

# 球-杆系统的非线性问题

何朕<sup>1</sup> 王毅<sup>1</sup> 周长浩<sup>1</sup> 刘彦文<sup>2</sup>

**摘要** 球-杆系统真正的问题并不是大行程下的非线性现象,而是平衡点上的自振荡问题.分析指出自振荡是由于球在滚动时存在一种滞环特性而引起的.提出了一种极点配置的方法来避免自振荡.仿真和实验验证了这一判断.所采取的稳定措施也是正确的.

**关键词** 球-杆系统,自振荡,滞环特性,极点配置  
**中图分类号** TP273

## Nonlinear Problems of the Ball-and-Beam System

HE Zhen<sup>1</sup> WANG Yi<sup>1</sup> ZHOU Chang-Hao<sup>1</sup> LIU Yan-Wen<sup>2</sup>

**Abstract** The real problem of the ball-and-beam system is not the nonlinear behavior under large excursions, but the limit cycle around the equilibrium point. It is pointed out that the limit cycle is caused by the hysteresis behavior of the ball during rolling. A pole placement method is proposed to avoid the limit cycle. The analysis is verified by simulation and by experiment. The stabilization approach for the ball-and-beam system is also proved to be correct.

**Key words** Ball-and-beam system, limit cycle, hysteresis, pole placement

### 1 引言

在现代控制理论中,球-杆系统是一个典型的实验装置,国内不少高校也已配备这种实验装置.近年来还有作者将球-杆系统作为一种典型的非线性系统来进行研究<sup>[1~3]</sup>.但是实际调试发现球-杆系统并不是像文献中的数学模型所描述的那么单纯.实际的球-杆系统确实是一个非线性系统,但其中的非线性特性却尚未见有报道.本文结合实测和调试,对球-杆系统的非线性进行分析和说明.只有了解了该系统中的实际的非线性问题,才能正确确定控制规律中的各个参数,使实验系统发挥正常的作用.

### 2 球-杆系统

图 1 是德国 Amira 公司生产的 BW500 球-杆实验系统,小球可以在杆上自由滚动,施加在杆上的力矩  $\tau$  是系统的控制输入,通过控制杆的转动来控制小球在杆上的位置.

球-杆系统的运动方程式为<sup>[4]</sup>

$$(m + \frac{I_b}{r^2})\ddot{x} - m\dot{x}\dot{\alpha}^2 + mg \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$(m\dot{x}^2 + I_w + I_b)\ddot{\alpha} + 2m\dot{x}\dot{\alpha} + mgx \cos \alpha = \tau \quad (2)$$

式中球的转动惯量  $I_b = 4.32 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , 球的质量  $m = 0.27 \text{ kg}$ , 球的半径  $r = 0.02 \text{ m}$ , 杆的转动惯量  $I_w = 0.1402 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $x$  为球在杆上的位移,  $\alpha$  为杆的转角.

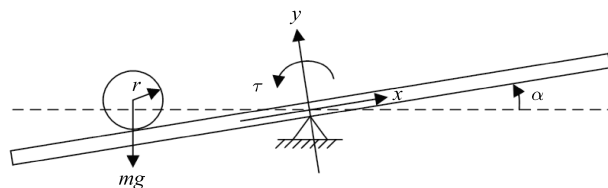


图 1 球-杆系统

Fig. 1 The ball-and-beam system

式 (1) 和 (2) 是一组非线性方程.设原点为平衡点,如果按原点展开,其小偏差线性化方程为

$$(m + \frac{I_b}{r^2})\ddot{x} = -mg\alpha \quad (3)$$

$$(I_w + I_b)\ddot{\alpha} + mgx = \tau \quad (4)$$

这组线性方程就是这个球-杆系统作为现代控制理论课程实验装置的数学模型,可在此基础上开展有关的研究.

但是这个系统极易出现自振荡,也许因为是这个缘故,促使人们从非线性的角度来研究这个系统.一般在进行非线性研究时都是以式 (1) 和 (2) 的非线性方程作为出发点<sup>[1~3]</sup>.但是 (1) 和 (2) 中的  $x\dot{\alpha}^2$  项是向心加速度,  $\dot{x}\dot{\alpha}$  项是哥氏 (Coriolis) 加速度,这两项在实际系统中是非常小的,以致于最后的结论是当  $x > 5 \text{ m}$ <sup>[1]</sup>(文献 [2] 中则是 3 m) 时系统是不稳定的.由于实际装置上球的行程只有  $\pm 0.4 \text{ m}$ ,所以这种理论分析的结果,并无助于实际问题的解决.

对球-杆系统来说,现在的问题是围绕着平衡点出现自振荡.因此球-杆系统的主要问题是平衡点的稳定问题.平衡点是指杆处于水平位置 ( $\alpha = 0$ ),而球停在某一位置  $x = x_0$ .当研究平衡点稳定性时,(1) 和 (2) 中的  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ ,而 (2) 中的  $m\dot{x}^2 = m\dot{x}_0^2$ ,可视为常数.由于实际系统中  $x < 0.4 \text{ m}$ ,而球的质量  $m$  又较小,这  $m\dot{x}_0^2$  项远小于第二项  $I_w$ ,所以在下面分析中可以略去这一项.或者说,以原点 ( $x = 0$ ) 处的稳定性作为代表来进行研究.至于 (1) 中的向心加速度  $x\dot{\alpha}^2$  和 (2) 中的哥氏加速度  $\dot{x}\dot{\alpha}$  在这种实际系统中本来就是可以忽略的.所以球-杆系统的运动学方程可以用 (3) 和 (4) 的线性方程来描述,确切地说,是在 (3) 和 (4) 上再加上非线性因素.

### 3 球-杆系统中的非线性

这个系统极易出现自振荡,在方波输入作用下,有时半周内能稳定下来,而当参数不合适时,基本上一直都在振,也有可能(随机的)在某个半周内又会停下来.图 2 是先稳定、后持续存在自振荡的记录曲线,参考信号为  $\pm 0.10 \text{ m}$  方波.第二个周期内无论是正向或反向,角度一直在振荡,球则围绕着平衡点来回滚动,随后的几个周期一直是在自振荡(限于篇幅,后续的图已截断).

注意到第一个半周内角度停在  $-0.0062 \text{ rad} (\approx -0.36^\circ)$ ,而在第二个半周内角度停在  $+0.0043 \text{ rad}$ .这说明角度存在着死区,一进入死区整个系统就停下来了(注:线性设计保证了其稳定性).从图中还可以看到,当系统出现自振荡(第二

收稿日期 2005-10-24 收修稿日期 2006-5-30  
Received October 24, 2005; in revised form May 30, 2006  
国家自然科学基金(60374027),哈尔滨工业大学优秀青年教师培养计划(HIT.20060103, HIT.200210)资助  
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60374027), Development Program for Outstanding Young Teachers at Harbin Institute of Technology(HIT.20060103, HIT.200210)  
1. 哈尔滨工业大学控制科学与工程系 哈尔滨 150001 2. 哈尔滨工程大学自动控制系 哈尔滨 150001  
1. Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001 2. Department of Automatic Control, Harbin Engineering University, Harbin 150001  
DOI: 10.1360/aas-007-0550

一个方波周期) 时, 基本上是围绕着死区的大小范围在振荡. 图 2 所记录的才是球 - 杆系统的真实的非线性现象.

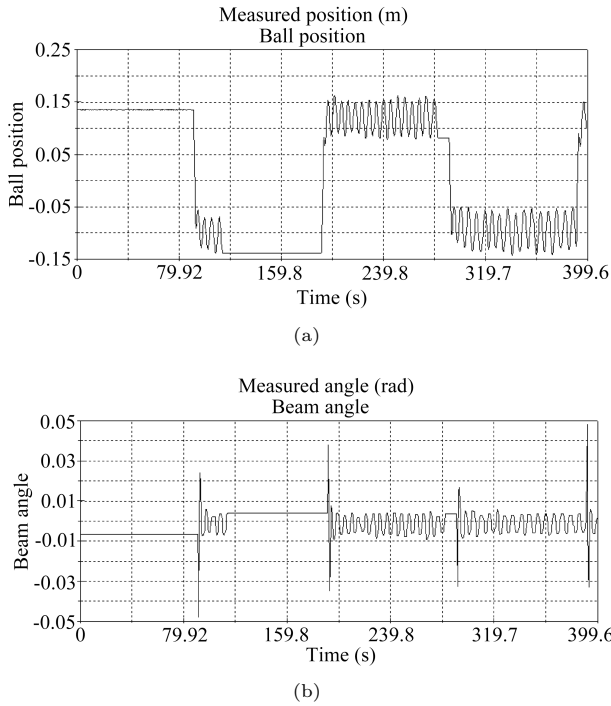


图 2 球位移 (a) 和杆转角 (b) 的实验记录 1

Fig. 2 Experimental record 1 ((a) Displacement of the ball; (b) Angle of the beam)

理论上只要杆有转动, 球就会滚动, 因而可以列出 (1). 但实际上这是一个相对比较重的钢球架在边缘比较薄的铝质凹槽上, 所以铝质的杆上会有一些弹性变形<sup>[5]</sup>, 当杆转动时因为球还陷在凹坑内而并不会立即滚动 (见图 3). 从图 2 的数据看, 死区的范围约为  $\pm 0.0065 \text{ rad}$  (约  $\pm 0.37^\circ$ ). 应该说明的是这种弹性变形的程度存在一定的随机性. 如果杆正负转动, 转角反向时球就要在另一方向越过凹坑才能滚动, 所以对应自振荡 (图 2 第二个方波) 时, 球的滚动呈现滞环特性, 如图 4 所示. 当然关于滞环特性的解释是需要验证的.

设滞环的宽度 (标称值)  $2a_1 = 0.014 \text{ rad}$ , 其描述函数的负倒特性见图 5 的  $-1/N$ . 球 - 杆系统的状态变量为  $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \alpha \ \dot{\alpha}]^T$ , 对此球 - 杆系统采用状态反馈. 实验系统是采用数字控制的, 采样周期  $T_s = 0.05 \text{ sec}$ . 设对应的离散状态反馈阵为

$$\mathbf{K}_{d1} = [25.0418 \ 26.9373 \ 56.1205 \ 6.1019] \quad (5)$$

注意到滞环特性的输入输出都是连续的, 而这个系统是采样系统, 需要将此采样系统的回路在  $\alpha$  处断开, 计算在连续的正弦信号  $\theta$  作用下的连续输出  $\alpha$  之间的频率响应. 所以这里采用 [6] 的方法来计算这个采样系统的频率响应  $G(j\omega)$ , 如图 5 所示. 这里  $G(j\omega)$  就是描述函数法分析中的系统线性部分的特性.

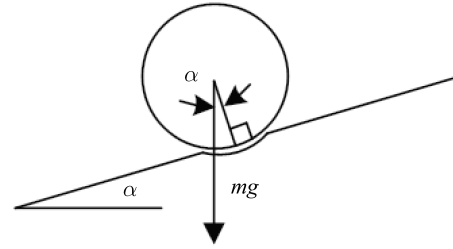


图 3 球压在杆上的示意图  
Fig. 3 Beam deformation under the ball

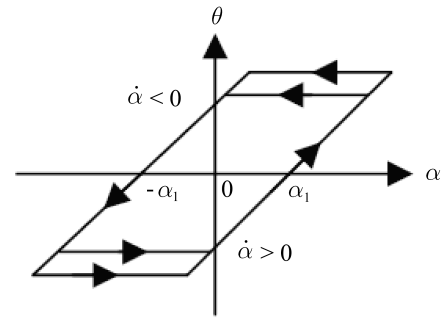


图 4 滞环特性  
Fig. 4 Hysteresis

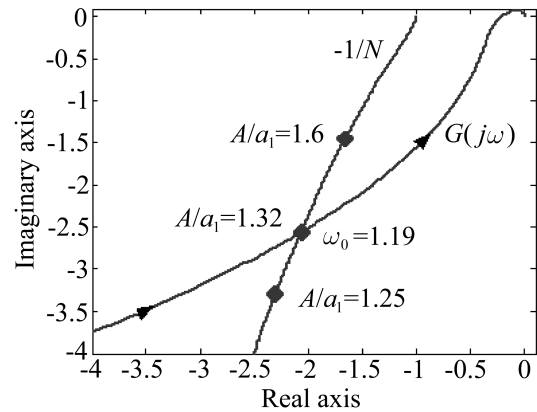


图 5 自振荡的描述函数法分析  
Fig. 5 Describing function analysis

根据描述函数法,  $G(j\omega)$  与  $-1/N$  的交点即对应于自振荡. 从图上可读得自振荡的频率  $\omega_0 = 1.19 \text{ rad/sec}$ , 交点处的  $A/a_1 = 1.32$ . 因为  $a_1$  的标称值是  $0.007 \text{ rad}$ , 故自振荡的幅值  $A = 0.00924 \text{ rad}$ .

其实, 图 2(b) 的曲线就是在此反馈增益阵  $\mathbf{K}_{d1}$  控制下的实验记录, 图中在第二个方波信号下出现自振荡. 图 6 所示则是在方波半个周期下转角变化的仿真曲线. 仿真是采取混合仿真, 对象是连续的, 而控制器是离散的. 表 1 所列是这三种情况下的自振荡数据.

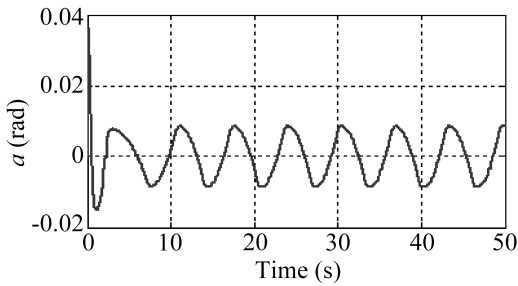


图 6 仿真所得的自振荡波形  
Fig. 6 Simulation result

表 1 转角的自振荡参数  
Table 1 Parameters of the limit cycle

方法	频率 (rad/s)	周期 (s)	峰-峰值 (rad)
描述函数法 (图 5)	1.19	5.28	0.0185
仿真 (图 6)	0.97	6.47	0.0171
实验 (图 2b)	1.10	5.71	0.0134

换用不同的反馈增益阵  $\mathbf{K}_d$ , 会出现不同的自振荡频率和幅值, 不过三种情况下的数据关系仍然是与表 1 相类似的 (文中略). 众所周知, 描述函数法实际上是一种近似法, 这里计算和仿真用的数学模型又都是标称模型, 而且是忽略了实际存在的各种阻尼. 还应该指出的是, 对实际的实验系统来说, 存在着带动杆转动的传动上的摩擦. 不过原球-杆实验系统设计有扰动观测器来补偿这个摩擦力 (矩) 的. 经观测, 该扰动观测器的设计是成功的, 所以本文在上面的分析中已经将摩擦力的因素排除了. 但是实际上扰动补偿并不可能是理想的. 总之, 表 1 的三种方法都有各自的背景和条件. 这三种不同方法所得的结果如此接近, 说明球-杆系统在工作点附近的自振荡确实是由于滞环特性引起的.

这里要说明的是, 滞环特性并不能完全反映球-杆系统的特点, 因为一般的滞环特性只反映了  $\dot{\alpha} > 0$  或  $\dot{\alpha} < 0$  的特性 (图 4). 对球-杆系统来说, 实验表明在平衡点附近的小区域内还存在一个死区特性, 所以这是一种带死区的滞环特性. 设用  $\Omega$  表示相空间中的这个区域,

$$\Omega = \{(\alpha, \dot{\alpha}) \mid |\dot{\alpha}| < |\Delta\dot{\alpha}|, |\alpha| < |a_2 + \Delta\alpha|\} \quad (6)$$

则该非线性特性可描述如下

$$(\alpha, \dot{\alpha}) \in \bar{\Omega}, \begin{cases} \theta = \alpha - a_1 \cdot \text{sign}(\dot{\alpha}) \\ \theta - a_1 < \alpha < \theta + a_1, \quad \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$(\alpha, \dot{\alpha}) \in \Omega, \theta = \begin{cases} \alpha - a_2, & \theta > a_2 \\ 0, & |\theta| < a_2 \\ \alpha + a_2, & \theta < -a_2 \end{cases} \quad (8)$$

(7) 表示在  $\Omega$  区域之外时是滞环特性, 而 (8) 为死区特性. 式中  $\alpha$  是杆的转角, 也就是原式 (4) 中的  $\alpha$ , 非线性的输出  $\theta$  就是式 (3) 右项中的  $\alpha$ . 也就是说, 要在这两个线性方程之间插入上述的非线性环节. 图 5 中线性部分的频率特性  $G(j\omega)$  就是根据这种系统结构来计算的.

仿真研究时需要在式 (7) 和 (8) 之间进行切换, 为方便应用可以将式 (7) 和 (8) 在 Simulink 环境下封装成一个模

块<sup>[7]</sup>. 仿真分析中  $a_1$  仍取其标称值 0.007rad, 而死区部分  $\Omega$  的参数为

$$\begin{cases} a_2 = 0.0065 \text{ rad} \\ \Delta\alpha = 0.0001 \text{ rad} \\ \Delta\dot{\alpha} = 0.002 \text{ rad/sec} \end{cases} \quad (9)$$

按式 (9) 参数仿真所得的结果见图 7, 角度振荡一次后就稳定下来了, 与图 2 的前一个方波周期内的波形有相似的特性. 当其它参数不变, 仅改变  $a_2$ , 将  $a_2$  从 (9) 的 0.0065 rad 改成 0.0064 rad 时, 系统就出现与图 6 一样的自振荡. 这说明这个系统对  $a_1$  与  $a_2$  的相对关系极为敏感, 稍有变化就会从进入死区的稳定状态跳变为自振荡, 或相反. 而这个  $a_1$  和  $a_2$  是由于球压在杆上的弹性变形引起的, 本身就带有不确定性. 因此这个实验系统就会出现图 2 所示的情况, 有时是稳定的 (进入死区), 有时则出现自振荡, 一直停不下来.

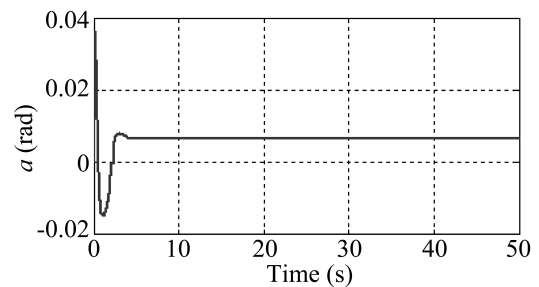


图 7 按式 (9) 的仿真曲线  
Fig. 7 Simulation with equation (9)

#### 4 球-杆系统的设计

由于球-杆系统极易出现自振荡, 所以这个实验装置一般来说是很难调试的. 现在有了这个非线性模型 (式 (7) 和 (8)) 就可以来讨论调试问题了. 因为这里有死区特性, 所以杆和球是可以停下来的, 但  $a_1$  和  $a_2$  相差不大, 球只要一滚出  $\Omega$  区域就会出现自振荡. 所以选择状态反馈增益  $\mathbf{K}_d$  (式 (5)) 时应使系统的主导极点是一个单极点, 即应该使系统呈现出一阶系统的特性. 因为如果是一阶的特性, 则其相轨迹是单侧趋近于死区的. 而如果按常规的复数主导极点来设计, 则其相轨迹有可能要绕过死区, 即有可能离开  $\Omega$  区域, 进入自振荡状态.

基于这个认识, 先按连续系统设计, 将极点配置在  $-0.8, -4, -12.3382 \pm j19.6387$ . 当然也可以配置其他极点, 主要是设法让只有一个单极点靠近原点. 将这些极点按  $z = e^{sT_s}$  的关系式转换为离散极点, 再根据极点配置理论, 得离散的状态反馈阵为

$$\mathbf{K}_{d2} = [37.5559 \quad 50.8261 \quad 97.2558 \quad 6.6962] \quad (10)$$

图 8 所示就是在这个反馈阵  $\mathbf{K}_{d2}$  控制下球-杆系统跟踪方波信号的记录曲线, 每次阶跃变化后系统都能稳定下来不再出现自振荡.

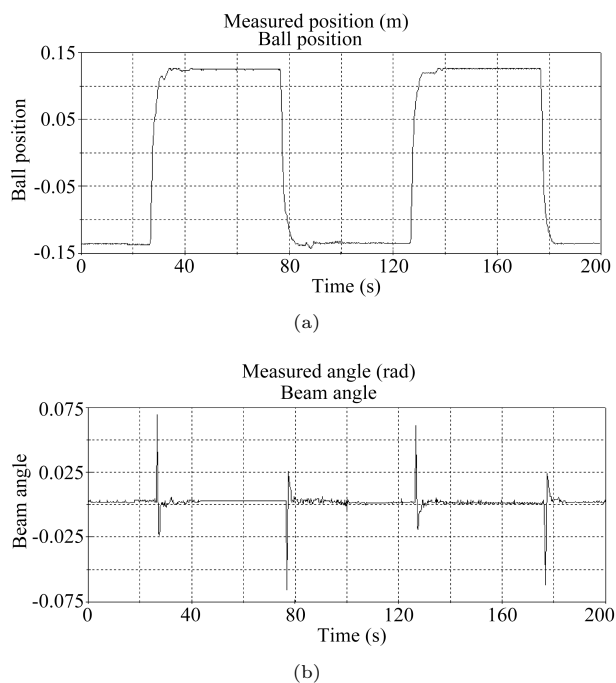


图 8 球位移 (a) 和杆转角 (b) 的实验记录 2

Fig. 8 Experimental record 2 ((a) Displacement of the ball; (b) Angle of the beam)

这个实验结果表明, 上节对非线性特性的认识是正确的, 用这个思路来指导设计可取得预期的效果。

## 5 结论

1) 球 - 杆系统本来是现代控制理论的一个重要实验装置. 但是由于存在非线性, 使该系统的极点不能完全自由配置, 尤其是不能按常规来配置复数的主导极点. 只有按本文方法来配置极点, 才能保证平衡点稳定. 在这个基础上才可以来研究现代控制理论的其他问题, 例如观测器设计, 扰动补偿等等, 使实验系统发挥正常作用.

2) 实际系统的非线性问题是多种多样的, 不是根据一般原理而列出的运动方程式就能代表的. 对球 - 杆系统来说真正的非线性问题是平衡点上的自振荡, 而不是大行程下的问题.

## References

- 1 Hu Yue-Ming. *Nonlinear Control Systems Theory and Applications*. Beijing: National Defence Industry Press, 2002. 69~83  
(胡跃明. 非线性控制系统理论与应用. 北京: 国防工业出版社, 2002. 69~83)
- 2 Hauser J, Sastry S, Kokotovic P. Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(3): 392~398
- 3 Olfafti R, Megretski A. Controller design for the beam-and-ball system. In: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. USA, IEEE, 1998. 4555~4560
- 4 Wang Guang-Xiong, Yang Dong-Yun, He Zhen. The Lagrange equation and its linearization. *Control and Decision*, 2002, **7**(Suppl. 2): 7~8  
(王广雄, 杨冬云, 何朕. 拉格朗日方程和它的线性化. 控制与决策, 2002, **7**(增刊 2): 7~8)

- 5 Armstrong-Helouvy B, Dupont P, Dewit C C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 1994, **30**(7): 1083~1138
- 6 Liu Yan-Wen, Wang Guang-Xiong, He Zhen. Frequency response and the L2-induced norm of sampled-data systems. *Control and Decision*, 2005, **20**(10): 1133~1136  
(刘彦文, 王广雄, 何朕. 采样系统的频率响应与 L2 诱导范数. 控制与决策, 2005, **20**(10): 1133~1136)
- 7 Wang Yi, He Zhen, Su Bao-Ku. Simulation of the friction model on Simulink. *Electric Machines and Control*, 2004, **8**(1): 60~62  
(王毅, 何朕, 苏宝库. 摩擦模型的 Simulink 仿真. 电机与控制学报, 2004, **8**(1): 60~62)

何朕 博士, 副教授. 研究方向为描述系统、控制系统的鲁棒设计. 本文通信作者. E-mail: hezhen@hope.hit.edu.cn

(HE Zhen Ph. D., associate professor in Department of Control Science and Engineering at Harbin Institute of Technology. Her research interest covers descriptor systems and robust design for control systems. Corresponding author of this paper.)

王毅 博士, 副研究员. 从事计算机控制系统等研究.

E-mail: ywang@hit.edu.cn

(WANG Yi Ph. D., associate professor in Department of Control Science and Engineering at Harbin Institute of Technology. His research interest covers the computer control technology.)

周长浩 硕士研究生, 从事鲁棒控制等研究.

E-mail: vipzhouch@eyou.com

(ZHOU Chang-Hao Master student in Department of Control Science and Engineering at Harbin Institute of Technology. His research interest covers robust design for control systems.)

刘彦文 博士, 从事采样系统和鲁棒控制系统设计等研究.

Email: liuyanwen@hit.edu.cn

(LIU Yan-Wen Ph. D. in Department of Control Science and Engineering at Harbin Institute of Technology. Her research interest covers sampled-data systems and robust control system design.)