 由 (9) 易知

$$\lambda_*\|G_{yv}(C_*(\lambda_*))\|_A+w_b\|G_{uv}(C_*(\lambda_*))\|_A\ge 1 \tag{11}$$

因此只需证明 $\lambda_*\|G_{yv}(C_*(\lambda_*))\|_A+w_b\|G_{uv}(C_*(\lambda_*))\|_A\le 1$. 现假设 $\lambda_*\|G_{yv}(C_*(\lambda_*))\|_A+w_b\|G_{uv}(C_*(\lambda_*))\|_A>1$, 记 $\sigma=\lambda_*\|G_{yv}(C_*(\lambda_*))\|_A+w_b\|G_{uv}(C_*(\lambda_*))\|_A-1$, 则 $\sigma>0$. 由 (9) 可知对所有 $0<\lambda<\lambda_*$, 有 $\lambda\|G_{yv}(C_*(\lambda))\|_A+w_b\|G_{uv}(C_*\lambda)\|_A\le 1$, 又 $w_b\|G_{uv}(C_*(\lambda))\|_A>0$, 因此 $\|G_{yv}(C_*(\lambda))\|_A<\dfrac{1}{\lambda}$. 令 $\lambda=\dfrac{\lambda_*}{1+\sigma}<\lambda_*$, 可得 $\lambda_*\|G_{yv}(C_*(\lambda))\|_A+w_b\|G_{uv}(C_*\lambda)\|_A<\dfrac{\lambda_*-\lambda}{\lambda}+1=\sigma+1$, 即 $\lambda_*\|G_{yv}(C_*(\lambda))\|_A+w_b\|G_{uv}(C_*\lambda)\|_A<\lambda_*\|G_{yv}(C_*(\lambda_*))\|_A+w_b\|G_{uv}(C_*(\lambda_*))\|_A\le 1$. 这与 $C_*(\lambda_*)$ 为优化问题当 $\lambda=\lambda_*$ 时的最优解相矛盾, 结合不等式 (11) 可得式 (10) 成立.

再证明: 当 CF 中 $G_{p^i}\to G_p$, 且 $w_a^i\to w_a$, $w_b^i\to w_b$ 时, $\lambda_*^i\to\lambda_*$. 此处由于篇幅所限, 证明过程略.

现在证明: 当 $G_{p^i}\to G_p$, 且 $w_a^i\to w_a$, $w_b^i\to w_b$ 时, $G_{C_*^i}\to G_{C_*}$ 成立. 由前面的讨论可知, $C_*=\hat{n}^*(\hat{d}^*)^{-1}$ 为次优问题当 $\lambda=\lambda_*$ 时的满足给定精度的次优解, 即 $C_*=\arg\{\min_C\|[\lambda_*G_{yv}\ \ w_bG_{uv}]\|_A\}$; 同理, $C_*=\arg\{\min_C\|[\lambda_*^iG_{yv}^i\ \ w_b^iG_{uv}^i]\|_A\}$. 因 $\lambda_*^i\to\lambda$, 所以在 CF 中依图象拓扑 $\lambda_*^iG_{yv}^i\to\lambda_*G_{yv}$ 和 ${w_b}^iG_{uv}^i\to w_bG_{uv}$, 由文献 [9] 可知定理 1 成立. □

定义系统标称模型 P 的参数和相应的摄动参数 w_a, w_b 构成集合 PS, 并假设 PS 满足以下条件: 1) PS 为凸紧集; 2) 参数属于 PS 的任意模型均无不稳定零极点对消 (即模型可镇定可检测); 3) 对给定的截断阶数二块 ℓ_1 优化问题有唯一最优解.

记被控系统的设计模型为 $\bar{P}=(P,w_a,w_b)$, 记 F_{PS} 为参数属于 PS 的所有系统的集合. 对于满足上述假设条件的系统, 关于性能鲁棒优化设计的连续性还有如下结论.

定理 2. 令 $C_N(\bar{P})$ 表示对应于设计模型 $\bar{P}\in F_{PS}$ 的 N 阶次优控制器, $\bar{\gamma}^N(\bar{P})$ 为相应的次优问题 (14) 的次优值, 则次优控制器 $C_N(\bar{P})$ 具有以下性质: 1) 对给定的优化精度 $\rho>0$, 存在一个截断阶数 N^* 使得 $|\bar{\lambda}^{N^*}(\bar{P})-\lambda(\bar{P})|\le\rho$ 对所有 $\bar{P}\in F_{PS}$ 一致成立; 2)$C_{N^*}(\bar{P})$ 在 F_{PS} 上一致连续.

为了证明定理 2, 先引入如下引理.

引理 1[9]. 假设存在合适的截断阶数使得次优问题 (14) 对所有系统 $\bar{P}$ 和 $\bar{P}^i$, $i=0,1,\cdots$ 均有解. 若 $G_{P^i}\to G_P$, 且 $\lambda_*^i\to\lambda$, $w_a^i\to$, $w_b^i\to w_b$, 则对于任意给定的优化精度 $\rho>0$, 存在截断阶数 N^* 使得 $|\bar{\lambda}^{N^*}(\bar{P}^i)-\lambda(\bar{P}^i)|\le\rho$ 对于充分大的 i 成立

证明. 由定理 1 的证明过程可知, 当 $G_{P^i}\to G_P$, 且 ${w_a}^i\to w_a$ 和 ${w_b}^i\to w_b$ 时, 有 ${\lambda_*}^i\to\lambda_*$. 因此, 引理 1 的结论成立. 因此, 对于给定的 $\rho>0$ 和 $\bar{P}^*\in F_{PS}$, 存在 $N>0$ 和 $\epsilon>0$ 使得 $\bar{\lambda}^N(\bar{P})-\lambda(\bar{P})\le\rho$ 对于任意 $\bar{P}\in B(\bar{P}^*,\epsilon)$ 成立, 其中 $B(\bar{P}^*,\epsilon)$ 表示 F_{PS} 中以 $\bar{P}^*$ 为中心, ϵ 为半径的开球. 当 $\bar{P}^*$ 取遍 F_{PS} 时, 所有这样的开球 $B(\bar{P}^*,\epsilon)$ 构成 F_{PS} 的一个开覆盖. 由 F_{PS} 的紧性可知, 在这些开覆盖中存在一个 F_{PS} 的有限子覆盖. 令 N^* 为对应于这有限个子覆盖的截断阶数中的最大者, 则对于所有 $\bar{P}\in F_{PS}$, 有 $|\bar{\lambda}^{N^*}(\bar{P})-\lambda(\bar{P})|\le\rho$, 性质 1) 成立. 由定理 1, 对于上述给定的截断阶数 N^*, C_{N^*} 关于 $\bar{P}\in F_{PS}$ 连续, 因此根据 F_{PS} 的紧性, $C_{N^*}(\bar{P})$ 在 F_{PS} 上一致连续. □

5 结论

针对具有互质因子摄动和未知干扰的离散时间系统研究了达到 ℓ_1 最优性能鲁棒性的控制器设计方法及这种设计的连续性. 提出了含未知干扰的互质因子摄动离散时间系统最优鲁棒调节器设计的一种递归设计方法, 该方法将控制器设计问题转化为有限个二块 ℓ_1 优化问题进行求解, 利用 Scaled-Q 法, 互质因子摄动系统的性能鲁棒综合问题最终归结为有限个线性规划问题. 然后利用二块问题 ℓ_1 设计的连续性质分析了含未知干扰互质因子摄动系统的性能鲁棒性优化设计的连续性, 证明了互质因子摄动系统性能鲁棒性的优化设计作为从设计模型到鲁棒控制器的映射是连续的, 而且, 若设计模型的参数集是紧的, 这种映射是一致连续的.

References

1 Doyle J C, Stein G. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(1): 4∼16

2 Doyle J C. Analysis of feedback systems with structured uncertainty. *IEE Proceedings, Part D: Control Theory and Applications*, 1982, **129**(6): 242∼250

3 Dahleh M A, Ohta Y. A necessary and sufficient condition for robust BIBO stability. *Systems Control Letters*, 1988, **11**(3): 271∼275

4 Khammash M, Pearson J B. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(4): 398∼412

5 Khammash M, Pearson J B. Analysis and design for robust performance with structured uncertainty. *Systems Control Letters*, 1993, **20**(2): 179∼187

6 Khammash M. Synthesis of globally optimal controllers for robust performance to unstructured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(2): 189∼198

7 Khammash M. A new approach to the solution of the control problem: the scaled-Q method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(2): 180∼187

8 Dahleh M, Dahleh M A. Optimal rejection of persistent and bounded disturbances: continuity properties and adaptation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(6): 687∼696

9 Li S P. On continuity properties of the two-block optimal design. *Systems Control Letters*, 2002, **47**(2): 47∼55

10 Vidyasagar M. *Control System Synthesis: A Factorization Approach.* Cambridge: MIT Press, 1985

李昇平　汕头大学机械电子工程系教授. 主要研究方向为鲁棒控制、自适应控制、智能控制理论及其应用. E-mail: spli@stu.edu.cn
(**Li Sheng-Ping**　Professor at Department of Mechatronics Engineering, Shantou University. His research interest covers robust control, robust identification, adaptive control, intelligent control theory and applications.)