

基于输入扩张的闭环系统子空间辨识及其强一致性分析

杨华¹ 李少远¹

摘要 针对闭环条件下的子空间辨识问题, 结合线性代数和几何学的基本概念, 将输入输出误差序列包含至输入子空间中, 基于输入扩张的状态空间构造方法, 提出一种新的闭环辨识算法; 解决开环算法应用于闭环系统辨识时产生有偏估计, 甚至不能正确辨识的问题; 实现闭环条件下对系统状态空间矩阵的强一致估计, 并理论证明该辨识算法的强一致性; 最后通过仿真实例验证本算法的有效性.

关键词 闭环辨识, 子空间方法, 强一致性
中图分类号 TP273

Closed-loop Subspace Identification Based on Augmented Input with Consistency Analysis

YANG Hua¹ LI Shao-Yuan¹

Abstract For the basic problem of closed-loop identification, a new closed-loop identification algorithm is proposed in the framework of subspace method combined with linear algebra and geometry. In order to implement a new reconstruction of the state sequence, the output and input error sequences are included in the input subspace based on the augmented input. The estimation error, which is produced by open-loop algorithm when it is applied in the existence of feedback, is eliminated. The consistency estimate of system state-space matrices is implemented and the consistency property is proven in theory. Finally, the efficiency of this method is illustrated with a simulation example.

Key words Closed-loop identification, subspace method, consistency analysis

1 引言

子空间辨识^[1~3]作为一种新的辨识算法, 由于其对先验知识要求较少, 对于多变量系统辨识广泛适用, 以及在数值计算上的优势, 受到了控制和辨识领域的广泛关注. 在开环情况下, 由于不可测噪声与输入之间无关性条件成立, 使得辨识结果为强一致无偏估计. 但是, 由于工艺或者稳定性需要, 许多工业过程必须在闭环条件下进行辨识, 当系统中存在反馈, 上述无关性不再成立, 成为子空间方法应用于闭环辨识的主要障碍^[4~7].

针对闭环条件下的子空间辨识问题, 已有一些研究成果. 文献 [8] 对开环系统子空间辨识的标准算法 N4SID^[6]进行了改进, 以适应闭环数据的要求, 但是这种方法需要 Markov 参数已知; Ljung 等人也依靠一些辅助信息提出了 ARX 模型的闭环子空间辨识算法^[9], 但是这些方法中都没有给出辨识算

法的一致性分析. 基于子空间正交投影的概念, 文献 [10] 通过从闭环系统中分离控制器模型来实现系统模型的辨识; 在辨识系统模型与反馈通道均为线性时不变的前提下, 文献 [11] 提出一种联合输入输出闭环辨识算法, 但是辨识前需要反馈控制器的传递函数已知. 正如文献 [12] 中指出, 闭环条件下的辨识算法仍有待于进一步的研究. 为分析闭环辨识算法的渐进性质, 文献 [13, 14] 在随机实现框架内对如 [8, 9] 中描述的几种已有的闭环子空间辨识算法进行了一致性分析, 分析了偏差产生的原因, 并指出文中几种算法的辨识结果均为有偏的.

本文在已有辨识算法研究 [9] 的基础上, 在子空间辨识框架内提出一种新的闭环辨识方法, 通过对算法的修正, 消除闭环条件下噪声与输入之间相关性对辨识的影响. 文中首先介绍闭环子空间辨识中存在的有偏性问题, 分析并给出问题产生原因, 详细分析系统的闭环建模以及控制器对辨识的影响, 并给出量化表示关系. 在上述分析的基础上提出闭环辨识算法, 理论证明参数估计的强一致性, 最后通过仿真实例来验证算法的有效性.

2 问题描述

本文研究如下系统的闭环辨识问题^[6, 7]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

收稿日期 2005-10-28 收修改稿日期 2006-4-21
Received October 28, 2005; in revised form April 21, 2006
国家自然科学基金 (60474051, 60534020), 高等学校博士学科点专项
科研基金 (20020248028) 资助项目
Supported by National Natural Science Foundation of
P. R. China (60474051, 60534020), the Specialized Research
Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China
(20020248028)
1. 上海交通大学自动化系 上海 200240
1. Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University,
Shanghai, 200240
DOI: 10.1360/aas-007-0703

其中, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^l$ 和 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 分别为过程输入、输出和系统状态, $\mathbf{e}(t)$ 为零均值白噪声, 并满足 $E[\mathbf{e}_p \mathbf{e}_q^T] = S \delta_{pq}$, $\{A, B, C, D\}$ 为相应维数的系统矩阵, K 为 Kalman 滤波增益.

文中过程 (1) 工作于闭环条件下, 即系统中存在从 \mathbf{y} 到 \mathbf{u} 的反馈, 如图 1 所示. 在辨识过程中, 只有闭环输入输出数据 \mathbf{u} 和 \mathbf{y} 可测, 控制器模型未知, 且对控制器形式没有任何限制. 为保证系统的可辨识性以及一致性分析需要, 系统满足下述条件:

1) (A, B) 能控, (A, C) 能观测, 且系统为最小实现.

2) 外部输入 \mathbf{r} 与噪声 \mathbf{e} 不相关, 且 \mathbf{r} 满足充分激励条件.

3) $D = 0$, 即从 \mathbf{u} 到 \mathbf{y} 没有直接的前向通道.

本文闭环子空间辨识的主要目标是从闭环输入输出数据 \mathbf{u} 和 \mathbf{y} 开始, 在控制器模型未知的情况下, 不依赖任何被辨识模型的先验知识, 得到系统矩阵 (A, B, C, D) 、Kalman 滤波增益 K 和新息方差矩阵 S 的一致无偏估计.

3 闭环系统分析

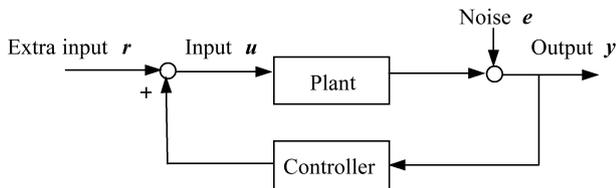


图 1 闭环系统框图

Fig. 1 The frame of the closed-loop system

本节针对闭环子空间辨识的关键问题, 即输入与噪声之间相关性, 对图 1 所示闭环系统进行建模分析, 讨论控制器对闭环数据以及对闭环辨识的影响, 并给出量化表示. 为简化分析, 反馈均以线性时不变形式出现, 闭环系统中包含的控制器表示如下^[13, 14]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c(t+1) &= A_c \mathbf{x}_c(t) + B_c \mathbf{y}(t) + L \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= C_c(t) \mathbf{x}_c(t) + D_c \mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

类似于式 (1), 上式中描述了当 \mathbf{y} 给定, 从 \mathbf{y} 到 \mathbf{u} 的稳态描述形式. 其中, \mathbf{x}_c 为控制器状态, 控制器的输入输出分别为 \mathbf{y} 和 \mathbf{u} , \mathbf{v} 为控制器的白噪声输入. 假定 $\hat{\mathbf{q}}(t) = [\hat{\mathbf{x}}(t)^T \hat{\mathbf{x}}_c(t)^T]^T$ 为闭环系统模型的最小状态向量, 则闭环系统可由下式给出

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(t+1) &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{n}(t) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{C} \hat{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{H} \mathbf{n}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A + B D_c C & B C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K + B D_c & B D_c \\ B_c & B_c \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ D_c & C_c \end{bmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D_c & I \end{bmatrix}$, $\mathbf{n}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}$. 由条件 1) ~ 3) 可知系统满足充分激励条件^[4], 则 (\mathbf{u}, \mathbf{y}) 为零均值联合二阶过程, 满足系统的可辨识条件. 由式 (1) 和 (2) 可知, 输入输出白噪声产生过程可分别由输入、输出的一步超前误差表示

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t) | W_t^- \quad (4)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t) | W_t^- \quad (5)$$

其中 W_t^- 表示过去直到 t 时刻无限维输入输出序列, 即 $W_t^- = [(Y_t^-)^T (U_t^-)^T]^T$, $\mathbf{u}(t) | W_t^-$ 表示正交投影. 实际上, 只有有限时间 $[t_0, t_s]$ 的数据可以利用, 数据维数为有限维, 因此在辨识中使用下述“暂态”形式来代替 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{e}(t)$

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t) | W_{[t_0, t]} \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t) | W_{[t_0, t]} \quad (7)$$

t 为当前时刻, 即过去输入输出序列 W_p 由 $[t_0, t]$ 时段的数据 $W_{[t_0, t]}$ 代替. 与上述 $\mathbf{e}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 相比, 暂态形式 $\hat{\mathbf{e}}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{v}}(t)$ 与初始时刻 t_0 和初始条件有关, 当满足 $t - t_0 \rightarrow \infty$ 时, 以均方形式满足 $\hat{\mathbf{e}}(t) \rightarrow \mathbf{e}(t)$, $\hat{\mathbf{v}}(t) \rightarrow \mathbf{v}(t)$.

由闭环系统模型 (3) 可知, $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) | W_{[t_0, t]}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{x}_c(t) | W_{[t_0, t]}$ 分别为开环系统和控制器的 Kalman 状态估计, 它们共同构成闭环系统暂态方程的状态向量, 并基于输入输出序列进行更新, 即 $\hat{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{x}(t+1) | W_{[t_0, t+1]}$, $\hat{\mathbf{x}}_c(t+1) = \mathbf{x}_c(t+1) | W_{[t_0, t+1]}$, 其中 $W_{[t_0, t+1]} = (W_{[t_0, t]} \oplus E_t) \oplus V_t$, 子空间 E_t 和 V_t 分别定义为 $E_t = \text{span}\{\hat{\mathbf{e}}(t)\}$, $V_t = \text{span}\{\hat{\mathbf{v}}(t)\}$. 令闭环系统 Kalman 状态估计 $\hat{\mathbf{q}}(t) = [\hat{\mathbf{x}}^T(t) \hat{\mathbf{x}}_c^T(t)]^T$, 则有

$$\hat{\mathbf{q}}(t+1) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{q}}(t) + \begin{bmatrix} I & 0 \\ D_c(t) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中

$$\mathbb{K}(t) = \begin{bmatrix} K(t) + B(t)D_c(t) & B(t)D_c(t) \\ B_c(t) & B_c(t) \end{bmatrix}$$

令初始状态 $\hat{\mathbf{q}}(t_0) = 0$, 矩阵 A 和 C 由式 (3) 定义, $K(t)$ 、 $B(t)$ 、 $D_c(t)$ 和 $B_c(t)$ 可由标准 Riccati 方程计算得到. 由式 (8) 和 (9) 可知, 即使只需要更新开环系统状态 $\mathbf{x}(t)$, 对 $\hat{\mathbf{x}}$ 的递推中包含 $\hat{\mathbf{x}}_c$ 和 $\hat{\mathbf{v}}$. 因此, 当系统中包含反馈, 由于系统输入与不可测噪声之间的相关性, 如果不将控制器的当前状态包含在内, 则不能给出闭环系统中从 \mathbf{u} 到 \mathbf{y} 的系统描述.

引理^[13]. 定义 $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)|W_{[t_0, t+1]} - \hat{\mathbf{x}}(t)$, 其中, $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)|W_{[t_0, t]}$. 则开环系统状态方程可写为

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + K(t)\hat{\mathbf{e}}(t) + \bar{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{e}}(t) \quad (11)$$

上式可由式 (8) 和 (9) 简单变化得到.

令 $\hat{K}(t) = K(t) - \bar{B}(t)D_c(t)$, 式 (10) 可写为

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + \hat{K}(t)\hat{\mathbf{e}}(t) - \bar{B}(t)\hat{\mathbf{v}}(t) \quad (12)$$

而且满足

$$\bar{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) = -(\bar{B}(t)D_c(t) + \hat{K}(t))\hat{\mathbf{e}}(t) - \bar{B}(t)\hat{\mathbf{v}}(t) \quad (13)$$

由引理可知, 状态变化量 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 与输入输出误差 $\hat{\mathbf{e}}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{v}}(t)$ 线性相关, 其大小可由式 (13) 量化表示, 正是由于这种相关性的存在, 给闭环子空间辨识算法带来一定的问题.

4 闭环系统子空间辨识

4.1 闭环子空间辨识算法

为实现闭环条件下的系统模型辨识, 首先使用输入输出数据构造过去与未来输入 Hankel 矩阵 U_p 和 $U_f^{[6]}$

$$U_p = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{j-1} \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_j \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{u}_{i-1} & \mathbf{u}_i & \cdots & \mathbf{u}_{i+j-2} \end{pmatrix}$$

$$U_f = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i & \mathbf{u}_{i+1} & \cdots & \mathbf{u}_{i+j-1} \\ \mathbf{u}_{i+1} & \mathbf{u}_{i+2} & \cdots & \mathbf{u}_{i+j} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{u}_{2i-1} & \mathbf{u}_{2i} & \cdots & \mathbf{u}_{2i+j-2} \end{pmatrix}$$

输出 Hankel 矩阵 Y_p 和 Y_f 也可以类似构造, 过去输入输出矩阵 $W_p = \begin{bmatrix} Y_p^T & U_p^T \end{bmatrix}^T$, 式中假定 i

为当前时刻, 下标 p 和 f 分别表示“过去”与“未来”的相对时间概念. 状态序列 X_i 定义为

$$X_i = [\mathbf{x}_i \quad \mathbf{x}_{i+1} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{i+j-1}] \quad (14)$$

误差 \mathbf{e} 的 Hankel 矩阵与 U_f 类似定义为 E_f , 根据上述矩阵的定义, 对式 (1) 迭代得到如下矩阵等式, 这一等式在子空间辨识中起着重要作用:

$$Y_f = \Gamma_i X_i + H_i^d U_f + H_i^s E_f \quad (15)$$

其中, Γ_i 为扩展能观测矩阵

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^i \end{bmatrix} \quad (16)$$

下三角 Toeplitz 矩阵 H_i^d 和 H_i^s 分别为

$$H_i^d = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix}$$

$$H_i^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CK & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAK & CK & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ CA^{i-2}K & CA^{i-3}K & CA^{i-4}K & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

子空间辨识的重要步骤是实现系统状态空间的重构, 当状态序列得到之后, 系统矩阵可通过状态序列或者扩展能观测矩阵求解得到. 在开环条件下满足噪声与输入之间的无关性要求, E_f 与过去输入 U_p 、过去输出 Y_p 以及未来输入 U_f 之间相互独立, 因此 $\Gamma_i X_f$ 可通过把式 (15) 沿 U_f 行空间到 W_p 行空间做斜投影求解, 即

$$Y_f/U_f W_p = \Gamma_i X_i/U_f W_p + H_i^d U_f/U_f W_p + H_i^s E_f/U_f W_p \quad (17)$$

由投影性质可知 $U_f/U_f W_p = 0$, 而 E_f 与 U_f 独立使得 $E_f/U_f W_p = 0$ 满足, 因此式 (17) 的后两项为零, 等式 (17) 可以简化为

$$Y_f/U_f W_p = \Gamma_i X_i/U_f W_p \quad (18)$$

这一结果表明, Γ_i 等价于 $Y_f/U_f W_p$ 的列空间, 可通过线性代数工具 SVD 分解 $Y_f/U_f W_p$ 获得. 代数工

具 SVD 的引入使得计算具有更高的数值鲁棒性. 类似地, $Y_f/U_f W_p$ 的行空间等价于 $X_i/U_f W_p$ 的行空间, 其中 $X_i/U_f W_p$ 为系统的 Kalman 状态估计 \hat{X}_i .

但是控制器的引入及反馈的存在给辨识带来新的问题, 即噪声与输入之间的相关性, 这一问题的存在使得 $E_f/U_f W_p = 0$ 不再成立, 第 3 节所述新的闭环状态方程给出了输入输出误差与系统状态之间关系的清晰的量化描述. 定义误差变量 $\xi(t) = \mathbf{e}(t) \oplus \mathbf{v}(t)$, 构造扩张输入子空间 $\vartheta_t = \mathbf{u}_t \vee \xi_t$, 新的状态空间构造方法可由定理 1 给出.

定理 1. 对任意 $k \geq n$ (n 为系统阶次), 有 $\vartheta_{[t,t_s]} \cap W_t^- = \{0\}$, 令

$$X_t^{+/-} = Y_{[t,t+k]}/\vartheta_{[t,t+k]} W_t^- \quad (19)$$

则 $X_t^{+/-}$ 为模型 (1) 的状态空间, 满足

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{f}(t) \quad (20)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{J}\mathbf{f}(t) \quad (21)$$

证明. 由定义 $\xi(t) = \mathbf{e}(t) \oplus \mathbf{v}(t)$, 可知 $Y_t \subseteq W_t^- \oplus \xi_t$, 则有 $Y_t/\vartheta_{[t,t+k]} W_t^- = Y_t/\xi_t W_t^- = Y_t|W_t^-$ 成立, 且已包含在状态空间 $X_t^{+/-}$ 的构造中. 因此, $Y_t \subseteq X_t^{+/-} \oplus \xi_t$, 条件 (21) 成立.

$$\begin{aligned} X_{t+1}^{+/-} &= Y_{[t+1,t+k]}/\vartheta_{[t+1,t+k]} W_{t+1}^- = \\ &Y_{[t+1,t+k]}/A_{[t+1,t+k]} [W_t^- + \vartheta_t] \subseteq \\ &Y_{[t+1,t+k]}/A_{[t,t+k]} W_t^- + \vartheta_t \subseteq \\ &Y_{[t,t+k]}/A_{[t,t+k]} W_t^- + \vartheta_t = \\ &(X_t^{+/-} + U_t) \oplus \xi_t \end{aligned}$$

条件 (20) 满足. \square

定义 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{R}\mathbf{e}^*(t)$, 满足 $\text{cov}(\mathbf{e}^*(t)) = I$, 则有 $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = S$. 由式 (1) 可知

$$X_{i+1} = \mathbf{A}X_i + \mathbf{B}U_i + \mathbf{K}\mathbf{R}E_i^* \quad (22)$$

$$Y_i = \mathbf{C}X_i + \mathbf{D}U_i + \mathbf{R}E_i^* \quad (23)$$

根据式 (22) 和 (23) 给出闭环子空间辨识算法, 实现对系统矩阵的估计:

步骤 1. 构造输入输出 Hankel 矩阵 $U_{[t_0,t]}$ 、 $U_{[t,t_s]}$ 、 $Y_{[t_0,t]}$ 、 $Y_{[t,t_s]}$ 和 $W_{[t_0,t]}$.

步骤 2. 计算输入输出误差矩阵 $\hat{V}_{[t,t_s]}$ 和 $\hat{E}_{[t,t_s]}$, 构造扩张输入子空间 $\hat{\vartheta}_{[t,t_s]} = U_{[t,t_s]} \vee \hat{E}_{[t,t_s]} \vee \hat{V}_{[t,t_s]}$.

步骤 3. 计算斜投影 $\Gamma_i \hat{X}_t = Y_{[t,t_s]}/\hat{\vartheta}_{[t,t_s]} W_{[t_0,t]}$.

步骤 4. 通过 SVD 分解求出扩展能观测矩阵 Γ_i .

步骤 5. 由式 (16) 估计矩阵 \hat{A} 和 \hat{C} .

步骤 6. 令 $D = 0$, 由式 (23) 估计新息矩阵 E_i 和新息方差矩阵 \hat{S} .

步骤 7. 由式 (22), 估计系统输入矩阵 \hat{B} 和 Kalman 滤波增益矩阵 \hat{K} .

4.2 辨识一致性分析

由第 4.1 节可知, 上述闭环辨识算法利用有限的输入输出数据实现了对系统状态空间的重构, 与定理 1 相比, 这一构造从暂态形式 $\hat{E}_{[t,t_s]} = Y_{[t,t_s]} - Y_{[t,t_s]}|W_{[t_0,t]}$ 和 $\hat{V}_{[t,t_s]} = U_{[t,t_s]} - U_{[t,t_s]}|W_{[t_0,t]}$ 开始, 利用由 t 开始数据构造扩张的输入子空间

$$\hat{\vartheta}_{[t,t+k]} = \text{span}\{\mathbf{u}(t+i), \hat{\xi}(t+i), i = 0, \dots, t_s - t\} \quad (24)$$

分别沿子空间 $\hat{\vartheta}_{[t,t_s]}$ 和 $W_{[t_0,t]}$, Hankel 矩阵被分解成两部分的和

$$Y_{[t,t_s]} = Y_{[t,t_s]}/\vartheta_{[t,t_s]} W_{[t_0,t]} + Y_{[t,t_s]}/W_{[t_0,t]} \vartheta_{[t,t_s]} \quad (25)$$

第一项用来近似 $\Gamma_i \hat{X}_t$, 即

$$\begin{aligned} Y_{[t,t_s]}/\vartheta_{[t,t_s]} W_{[t_0,t]} &\simeq \\ \Gamma_i X_t/\vartheta_{[t,t_s]} W_{[t_0,t]} &\simeq \Gamma_i X_t|W_{[t_0,t]} = \Gamma_i \hat{X}_t \end{aligned}$$

从上式通过 SVD 分解可简单计算得系统的扩展能观测矩阵 Γ_i , 然后实现系统矩阵 (A, B, C, D) 和 K, S 的求解. 式 (25) 中后面一项可近似表示为

$$Y_{[t,t_s]}/W_{[t_0,t]} \vartheta_{[t,t_s]} \simeq H_i^u U_{[t,t_s]} + H_i^e \hat{E}_{[t,t_s]} \quad (26)$$

系统的 Markov 参数可直接从 H_i^u 和 H_i^e 获得.

定理 2. 在条件 1)~3) 下, 子空间 $X_t^{+/-} = Y_{[t,t_s]}/\vartheta_{[t,t_s]} W_t^-$ 为系统 (1) 的状态空间, 则本文闭环辨识算法对系统矩阵 $\{A, B, C, D\}$ 、 K 和 S 的估计满足强一致性, 即

$$\begin{aligned} \lim_{t_s \rightarrow \infty} (\hat{A}_T, \hat{B}_T, \hat{C}_T, \hat{D}_T, \hat{K}_T, \hat{S}) \\ \rightarrow (A, B, C, D, K, S) \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (27)$$

下标 T 表示线性变换.

证明. 由式 (10) 和 (11) 可得

$$Y_{[t,t_s]} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t & \mathbf{y}_{t+1} & \cdots & \mathbf{y}_{t_s-i+1} \\ \mathbf{y}_{t+1} & \mathbf{y}_{t+2} & \cdots & \mathbf{y}_{t_s-i+1} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{y}_{t+i-1} & \mathbf{y}_i & \cdots & \mathbf{y}_{t_s} \end{pmatrix} =$$

$$\Gamma_i X_t + H_i^u U_{[t,t_s]} + H_i^e E_{[t,t_s]} + H_i^v V_{[t,t_s]}$$

由 ϑ 定义可知, 上式可写成

$$Y_{[t,t_s]} = \Gamma_i \hat{X}_t + \text{“terms in } \hat{\vartheta}_{[t,t_s]} \text{”} \quad (28)$$

因此对式 (28) 计算斜投影得

$$\begin{aligned} & Y_{[t,t_s]}/\vartheta_{[t,t_s]} W_{[t_0,t)} = \\ & \Gamma_i X_t/\vartheta_{[t,t_s]} W_{[t_0,t)} + \text{“terms in } \hat{\vartheta}_{[t,t_s]}/\vartheta_{[t,t_s]} W_{[t_0,t)}'' \end{aligned}$$

由斜投影性质简单可知等上式右边第二项为零, 即

$$Y_{[t,t_s]}/\vartheta_{[t,t_s]} W_{[t_0,t)} = \Gamma_i \hat{X}_t \quad (29)$$

当 $\Gamma_i \hat{X}_t$ 得到之后, 闭环子空间辨识过程与开环辨识过程采用相同的方法, 由已有结论可知^[14], 若式 (29) 成立, 当 $t_s - t \rightarrow \infty$ 时, 式 (27) 成立, 即系统矩阵估计值 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ 、 K 和 S 为强一致估计。□

5 仿真研究

以下对一个闭环子空间辨识问题 [10] 进行仿真研究, 并与已有开环辨识算法 N4SID^[6] 相比较, 以检验本文提出算法在闭环条件下的有效性. 闭环系统如图 1 所示, 开环系统模型由式 (1) 状态空间形式给出, 其中系统矩阵分别给定如下

$$A = \begin{bmatrix} 4.40 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8.09 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7.83 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4.00 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.86 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.00098 \\ 0.01299 \\ 0.01895 \\ 0.0033 \\ -0.00002 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 2.3 \\ -6.64 \\ 7.515 \\ -4.0146 \\ 0.86336 \end{bmatrix}$$

反馈控制器状态空间模型为

$$A_c = \begin{bmatrix} 2.65 & -3.11 & 1.75 & -0.39 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c^T = \begin{bmatrix} -0.4135 \\ 0.8629 \\ -0.7625 \\ 0.2521 \end{bmatrix}, \quad D_c = 0.61$$

外部输入 u 为方差为 1 高斯白噪声序列, e 为方差为 1/9 的高斯白噪声序列. 为提高辨识准确度, 共产

生 100 组数据集, 每组取 1200 个采样点, 各组具有相同的外部输入信号 r 和不同的噪声序列 e , 对 100 组数据集取平均结果.

开环辨识算法与本文闭环辨识模型的伯特图与实际系统伯特图比较结果如图 2 所示. 矩阵 A 的特征值, 即系统的极点分布在图 3 中给出. 从比较结果可以看出, 与成熟的开环辨识算法 N4SID 相比, 在相同的数据样本集和相同的辨识条件下, 本文提出的算法在闭环条件下表现出一定的优势, 在控制器模型未知的情况下, 不依赖于开环系统模型的任何先验知识, 实现对于多变量系统的闭环辨识.

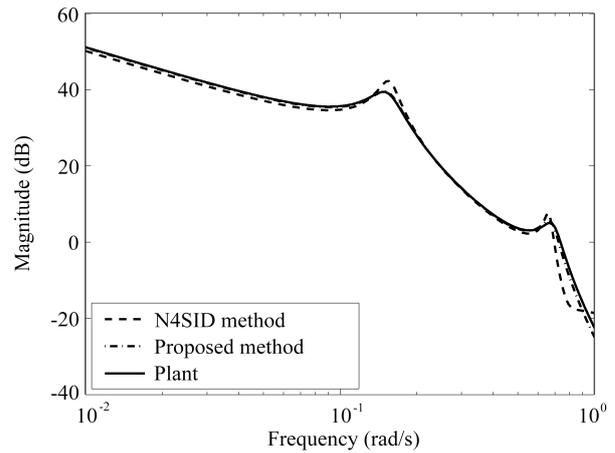


图 2 伯特图
Fig. 2 Bode diagram

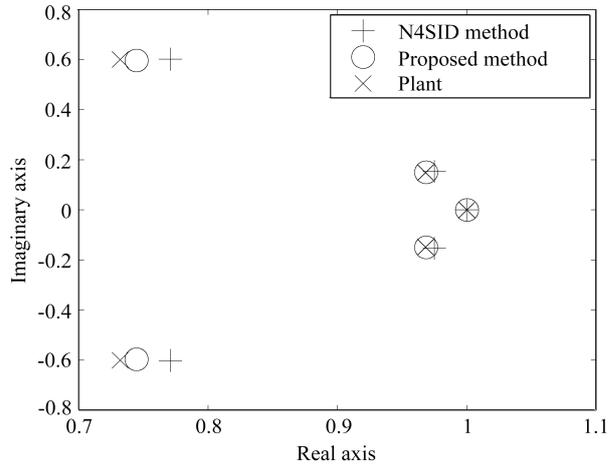


图 3 矩阵 A 的特征值
Fig. 3 Eigenvalue of matrix A

6 结论

针对反馈存在条件下输入与不可测噪声之间相关性带来的新问题, 本文在对闭环建模分析的基础

上, 将输入输出误差包含至输入子空间中, 基于扩张输入子空间的方法, 实现新的状态空间构造方法, 在子空间辨识框架内提出一种新的闭环辨识算法, 在不需要任何控制器和模型先验知识的前提下, 实现闭环条件下对系统参数的强一致无偏估计. 为子空间方法应用于闭环系统辨识提供了算法和理论支持, 最后给出仿真实例验证了算法的有效性.

References

- 1 Yang H, Li S. Subspace-based adaptive control for a class of nonlinear systems. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2005, **1**(4): 743~753
- 2 Overschae P V, Demoor B L. *Subspace Identification for Linear Systems: Theory Implementation Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996
- 3 Katayama T. *Subspace Methods for System Identification*. London: Springer, 2005
- 4 Forsell N, Ljung L. Closed-loop identification revisited. *Automatica*, 1999, **35**(7): 1215~1241
- 5 Su Jian-Lin, Wang Wei, Xu Xiao-Ming, Zhang Wei-Dong. Closed-loop problem in system identification. *Control Theory and Applications*, 2002, **30**(5): 652~663
(苏建林, 王伟, 许晓明, 张卫东. 系统辨识中的闭环问题. 控制理论与应用, 2002, **30**(5): 652~663)
- 6 Ljung L. *System Identification, Theory for the User* (2nd Edition). New Jersey: Prentice-Hall, 1999
- 7 Ding Feng, Chen Tong-Wen, Xiao De-Yun. State-space modeling and identification of general dual-rate stochastic systems. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(5): 652~663
(丁锋, 陈通文, 萧德云. 一般双率随机系统状态空间模型及其辨识. 自动化学报, 2004, **30**(5): 652~663)
- 8 Jansson M. Subspace identification and arx modeling. In: *Proceedings of 13th IFAC System Identification*. Rotterdam, Netherlands, 2003
- 9 Qin S J, Ljung L. Closed-loop subspace identification with innovation estimation. In: *Proceedings 13th IFAC System Identification*. Rotterdam, Netherlands, 2003
- 10 Huang B, Ding S X, Qin S J. Closed-loop subspace identification: an orthogonal projection approach. *Journal of Process Control*, 2005, **15**(1): 53~66
- 11 Katayama T, Kawauchi H, Picci G. Subspace identification of closed-loop systems by orthogonal projection method. *Automatica*, 2005, **41**(5): 863~872
- 12 Soderstrom T, Stoica P. *System Identification*. Hemel Hempstead: Prentice-Hall, 1989
- 13 Chiuseo A, Picci G. Consistency analysis of some closed-loop subspace identification methods. *Automatica*, 2005, **41**(3): 337~391
- 14 Bauer D, Jansson M. Analysis of the asymptotic properties of the MOESP type of subspace algorithms. *Automatica*, 2000, **36**(4): 497~509



杨华 上海交通大学博士研究生, 主要研究方向为子空间辨识和预测控制。
(**YANG Hua** Ph.D. candidate at Shanghai Jiao Tong University. Her research interest covers subspace identification and predictive control.)



李少远 上海交通大学教授, 主要研究方向为智能控制和动态系统优化研究. 本文通信作者.
E-mail: syli@sjtu.edu.cn
(**LI Shaoyuan** Professor of Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers intelligent control and dynamical system optimization. Corresponding author of this paper.)