

Acrobot 控制器设计与全局稳定性分析

赖旭芝¹ 吴敏¹ 余锦华² YANG Simon X.³

摘要 提出一种基于非光滑 Lyapunov 函数的 Acrobot 控制器设计和全局稳定性分析方法. 基于三个 Lyapunov 函数分别设计了三种控制规律, 用来增加 Acrobot 的能量和保持合适的姿态, 使 Acrobot 摇起并稳定在垂直向上的不稳定平衡点. 应用 LaSalle 不变原理和非光滑 Lyapunov 函数理论, 保证了 Acrobot 在整个运动空间的全局稳定性. 仿真结果证明了该方法的有效性.

关键词 Acrobot, 模糊控制, 稳定性, 非光滑 Lyapunov 函数, LaSalle 不变原理
中图分类号 TP24

Controller Design and Global Stability Analysis of Acrobot

LAI Xu-Zhi¹ WU Min¹ SHE Jin-Hua² YANG Simon X.³

Abstract This paper presents a controller design and global stability analysis of acrobots based on non-smooth Lyapunov functions. Three control laws that are derived based on three Lyapunov functions are applied successively to achieve a suitable posture and increase the energy so as to stabilize the acrobot at an unstable inverted equilibrium position. LaSalle invariant theorem and non-smooth Lyapunov function are employed to theoretically guarantee the stability of the acrobot in the whole motion space. Simulation results have demonstrated the validity of this strategy.

Key words Acrobot, fuzzy control, stability, non-smooth Lyapunov function, LaSalle invariant principle

1 引言

Acrobot 是一种在垂直平面上运动的二连杆机器人, 有两个自由度但只有一个驱动装置, 其中肘部连杆有驱动装置, 而肩部连杆没有驱动装置^[1~4]. 控制目标是从垂直向下的稳定平衡点摇起到垂直向上的不稳定平衡点, 并稳定在这个不稳定平衡点上. 鉴于 Acrobot 的复杂性, 通常是把它的运动空间分为摇起区和吸引区, 分别采用不同的控制策略进行摇起控制和平衡控制, 通过控制策略的切换实现由摇起区到吸引区的过渡. Brown 和 Passino 提出了几种控制 Acrobot 的智能控制方法^[4]. Spong 提出了一种基于部分反馈线性化的控制方法来摇起 Acrobot^[5], 用线性二次型调节器 (Linear quadratic regulator, LQR) 方法使其稳定在不稳定平衡点上. 然而, LQR 方法只适用于很窄的吸引区, 难以保

证 Acrobot 由摇起区过渡到吸引区. 文献 [6] 提出了一种将无需模型的模糊控制和基于模型的模糊控制相结合的模糊控制策略, 分别用于摇起控制和平衡控制, 取得了显著的控制效果, 但是难以在确保 Acrobot 能量增加的同时保持合适的姿态. 文献 [7~10] 提出了各种同时考虑 Acrobot 能量和姿态的有效控制方法, 但是没有考虑 Acrobot 在整个运动空间的稳定性. 实际上, 大多数控制方法只考虑不稳定平衡点附近的稳定性. 因此, 需要提出一种有效的控制方法来保证 Acrobot 在整个运动空间的稳定性.

本文提出一种基于非光滑 Lyapunov 函数的控制方法, 在实现 Acrobot 摇起控制和平衡控制的同时, 保证它在整个运动空间的稳定性. 首先, 基于 3 个 Lyapunov 函数设计了三个控制规律: 控制规律 1 用来控制其能量和姿态, 通过能量的增加使 Acrobot 快速进入到不稳定平衡点附近; 当能量达到一定值时, 采用控制规律 2, 避免出现奇异现象, 控制第二杆的角度和角速度为 0, 通过模糊规则调整控制规律 2 中的参数, 避免能量突变, 使能量增加到 Acrobot 在不稳定平衡点所具有的势能, 从而使 Acrobot 到达不稳定平衡点附近, 维持能量为不稳定平衡点上的势能; 控制规律 3 基于不稳定平衡点的近似线性模型, 将 Acrobot 稳定在不稳定平衡点上. 控制规律 1 和 2 用于摇起区的控制, 这一区间的稳定性通过 LaSalle 不变原理来保证. 对应于三个控制规律的三个 Lyapunov 函数组成了一个非光

收稿日期 2005-12-22 收修改稿日期 2006-8-10
Received December 22, 2005; in revised form August 10, 2006
国家自然科学基金项目 (60674044) 和国家杰出青年科学基金 (60425310) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60674044), and the National Science Fund for Distinguished Youth Scholars of P. R. China (60425310)

1. 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083 2. 东京工科大学仿生学部 东京 192-0982 3. 圭尔夫大学工程系, 圭尔夫, N1G 2W1 加拿大

1. School of Information Science & Engineering, Central South University, Changsha 410083, P. R. China 2. School of Bionics, Tokyo University of Technology, Tokyo 192-0982, Japan 3. School of Engineering, University of Guelph, Guelph N1G 2W1, Canada
DOI: 10.1360/aas-007-0719

滑函数,它在理论上保证了 Acrobot 在整个运动空间的稳定性.仿真结果证明了该控制方法的有效性.

2 动力学方程与运动空间划分

Acrobot 模型如图 1 所示. 设 q_i 为第 i ($i = 1, 2$) 杆的角度, 且 $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$, Acrobot 动力学方程为

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\tau} = [0, \tau_2]^T$ 是力矩向量, $M(\mathbf{q})$ 是惯性矩阵, $h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 是离心力, $g(\mathbf{q})$ 是重力, 分别为

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11}(\mathbf{q}) & m_{12}(\mathbf{q}) \\ m_{21}(\mathbf{q}) & m_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & h_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

$$g(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) & g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

且 $m_{11}(\mathbf{q}) = m_1 L_{g1}^2 + I_1 + m_2 L_{g2}^2 + I_2 + 2m_2 L_1 L_{g2} \cos q_2 + m_2 L_1^2$, $m_{12}(\mathbf{q}) = m_{21}(\mathbf{q}) = m_2 L_{g2}^2 + I_2 + m_2 L_1 L_{g2} \cos q_2$, $m_{22}(\mathbf{q}) = m_2 L_{g2}^2 + I_2$, $h_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_2 L_1 L_{g2} (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin q_2$, $h_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_2 L_1 L_{g2} \dot{q}_1^2 \sin q_2$, $g_1(\mathbf{q}) = -(m_1 L_{g1} + m_2 L_1)g \sin q_1 - m_2 L_{g2} g \sin(q_1 + q_2)$, $g_2(\mathbf{q}) = -m_2 L_{g2} g \sin(q_1 + q_2)$, 而 \dot{q}_i 是连杆 i 的角速度, m_i 是连杆 i 的质量, L_i 是连杆 i 的长度, L_{gi} 是连杆 i 相对于连接点到质心的距离, I_i 是连接杆 i 相对于质心转动惯量 ($i = 1, 2$).

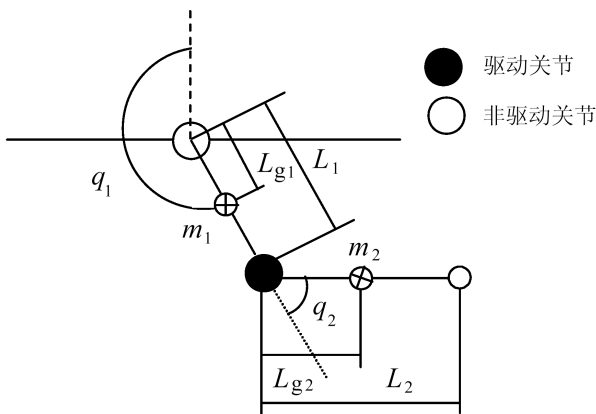


图 1 Acrobot 模型

Fig. 1 Model of Acrobot

$$\text{令 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T =$$

$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T$, 则状态方程式 (1) 可改写为

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (5a)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (5b)$$

$$\dot{x}_3 = f_1(\mathbf{x}) + b_1(\mathbf{x})\tau_2 \quad (5c)$$

$$\dot{x}_4 = f_2(\mathbf{x}) + b_2(\mathbf{x})\tau_2 \quad (5d)$$

其中, $f_1(\mathbf{x})$, $b_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$, $b_2(\mathbf{x})$ 是非线性函数, 分别为

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = M^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} -h_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{x}) \\ -h_2(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} b_1(\mathbf{x}) \\ b_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = M^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Acrobot 总能量为动能和势能之和, 用 $E(\mathbf{x})$ 表示, 即

$$E(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}) \quad (8)$$

其中, $T(\mathbf{x})$ 是动能, $V(\mathbf{x})$ 是势能, 且分别为

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix} M(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 V_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 m_i g h_i(\mathbf{x})$$

这里 $V_i(\mathbf{x})$ 和 $h_i(\mathbf{x})$ 分别为连接杆 i ($i = 1, 2$) 的势能和质心的高度, 且 $h_1(\mathbf{x}) = L_{g1} \cos x_1$, $h_2(\mathbf{x}) = L_1 \cos x_1 + L_{g2} \cos(x_1 + x_2)$.

假设整个运动空间是 Σ , 不稳定平衡点附近的区域为吸引区, 吸引区定义为

$$\begin{aligned} \Sigma_3 : & \left| \text{mod}\left(\frac{x_1}{2\pi}\right) \right| \leq \beta_1 \cap \left| \text{mod}\left(\frac{x_1 + x_2}{2\pi}\right) \right| \leq \\ & \beta_2 \cap |E(\mathbf{x}) - E_0| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (9)$$

则摇摆区是 $\Sigma - \Sigma_3$, E_0 表示不稳定平衡点的势能, 且 $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 为常数.

3 控制规律设计

3.1 控制规律 1

这里基于第一个 Lyapunov 函数设计控制规律 1, 用来增加 Acrobot 能量, 并保证第二杆角度

和角速度朝着自然伸展的姿态运动. 因此, 第一个 Lyapunov 函数 $J_1(\mathbf{x})$ 选取为

$$J_1(\mathbf{x}) = 0.5\{k_{p1}x_2^2 + k_{d1}x_4^2 + k_{e1}[E(\mathbf{x}) - E_0]^2\} + \Delta \quad (10)$$

式中 $k_{p1} > 0$, $k_{d1} > 0$ 和 $k_{e1} > 0$ 为常数, Δ 为正常数, 在保证非光滑 Lyapunov 函数为单调递减函数起着关键作用, 非光滑 Lyapunov 函数和 Δ 的选取将在下一节讨论.

由式 (8) 给出的能量的导数为^[1]

$$\dot{E}(\mathbf{x}) = \dot{q}_2\tau_2 = x_4\tau_2 \quad (11)$$

根据式 (5d)、(10) 和 (11), 可得函数 $J_1(\mathbf{x})$ 的导数为

$$\dot{J}_1(\mathbf{x}) = x_4\{k_{p1}x_2 + k_{d1}f_2(\mathbf{x}) + [k_{d1}b_2(\mathbf{x}) + k_{e1}(E(\mathbf{x}) - E_0)]\tau_2\} \quad (12)$$

如果控制规律 1 选择为

$$C_1 : \tau_2 = -\frac{k_{p1}x_2 + k_{d1}f_2(\mathbf{x}) + \lambda_1\text{sat}(x_4/\phi_1)}{k_{d1}b_2(\mathbf{x}) + k_{e1}(E(\mathbf{x}) - E_0)} \quad (13)$$

其中, $\lambda_1 > 0$ 和 $\phi_1 > 0$ 为常数, 则控制规律 1 保证了

$$\dot{J}_1(\mathbf{x}) = -\lambda_1x_4\text{sat}(x_4/\phi_1) \leq 0 \quad (14)$$

$\dot{J}_1(\mathbf{x})$ 为半负定, 根据下一节介绍的 LaSalle 不变原理, 可保证能量增加的同时, 使第二杆朝着自然伸展的方向运动. 如果采用控制规律 1, 当下式成立时, Acrobot 会出现奇异现象.

$$E(\mathbf{x}) = E_0 - k_{d1}b_2(\mathbf{x})/k_{e1} \quad (15)$$

当能量快接近 E_0 时, 应采用控制规律避免奇异现象. Acrobot 控制的第一个切换条件为

$$\text{SW1: } J_2(\mathbf{x}) < J_1(\mathbf{x}) \quad (16a)$$

同时, 满足约束条件

$$k_{d1}b_2(\mathbf{x}) + k_{e1}[E(\mathbf{x}) - E_0] \leq \varsigma \quad (16b)$$

其中 $\varsigma < 0$ 且为常数, $J_2(\mathbf{x})$ 是第二个 Lyapunov 函数, 将在下一小节介绍. 第一个切换条件把摇摆区分成两个子空间: \sum_1 和 \sum_2 . 当式 (16) 满足时, 从控制规律 1 转换到控制规律 2.

3.2 控制规律 2

第二个 Lyapunov 函数 $J_2(\mathbf{x})$ 定义为

$$J_2(\mathbf{x}) = 0.5(k_{p2}x_2^2 + k_{d2}x_4^2) + \Delta \quad (17)$$

其中 $k_{p2} > 0$ 和 $k_{d2} > 0$, 且都为常数. 由式 (17)、(5d) 可得

$$\dot{J}_2(\mathbf{x}) = x_4[k_{p2}x_2 + k_{d2}f_2(\mathbf{x}) + k_{d2}b_2(\mathbf{x})\tau_2] \quad (18)$$

这时, 选取控制规律 2 为

$$\begin{aligned} C_2 : \tau_2 &= \tilde{\tau}_2 - \lambda_2\text{sat}(x_4/\phi_2), \\ \tilde{\tau}_2 &= -(k_{p2}x_2 + k_{d2}f_2(\mathbf{x}))/k_{d2}b_2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\lambda_2 > 0$, $\phi_2 > 0$, 且都为常数, 那么

$$\dot{J}_2(\mathbf{x}) = -\lambda_2k_{d2}b_2(\mathbf{x})x_4\text{sat}(x_4/\phi_2) \leq 0 \quad (20)$$

由式 (7) 计算可知, $b_2(\mathbf{x}) > 0$, 则 $\dot{J}_2(\mathbf{x})$ 为半负定. 根据下一节介绍的 LaSalle 不变原理, 角度 x_2 和角速度 x_4 都将收敛为零.

由于第二个 Lyapunov 函数中只包含第二杆的角度和角速度, 因此当使用控制规律 2 时, Acrobot 能量会发生突变, 因此需要改进控制规律 2, 使 Acrobot 能量增加至 E_0 , 并维持在该值附近. 本文通过设计一个模糊控制器来达到这一要求. 将式 (19) 代入式 (11) 得

$$\dot{E}(\mathbf{x}) = x_4\tilde{\tau}_2 - \lambda_2x_4\text{sat}(x_4/\phi_2) \quad (21)$$

这表明 $\dot{E}(\mathbf{x})$ 并不恒为零, 这样, 当控制规律 2 作用时, 能量改变. 设参数 λ_2 为

$$\lambda_2 = \lambda_\alpha(1 + \delta), \quad -1 < \delta < 1 \quad (22)$$

式中 $\lambda_\alpha > 0$, 且为常数. 设计模糊控制器的输入为: Acrobot 的能量 $E(\mathbf{x})$ 和 E_0 的差 $e(e = E(\mathbf{x}) - E_0)$ 和信号 $w = x_4\tilde{\tau}_2$, 输出是 δ . 模糊控制器输入输出的模糊关系如表 1 所示, 其中 NB, NM, ZR, PM 和 PB 分别代表负大, 负中, 零, 正中和正大.

表 1 模糊控制规则表 (输入: e, w ; 输出: δ)
Table 1 Fuzzy control rules (input: e, w ; output: δ)

W	e				
	NB	NM	ZR	PM	PB
NB	NB	NM	NM	NM	ZR
NM	NB	NB	NM	ZR	PM
ZR	NB	NM	ZR	PM	PB
PM	NM	ZR	PM	PB	PB
PB	ZR	PM	PB	PB	PB

模糊输出 δ 用加权平均法进行解模糊求得, 能量的微分 $\dot{E}(\mathbf{x})$ 由模糊控制器的输出 δ 调节, 用来实现 Acrobot 两杆自然伸直时能量增加, 直到设定值 E_0 , 并维持在 E_0 附近.

Acrobot 控制的第二个切换条件为 SW2:

$$J_3(\mathbf{x}) < J_2(\mathbf{x}) \quad (23)$$

同时, 满足约束条件式 (9), $J_3(\mathbf{x})$ 是第三个 Lyapunov 函数, 将在下一小节具体介绍.

3.3 控制规律 3

在吸引区用不稳定平衡点的近似线性模型^[1]

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\tau_2 \quad (24)$$

实际上, (A, B) 是可控的. 第三个 Lyapunov 函数 $J_3(\mathbf{x})$ 定义为

$$J_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \quad (25)$$

其中 P 为对称正定矩阵. 对状态空间模型 (24), 设计控制规律, 使下面的性能指标 G_α 最小.

$$G_\alpha = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + r\tau_2^2) dt \quad (26)$$

式中 $Q \geq 0, r > 0$. 通过最小化 $G_\alpha^{[11]}$, 得到最优控制规律为

$$C_3: \tau_2 = -F\mathbf{x} \quad (27)$$

而

$$F = r^{-1} B^T P \quad (28)$$

其中 $P = P^T > 0$ 是 Riccati 方程

$$A^T P + PA - PBr^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (29)$$

的解. 式 (27) 保证了在吸引区对于任意的 $\mathbf{x} \neq 0$, 都有 $\dot{J}_3(\mathbf{x}) < 0$.

4 系统稳定性分析

4.1 摇起区稳定性分析

为了进行稳定性分析, 需要使用不变集的概念.

定义 1. 考虑系统

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (30)$$

如果任意解 $\mathbf{x}(t)$ 满足

$$\mathbf{x}(t_0) \in M \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in M, \forall t \in \mathbf{R} \quad (31)$$

则 M 是系统 (30) 的不变集; 同时, 如果

$$\mathbf{x}(t_0) \in M_p \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in M_p, \forall t \geq t_0 \quad (32)$$

则 M_p 是系统 (30) 的一个正定不变集.

LaSalle 不变原理是证明稳定性的基础, 用下述引理来描述.

引理 1. (LaSalle 不变原理) 假设 M_p 是系统 (30) 的正定不变集, 当 $\dot{J}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x}(t) \in M_p$ 时, $J: M_p \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个连续的微分函数 $J(\mathbf{x})$; 又设

$$\Psi = \left\{ \mathbf{x} \in M_p \mid \dot{J}(\mathbf{x}) = 0 \right\} \quad (33)$$

当 $\mathbf{x}(t_0) \in M_p, t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\mathbf{x}(t) \rightarrow \Omega$, 则 $\Omega \in \Psi$ 是系统 (30) 的最大不变集.

对 Acrobot 而言, 基于控制规律 1, 不变集 Ω_1 满足 $(x_2 \ x_4) = (0 \ 0), E(\mathbf{x}) = E_0$, 且

$$\Omega_1: 0.5m_{110}x_3^2 + [m_1L_{g1} + m_2(L_1 + L_{g2})] \times g \cos x_1 = E_0 \quad (34)$$

其中 $m_{110} = m_{11}(\mathbf{x})|_{(x_2=0 \ x_4=0)} = m_1L_{g1}^2 + I_1 + m_2L_{g2}^2 + I_2 + 2m_2L_1L_{g2} + m_2L_1^2$, Ω_1 是 Acrobot 的最大不变集, 式 (34) 描述了 Acrobot 第一杆状态的周期运动. 对于控制规律 1, 有下述引理.

引理 2. 在第一次转换控制之前, 基于 Lyapunov 函数设计由式 (13) 描述的控制规律 1, 使 Acrobot 朝着最大不变集 Ω_1 运动.

证明. 对系统 (5), 采用控制规律 1, 则 $M_p = \mathbf{R}^4$ 是控制系统的正定不变集, 设 $\Psi = \left\{ \mathbf{x} \in M_p \mid \dot{J}_1(\mathbf{x}) = 0 \right\}$. $\dot{J}_1(\mathbf{x}) = 0$, 根据式 (14), 可推出 $x_4 = 0$. 从式 (10) 和 (11) 可知, $J_1(\mathbf{x})$ 、 x_2 和 $E(\mathbf{x})$ 都为常数. $E(\mathbf{x})$ 为常数有两种情况: 第一种情况是 $E(\mathbf{x}) = E_0$, 第二种情况是 $E(\mathbf{x}) = E_1$ 为常数, 且不等于 E_0 . 当 $E(\mathbf{x}) = E_0, \dot{J}_1(\mathbf{x}) = 0$ 时, 从式 (5d) 和 (13), 可得 $x_2 = 0, x_4 = 0$, 即 Acrobot 朝着最大不变集 Ω_1 运动.

另一方面, 当 $E(\mathbf{x}) = E_1$, 且不等于 E_0 时, 通过反证法可知, 这种状态不能连续存在. 假设 $E(\mathbf{x}) = E_1$ 能长时间成立, 因为 $x_4 = 0$, 所以 $x_2 = ct =$ 常数, 根据式 (5d) 和 (13) 可得

$$\frac{f_2(\mathbf{x})}{b_2(\mathbf{x})} = \frac{k_{p1}x_2 + k_{d1}f_2(\mathbf{x})}{k_{d1}b_2(\mathbf{x}) + k_{e1}(E_1 - E_0)} \quad (35)$$

这样有

$$\tau_2 = -\frac{f_2(\mathbf{x})}{b_2(\mathbf{x})} = -\frac{k_{p1}x_2}{k_{e1}(E_1 - E_0)} = ct \quad (36)$$

因 $b_2(\mathbf{x})|_{x_2=ct}$ 为常数, 根据式 (36), 得 $f_2(\mathbf{x})|_{x_2=ct}=ct$.

把式 (6) 中与 $f_2(\mathbf{x})$ 相关的数学表达式代入 $f_2(\mathbf{x})|_{x_2=ct}=ct$ 的方程中, 有

$$f_2(\mathbf{x})|_{x_2=ct} = S_1x_3^2 + U_1 \sin x_1 + V_1 \cos x_1 = W_1 \quad (37)$$

其中 S_1 、 U_1 、 V_1 和 W_1 都为常数, 且不为零. 根据 $E(\mathbf{x}) = E_1$, $x_4 = 0$, $x_2 = ct$, 推出

$$E_1 = S_2x_3^2 + U_2 \sin x_1 + V_2 \cos x_1 = W_2 \quad (38)$$

其中 S_2 、 U_2 、 V_2 和 W_2 都为常数, 且不为零. 由式 (37) 和 (38), 可得

$$U_3 \sin x_1 + V_3 \cos x_1 = W_3 \quad (39)$$

其中 U_3 、 V_3 和 W_3 都为常数, 且不为零.

由式 (39) 可知, 变量 x_1 是常数, 于是 $x_3 = 0$. 根据 $x_3 = 0$ 和 $x_4 = 0$, 综合式 (6)、(7)、(5c) 和 (5d), 得

$$\frac{-m_{22}(\mathbf{x})h_1(\mathbf{x}) - m_{22}(\mathbf{x})g_1(\mathbf{x}) + m_{21}(\mathbf{x})h_2(\mathbf{x}) + m_{21}(\mathbf{x})g_2(\mathbf{x})}{m_{12}(\mathbf{x})h_1(\mathbf{x}) + m_{12}(\mathbf{x})g_1(\mathbf{x}) - m_{11}(\mathbf{x})h_2(\mathbf{x}) - m_{11}(\mathbf{x})g_2(\mathbf{x})} = \frac{-m_{21}(\mathbf{x})}{m_{11}(\mathbf{x})} \quad (40)$$

从式 (40), 可得如下表达式

$$\det(M(\mathbf{x}))| = 0 \quad (41)$$

由此得出的结论违背了系统参数本身具有的特性, 即不符合惯性矩阵 $M(\mathbf{x})$ 是正定的特性. 这样, 在 $\Psi = \{\mathbf{x} \in M_p | \dot{J}_1(\mathbf{x}) = 0\}$ 内, 仅有 $E(\mathbf{x}) = E_0$ 能长时间成立. 因此, 在第一次转换控制之前, 基于第一个 Lyapunov 函数的控制规律 1 使 Acrobot 朝着最大不变集 Ω_1 运动, 即控制规律 1 使 Acrobot 在能量增加的同时, 使第二杆朝着自然伸展的趋势运动. \square

当 Acrobot 能量到达一定值时, 为避免出现奇异现象, 根据切换条件 SW1, 把控制从控制规律 1

切换到控制规律 2. 因控制规律 2 只能保证状态 x_2 和 x_4 收敛为零, 为了使能量增加, 并保持合适姿势, 设计模糊控制器调节控制规律 2 中的参数, 保证能量收敛于 E_0 附近. 在控制规律 2 作用下, 系统稳定性可根据引理 3 来保证. 引理 3 证明相似于引理 2, 故略.

引理 3. 基于第二个 Lyapunov 函数的控制规律 2, 使 Acrobot 朝着最大不变集 Ω_2 运动, $\Omega_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 |_{(x_2=0 \ x_4=0)}\}$.

4.2 全局稳定性分析

首先, 设定以下几个假设和定义.

假设 1. \sum_i 是第 i 个子空间, 而 C_i 是第 i 个子空间的控制规律 ($i = 1, 2, 3$).

假设 2. 每一对 (C_i, \sum_i) ($i = 1, 2, 3$), 存在一个 Lyapunov 函数 $J_i(\mathbf{x})$.

假设 3. \sum_i 综合在一起即覆盖整个运动空间 \sum , 如

$$\sum = \bigcup_{i=1}^3 \sum_i \quad (42)$$

定义 2. (非光滑 Lyapunov 函数) 非光滑 Lyapunov 函数是一个 Lyapunov 函数 $J(\mathbf{x})$, 定义为

$$J(\mathbf{x}) = \bigcup_{i=1}^3 J_i(\mathbf{x}), \text{ 且 } J(\mathbf{x}(t_2)) < J(\mathbf{x}(t_1)), t_2 > t_1 \quad (43)$$

定义 3. (最小切换策略) 当 $J_i(\mathbf{x}) < J_{i-1}(\mathbf{x})$ ($i = 2, 3$), 采用控制规律 C_i , 否则采用控制规律 C_{i-1} .

在定义 2 中, 一个普通 Lyapunov 函数的微分小于零的条件, 对非光滑 Lyapunov 函数来说, 此条件可以转换为一个不可微分的非光滑 Lyapunov 函数 $J(\mathbf{x})$ 的单调递减条件^[12,13], 即可基于最小切换策略, 保证系统的全局稳定性. 综述上面假设和定义得出以下结果.

定理 1. 如果系统 (5) 基于非光滑 Lyapunov 函数 (42) 设计控制规律, 在假设 1~3 条件下, 如果利用最小切换策略来切换控制规律, 则闭环系统 (5) 在整个运动空间稳定的.

证明. 式 (10) 是第一个 Lyapunov 函数, 用于增加能量, 以及带动第二杆状态收敛. 式 (17) 是第二个 Lyapunov 函数, 用于控制第二杆自然伸直, 避免控制规律 1 产生的奇异现象. 在式 (10) 和式 (17) 中, 根据这两个 Lyapunov 函数表达式可知, $J_2(\mathbf{x}) < J_1(\mathbf{x})$ 自动满足. 式 (25) 是第三个 Lyapunov 函数, 用于将 Acrobot 稳定在不平衡稳定点附近.

式 (10) 和 (17) 中, 常数 Δ 用于满足定义 2 中的条件, 如保证 $J_3(\mathbf{x}) < J_2(\mathbf{x})$, 它定义为

$$\Delta = J_3(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_\alpha} \quad (44)$$

\mathbf{x}_α 是从控制规律 2 转换到控制规律 3 的转换点状态, $\mathbf{x}_\alpha \in \Sigma_3$. 因此, 本切换控制系统所采用的 Lyapunov 函数 $J(\mathbf{x})$ 是一个非光滑的 Lyapunov 函数.

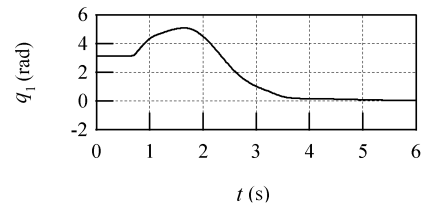
对 Acrobot 切换控制系统而言, 基于第一个和第二个 Lyapunov 函数设计的控制规律作用于系统 (5) 时, 其在吸引区的稳定性已基于 LaSalle 不变原理得到保证, 如引理 2 和引理 3. 而基于第三个 Lyapunov 函数的控制规律, 可以根据线性系统性质保证其稳定性. 又因切换控制系统控制规律是基于非光滑 Lyapunov 函数 $J(\mathbf{x})$ 来设计, 且切换条件 (23) 和 (33) 满足最小切换控制策略, 即定义 3. 所以当切换条件 (16) 或 (23) 满足时, 控制规律从 C_1 转换到 C_2 (或从 C_2 转换到 C_3) 时, $J_2(\mathbf{x}) < J_1(\mathbf{x})$ (或 $J_3(\mathbf{x}) < J_2(\mathbf{x})$) 成立, 反之不能切换. 因此, 最小切换策略确保了控制规律的切换只能朝着一个方向运动, 而不会在切换面做来回的周期稳定. 因此, 对于 Acrobot 切换控制系统而言, 基于非光滑 Lyapunov 函数 $J(\mathbf{x})$ 来设计控制规律, 利用最小切换策略, 实现了闭环系统 (5) 在整个运动空间 Σ 内的全局稳定. \square

5 仿真结果

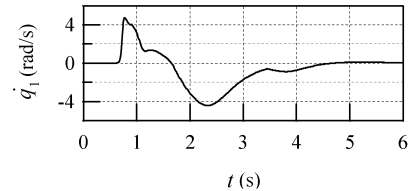
Acrobot 的参数以及线性近似模型 A 和 B 如文献 [1] 所示; 式 (9), (13), (16b), (17), (19) 和 (22) 中参数为 $E_0 = 24.5 J$, $\beta_1 = \beta_2 = \pi/6$, $\varepsilon = 1.2 J$, $k_{p1} = k_{d1} = 1$, $k_{e1} = 0.2$, $\lambda_1 = 38$, $\phi_1 = 10$, $\varsigma = -2$, $k_{p2} = k_{d2} = 1$, $\phi_2 = 5$, $\lambda_\alpha = 0.5$; 权重矩阵 $Q = I_4$ 以及 $r=0.5$, 计算 Riccati 方程 (29), 可得状态反馈控制规律为 $F =$

$$\begin{bmatrix} -260.5593 & -104.4480 & -112.6036 & -52.9444 \end{bmatrix}$$

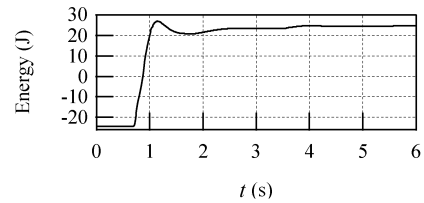
图 2 给出了初始状态 $\mathbf{x} = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 的仿真结果. 控制从 $t_0 = 0.600 s$ 开始, 控制规律在 $t_1 = 0.9135 s$ 和 $t_2 = 3.1510 s$ 转换. $0.600 s \leq t < 0.9135 s$, 采用控制规律 1, 增加 Acrobot 的能量, 并带动第二杆运动. 在 $t = 0.9135 s$, 式 (25) 满足, 采用控制规律 2, 避免控制规律产生的奇异现象, 并控制第二杆自然伸展. 在 $t_2 = 3.1510 s$, 满足进入吸引区的转换条件, 切换时刻 Acrobot 的状态为 $\mathbf{x}_\alpha = [0.5326 \ -6.8641 \ 0.1006 \ -0.0438]^T$.



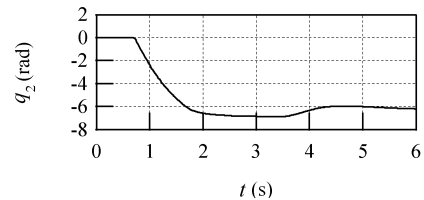
(a) 第 1 杆角度 (Angle of the first link)



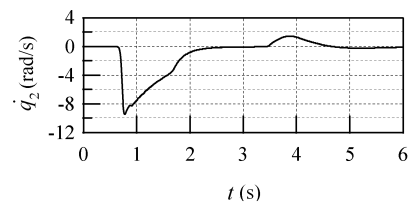
(b) 第 1 杆角速度 (Angular velocity of the first link)



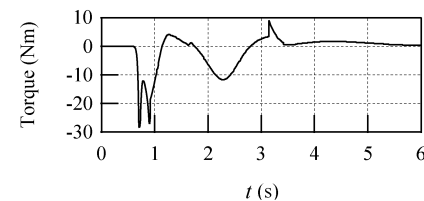
(c) 能量 (Energy)



(d) 第 2 杆角度 (Angle of the second link)



(e) 第 2 杆角速度 (Angular velocity of the second link)



(f) 力矩 (Torque)

图 2 基于非光滑 Lyapunov 函数的控制策略的仿真结果
Fig. 2 Simulation results for the control laws based on a non-smooth Lyapunon function

从仿真结果看, 整个系统在 6s 之内达到稳定, 相比于文献 [8] 中基于能量函数的控制方法, 控制时间大大减少, 而相比于文献 [1, 6, 9, 10], 仍然具有比较好的控制结果. 本文提出的基于非光滑 Lyapunov 函数设计的控制规律, 确保了切换系统 Acrobot 的全局稳定性.

6 结论

本文介绍了一种基于非光滑 Lyapunov 函数的 Acrobot 控制策略, 非光滑函数结合了三个 Lyapunov 函数. 第一个 Lyapunov 函数用于设计控制规律 1, 有效实现了能量控制与姿态控制, 为 Acrobot 摇起到吸引区奠定了基础. 第二个 Lyapunov 函数用于设计控制规律 2, 避免了控制规律 1 可能发生的奇异现象, 并控制第二杆自然伸展. 同时, 为防止能量突变, 设计模糊控制器来调整控制规律 2 中的参数, 确保了 Acrobot 姿态控制和能量控制的实现, 使 Acrobot 从摇起区平稳地过渡到吸引区. 第三个 Lyapunov 函数用于设计控制规律 3, 将 Acrobot 稳定在吸引区. 与以往的方法不同之处在于, 本文基于 LaSalle 不变原理, 保证了 Acrobot 在摇起区的稳定性; 基于非光滑 Lyapunov 函数下的最小切换策略, 保证了 Acrobot 在整个运动空间的稳定性. 仿真实验证明了本文所提方法的有效性.

References

- 1 Lai Xu-Zhi, Cai Zi-Xing, Wu Min. Fuzzy and variable structure control of class of under actuated mechanical systems. *Acta Automatica Sinica*, 2001, **27**(6): 850~854 (赖旭芝, 蔡自兴, 吴敏. 一类欠驱动机械系统的模糊与变结构控制. *自动化学报*, 2001, **27**(6): 850~854)
- 2 Miyazaki M, Sampei M, Koga M, Takahashi A. A control of underactuated hopping gait systems: acrobot example. In: *Proceedings of 39th IEEE Conference on Control and Decision*. 2000. **5**: 4797~4802
- 3 Yamada K, Yuzawa A. Approximate feedback linearization for nonlinear systems and its application to the acrobot. In: *Proceedings of 2002 American Control Conference*. Alaska, USA: ACC Press, 2002. 1672~1677
- 4 Brown S C, Passino K M. Intelligent control for an acrobot. *Journal Intelligent and Robotic Systems*, 1997, **18**(3): 209~248
- 5 Spong M W. The swing up control problem for the acrobot. *IEEE Control Systems Magazine*, 1995, **15**(1): 49~55
- 6 Lai X Z, She J H, Ohyama Y, Cai Z X. A fuzzy control strategy for acrobot combining model-free and model-based control. *IEE Proceedings in Control Theory and Application*, 1999, **146**(6): 505~511
- 7 Astrom K J, Furuta K. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 2000, **36**(2): 287~295
- 8 Xin X, Kaneda M. The swing up control for the acrobot based on energy control approach. In: *Proceedings of 41st IEEE Conference on Decision Control*. IEEE, 2002. 3261~3266

- 9 Lai Xu-Zhi, Wu Min, She Jin-Hua. Control of acrobot based on Lyapunov function. *Journal Central South University of Technology (English Edition)*, 2004, **11**(2): 210~215
- 10 Xin X, Mita T, Kaneda M. The posture control of a two-link free flying acrobot with initial angular momentum. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1201~1206
- 11 Schultz D G, Melsa J L. *State Functions and Linear Control Systems*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1967
- 12 Brannicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(4): 475~482
- 13 Leonessa A, Haddad W M, Chellabonia V. Nonlinear system stability via hierarchical switching control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(1): 17~28



赖旭芝 中南大学信息科学与工程学院教授, 主要研究方向为非线性系统, 机器人和智能系统.

(LAI Xu-Zhi Professor at School of Information Science and Engineering, Central South University. Her current research interest covers nonlinear systems, robotics, and intelligent systems.)



吴敏 中南大学信息科学与工程学院教授, 主要研究方向为先进控制理论及应用, 过程控制和智能系统. 本文通信作者. E-mail: min@csu.edu.cn

(WU Min Professor at School of Information Science and Engineering, Central South University. His research interest covers advanced control theory and applications, process control, and intelligent systems. Corresponding author of this paper.)



余锦华 东京工科大学仿生学部副教授, 主要研究方向为控制理论应用, 重复控制和机器人.

(SHE Jin-Hua Associate professor at School of Bionics, Tokyo University of Technology. His research interest covers the application of control theory, repetitive control, and robotics.)



YANG Simon X. 圭尔夫大学工程系副教授, 主要研究方向为机器人, 智能系统和传感器技术.

(YANG Simon X. Professor at School of Engineering, University of Guelph. His research interest covers robotics, intelligent systems, and sensor technology.)