离散奇异摄动系统稳定性分析

蔡晨晓[1] 邹 云[1]

摘 要 讨论了关于离散奇异摄动系统的摄动稳定性解析条件, 给出了离散奇异摄动系统两种模型下的摄动稳定性充要条件. 通过分析状态矩阵的结构特性, 得出了系统稳定所需要的状态矩阵形式和限制条件. 同时, 通过广义系统途径也得到了 2-D 离散奇异摄动 Roessor 模型稳定的充分条件.

关键词 奇异摄动系统, 稳定性, 2-D 系统

中图分类号 TP11

Stability Analysis of Discrete Singularly Perturbed Systems

CAI Chen-Xiao[1] ZOU Yun[1]

Abstract Some analytic conditions for stability of discrete singularly perturbed systems are presented. The stable sufficient and necessary conditions for two discrete singularly perturbed models are obtained. Simultaneously, the stable sufficient conditions for the 2-D discrete singularly perturbed systems are treated by the singular system method.

Key words Singularly perturbed systems, stability, 2-D systems

1 引言

连续奇异摄动系统的基本稳定性问题早在 20 世纪 60 年代已经被 Klimushev 解决[1], 通过快慢分解思想得到: 如果慢、快子系统均是稳定的, 则摄动参数存在一个稳定的上界, 在其范围内奇异摄动系统是稳定的. 对于离散奇异摄动情形, 有许多学者做了大量的工作[2~5], Li T S 等[2,4] 用 Nyquist 图和状态空间方法分别讨论不同采样率下的两种离散模型, 得到了摄动参数稳定上界的确切值. 文献 [3] 进一步讨论研究了多摄动参数的情形. 在此基础上, Ghosh R 等[5] 提出了一种基于 Kronecker 积的直接方法, 讨论了稳定上界. 但这些工作大多基于连续快慢分解的思想, 直接讨论离散快慢子系统的稳定性, 大量的工作都集中在摄动参数上界的求取上. 而基于原系统状态空间模型稳定性的直接条件少有文献涉及.

本文主要基于状态空间模型, 沿着得出连续系统稳定性条件的思路[6] 讨论了在慢、快两种采样速率下得到的不同模型的稳定性与其状态矩阵之间的关系, 所得结论的证明依据一个矩阵的特征值连续地依赖于矩阵的元素[7] 这一论据. 而后又根据 2-D 广义离散系统情形稳定性条件的关系, 推导了奇异摄动系统 2-D 情形的稳定性充分条件.

收稿日期 2005-11-30 收修改稿日期 2006-3-18
Received November 30, 2005; in revised form March 18, 2006
国家自然科学基金 (60474078, 60574015) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60474078, 60574015)
1. 南京理工大学自动化学院 南京 210094
1. Institute of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094
DOI: 10.1360/aas-007-0511

2 奇异摄动系统的摄动稳定性条件

本节考虑两种典型的离散奇异摄动系统模型稳定性, 通过分析状态矩阵特征值的特性, 得出了系统稳定性的充要条件.

2.1 问题描述

考虑离散奇异摄动 1-D 系统

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k+1) \\ \boldsymbol{z}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \epsilon A_{12} \\ A_{21} & \epsilon A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{z}(k) \end{bmatrix} \tag{1}$$

以及

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k+1) \\ \boldsymbol{z}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I+\epsilon A_{11} & \epsilon A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{z}(k) \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n_1}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^{n_2}$ 为系统状态向量, $A_{11} \in \mathbf{R}^{n_1\times n_1}, A_{12} \in \mathbf{R}^{n_1\times n_2}, A_{21} \in \mathbf{R}^{n_2\times n_1}, A_{22} \in \mathbf{R}^{n_2\times n_2}$ 为常系数矩阵, $\epsilon > 0$ 为奇异摄动参数.

本节目的: 分析当状态矩阵 $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} A_{11} & \epsilon A_{12} \\ A_{21} & \epsilon A_{22} \end{bmatrix}$ 或 $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} I+\epsilon A_{11} & \epsilon A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 满足什么条件时, 可以保证存在 $\epsilon^* > 0$ 使得系统 (1) 或 (2) 对于任意的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$ 均是稳定的.

2.2 离散奇异摄动系统稳定的充要条件

引理 1[8]**.** 设 $A(\epsilon) = A(0) + \epsilon\hat{A}$, 适当排序后, 设 λ_i 为 $A(0)$ 的第 i 个 m 重特征值, 相应的 $A(\epsilon)$ 有 m 个 ($m_1, \cdots, m_r$ 重, 其中 $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$) 特征值, $\lambda_i(\epsilon)$ 记为 m_i 重特征值, 则存在 $\epsilon^* > 0$ 使得对于任

意的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*), \lambda_i(\epsilon) = \lambda_i + \alpha_{i1}\mu + \alpha_{i2}\mu^2 + \cdots$, 其中 $\mu = \epsilon^{m^{-1}-i}, 1 \le m - i \le m, \alpha_{ij}$ 为适当常数.

定理 1. 设系统 (1) 中 A_{11} 在单位圆环上没有特征值, 存在 $\epsilon^* > 0$, 使得对于任意的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$, 系统 (1) 是稳定的当且仅当 A_{11} 是 Schur 矩阵, 即特征值位于开单位圆内.

证明. 令 $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} A_{11} & \epsilon A_{12} \\ A_{21} & \epsilon A_{22} \end{bmatrix}$, 则 $A(0) = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}$. 由引理 1 可得, 当 $\epsilon \to 0^+$ 时, $A(\epsilon)$ 的特征值 $\lambda(\epsilon)$ 有 n_1 个收敛于 A_{11} 的特征值, n_2 个收敛于 0. 故当且仅当 A_{11} 是 Schur 矩阵时, 存在 $\epsilon^* > 0$, 使得对于任意的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$ 和任意的 $|\lambda| \ge 1$ 有 $\det(\lambda I - A(\epsilon)) \ne 0$. □

定理 2. 设 A_{22} 在单位圆环上没有特征值, 存在 $\epsilon^* > 0$, 使得对于任意的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$, 系统 (2) 是稳定的当且仅当

i) A_{22} 是 Schur 矩阵;

ii) $A_{11} + A_{12}(I - A_{22})^{-1} A_{21}$ 所有的特征值均具有负实部.

证明. 令 $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} I + \epsilon A_{11} & \epsilon A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, 则 $A(0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. 由引理 1 可得, 当 $\epsilon \to 0^+$ 时, $A(\epsilon)$ 的特征值 $\lambda(\epsilon)$ 有 n_1 个收敛于 1, 即

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \lambda_i(\epsilon) = 1,\ 1 \le i \le n_1 \tag{3}$$

n_2 个收敛于 A_{22} 的特征值, 故由条件 i), 这 n_2 个特征值均在单位圆内, 因此有 $(I - A_{22})^{-1}$ 存在. 由 (3) 式和引理 1, 当 $\epsilon \to 0^+$ 收敛于 1 的特征值可表示为

$$\lambda_i(\epsilon) = 1 + \alpha_{ik}\mu^k + \cdots \tag{4}$$

其中 α_{ik} 为某个不为 0 的常数. 当 $\epsilon > 0$ 充分小时, $\mu = \epsilon^{m_i^{-1}}$ 也充分小. 故 $|\lambda_i(\epsilon)| < 1$ 是否成立, 取决于低阶项 $|1 + \alpha_{ik}\mu^k| < 1$ 成立与否. 注意到对于充分小的 $\epsilon > 0$, $|1 + \alpha_{ik}\mu^k| < 1$ 成立, 当且仅当 $\mathrm{Re}(\alpha_{ik}) < 0$. 同时, 注意到 $\det(\lambda I - A(\epsilon)) = 0$ 等价于

$$\det \begin{bmatrix} \Gamma & -\epsilon A_{21} \\ 0 & \lambda I - A_{22} \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

其中

$$\Gamma = (\lambda - 1) I - \epsilon(A_{11} + A_{12}(\lambda I - A_{22})^{-1} A_{21})$$

将 (4) 带入 (5), 并略去高阶项后, 得

$$\det(\alpha_{ik}\mu^k I - \epsilon(A_{11} + A_{12}(\lambda_i(\epsilon) I - A_{22})^{-1} A_{21})) = 0$$

若令

$$\beta_i(\epsilon) = \alpha_{ik}\mu^k / \epsilon \tag{6}$$

则 $\beta_i(\epsilon)$ 近似为 $A_{11} + A_{12}(\lambda_i(\epsilon) I - A_{22})^{-1} A_{21}$ 的特征值. 由引理 1, 当 $\epsilon \to 0^+$ 时, $\beta(\epsilon) \to \beta(0)$, 其中 $\beta(0)$ 为 $A_{11} + A_{12}(I - A_{22})^{-1} A_{21}$ 的特征值. 由 (6) 可知, 当 $\epsilon \to 0^+$ 时, $\mathrm{Re}\beta_i(\epsilon)$ 与 $\mathrm{Re}\alpha_{i1}$ 同号, 故 $\mathrm{Re}\alpha_{i1} < 0$ 当且仅当 $A_{11} + A_{12}(I - A_{22})^{-1} A_{21}$ 所有的特征值均具有负实部. □

上述定理与连续系统的相应定理相比, 具有非常不同的特性：一方面要求 A_{22} 是 Schur 矩阵 (在连续系统的情形中, 则要求 A_{22} 特征值均具负实部)；另一方面又要求 $A_{11} + A_{12}(I - A_{22})^{-1} A_{21}$ 所有的特征值均具有负实部, 而并非 $A_{11} + A_{12}(I - A_{22})^{-1} A_{21}$ 是 Schur 矩阵 (在连续系统的情形中, 则要求 $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 所有的特征值均具有负实部). 定理 2 说明：离散奇异摄动系统的摄动稳定解析条件并非连续情形的平行推广.

3 2-D 奇异摄动系统的摄动稳定性条件

3.1 问题描述

一般离散奇异 2-D 系统

$$\begin{aligned} E\boldsymbol{x}(i+1, j+1) = A_1\boldsymbol{x}(i+1, j) + \\ A_2\boldsymbol{x}(i, j+1) + A_0 x(i, j) \end{aligned} \tag{7}$$

边界条件为 $\boldsymbol{x}(i, 0) = \boldsymbol{x}_{i0}, \boldsymbol{x}(0, j) = \boldsymbol{x}_{0j}, i, j = 1, 2 \cdots$, 其中 $\boldsymbol{x}(i, j) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $A_k \in \mathbf{R}^{n \times n}(k = 0, 1, 2)$ 和 $E \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为常数矩阵. 当 $E = I$ 时, 得正则系统如下

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(i+1, j+1) = A_1\boldsymbol{x}(i+1, j) + A_2\boldsymbol{x}(i, j+1) + \\ A_0\boldsymbol{x}(i, j) \end{aligned} \tag{8}$$

若状态量和系数矩阵具有如下形式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(i, j) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}(i, j) & \boldsymbol{x}_f^{\mathrm{T}}(i, j) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, A_1 = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & \epsilon A_1^{(2)} \end{bmatrix} \\ A_2 = \begin{bmatrix} A_2^{(1)} & \epsilon A_2^{(2)} \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} A_0^{(1)} & \epsilon A_0^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 $0 < \epsilon << 1$ 为摄动参数, 这种系统称为 2-D 离散奇异摄动系统.

下面讨论 2-D 离散奇异摄动系统 (8) 的稳定性问题, 即：在系数矩阵满足什么条件时, 可以保证存在 $\epsilon^* > 0$ 使得系统 (8) 对于任意的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$ 均是稳定的.

3.2　2-D 离散奇异系统稳定性基本定理

由于 2-D 奇异摄动系统和其降阶形式 2-D 奇异系统之间密切关联, 下面通过奇异系统途径推导 2-D 离散奇异摄动系统的稳定性条件.

定理 3[9]**.** 2-D 离散奇异系统 (7) 稳定当且仅当

$$\det\left[E - zA_1 - wA_2 - zwA_0\right] \neq 0 \qquad (9)$$
$$0 < |z| \leq 1, 0 < |w| \leq 1$$

特别地, 当 $E = I$ 或 E 非奇异时

$$\det\left[E - zA_1 - wA_2 - zwA_0\right] \neq 0$$
$$|\lambda| \geq 1, \det(\lambda I - A(\varepsilon)) \neq 0$$

引理 2. 2-D 离散奇异系统 (7) 稳定当且仅当 $\det\left[E - z\left(A_1 + A_2\right) - z^2 A_0\right] \neq 0, |z| \leq 1$, 且 $\det\left[E - zA_1 - wA_2 - zwA_0\right] \neq 0, |z| = |w| = 1$.

证明. 记 $p\left(z, w\right) = \det[E - zA_1 - wA_2 - zwA_0]$, 令 $p(z, w) = z^k w^l \bar{p}(z, w)$, 其中 $\bar{p}(z, w)$ 满足 $\bar{p}(0, w)$ 和 $\bar{p}(z, 0)$ 不恒为零. 由定理 3, 系统 (7) 稳定当且仅当

$$\bar{p}\left(z, w\right) \neq 0, 0 < |z| \leq 1, 0 < |w| \leq 1 \qquad (10)$$

由 Decarlo 判据[10], (10) 成立当且仅当

$$p\left(z, z\right) \neq 0, 0 < |z| \leq 1, p\left(z, w\right) \neq 0, |z| = |w| = 1$$

□

推论 1. 对于系统 (7) 特殊形式的奇异 2-D Roessor 模型

$$E\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h\left(i+1, j\right)\\ \boldsymbol{x}^v\left(i, j+1\right)\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h\left(i, j\right)\\ \boldsymbol{x}^v\left(i, j\right)\end{bmatrix} \qquad (11)$$

其中 $\boldsymbol{x}^h\left(i, j\right), \boldsymbol{x}^v\left(i, j\right)$ 分别为垂直和水平状态分量. 系统 (11) 稳定当且仅当广义 1-D Roessor 模型系统 $E\boldsymbol{x}\left(i+1\right) = A\boldsymbol{x}\left(i\right)$ 稳定且 $\det\left[E - AI\left(z, w\right)\right] \neq 0, |z| = |w| = 1$, 其中 $I(z, w) = \mathrm{diag}\left\{zI_{n_1}, wI_{n_2}\right\}$.

证明. 因为 (11) 为 (7) 的特殊模型, 又为 1-D Roessor 模型的推广模型, 其稳定性条件显然. □

引理 3. 2-D 离散奇异系统 (7) 稳定当且仅当如下扩维 2-D Roessor 模型

$$\hat{E}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}^h\left(i+1, j\right)\\ \hat{\boldsymbol{x}}^v\left(i, j+1\right)\end{bmatrix} = \hat{A}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}^h\left(i, j\right)\\ \hat{\boldsymbol{x}}^v\left(i, j\right)\end{bmatrix}$$

稳定. 其中 $\hat{E} = \left[\begin{array}{c|c}0 & E\\ \hline I_n & -A_1\end{array}\right], \hat{A} = \left[\begin{array}{c|c}I_n & A_2\\ \hline 0 & -A_0\end{array}\right]$.

证明. 注意到

$$\hat{E} - \hat{A}\hat{I}(z, w) = \left[\begin{array}{c|c}-zI_n & E - wA_2\\ \hline I_n & -A_1 - wA_0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}I_n & -zI_n\\ \hline 0 & I_n\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\Theta & 0\\ \hline -A_1 - wA_0 & I_n\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}0 & I_n\\ \hline I_n & 0\end{array}\right],$$

其中 $\hat{I}(z, w) = \mathrm{diag}\left\{zI_n, wI_n\right\}, \Theta = E - zA_1 - wA_2 - zwA_0$. 因此 $\hat{E} - \hat{A}\hat{I}(z, w) \neq 0, 0 < |z| \leq 1, 0 < |w| \leq 1$ 等价于 (9). 由定理 3 即可得证. □

推论 2. 对任意的 $\epsilon > 0$, 系统 (8) 的稳定性等价于如下 2-D Roessor 模型

$$\tilde{E}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}^h\left(i+1, j\right)\\ \hat{\boldsymbol{x}}^v\left(i, j+1\right)\end{bmatrix} = \hat{A}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}^h\left(i, j\right)\\ \hat{\boldsymbol{x}}^v\left(i, j\right)\end{bmatrix} \qquad (12)$$

的稳定性, 其中 $\tilde{E} = \left[\begin{array}{c|c}0 & \epsilon I_n\\ \hline I_n & -A_1\end{array}\right]$.

3.3　2-D 离散奇异摄动系统稳定的充分条件

定理 4. 不失一般性, 奇异摄动问题 (8) 的稳定性等价于如下 2-D Roessor 模型的稳定性

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h\left(i+1, j\right)\\ \boldsymbol{x}^v\left(i, j+1\right)\end{bmatrix} = \tilde{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h\left(i, j\right)\\ \boldsymbol{x}^v\left(i, j\right)\end{bmatrix} \qquad (13)$$

其中 $\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \epsilon\tilde{A}_{13}\\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \epsilon\tilde{A}_{23}\end{array}\right]$,

$\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{21} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \tilde{A}_{12}, \tilde{A}_{22} \in \mathbf{R}^{n\times m}, \tilde{A}_{13}, \tilde{A}_{23} \in \mathbf{R}^{n\times(n-m)}$.

证明. 显然 (13) 等价于

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}^h\left(i+1, j\right)\\ \hat{\boldsymbol{x}}^v\left(i, j+1\right)\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c}A_1 & A_0 + A_1A_2\\ \hline I_n & A_2\end{array}\right]\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}^h\left(i, j\right)\\ \hat{\boldsymbol{x}}^v\left(i, j\right)\end{bmatrix} \qquad (14)$$

注意到其中 $A_1 = \begin{bmatrix}A_1^{(1)} & \epsilon A_1^{(2)}\end{bmatrix}$ 虽然也有摄动项, 但根据 (14) 中状态阵的形式, 该摄动项的摄动不具有奇异性, 故可以略去. 令 $\tilde{A}_{11} = A_1, \tilde{A}_{12} = A_0^{(1)} + A_1A_2^{(1)}, \tilde{A}_{13} = A_0^{(2)} + A_1A_2^{(2)}, \tilde{A}_{21} = I_n, \tilde{A}_{22} = A_2^{(1)}, \tilde{A}_{23} = A_2^{(2)}$, 故定理成立. □

以下讨论更为一般的 2-D 离散奇异摄动系统

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h\left(i+1, j\right)\\ \boldsymbol{x}^v\left(i, j+1\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & \epsilon A_{12}\\ A_{21} & \epsilon A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h\left(i, j\right)\\ \boldsymbol{x}^v\left(i, j\right)\end{bmatrix} \qquad (15)$$

其中 $\boldsymbol{x}^h(i, j) \in \mathbf{R}^{n_1}, \boldsymbol{x}^v(i, j) \in \mathbf{R}^{n_2}, n_1 + n_2 = n$. 然而, $A_{ij}(i, j = 1, 2)$ 的分块与 (n_1, n_2) 无关, $A_{11} \in \mathbf{R}^{m\times m}, A_{12} \in \mathbf{R}^{m\times(n-m)}, A_{21} \in \mathbf{R}^{(n-m)\times m}, A_{22} \in \mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$. 它含有如下两种情形:

1) $m \leq n_1$ 时, 方程 (15) 可表示为如下系统

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h\left(i+1, j\right)\\ \boldsymbol{x}^v\left(i, j+1\right)\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc}\hat{A}_{11} & \epsilon\hat{A}_{12} & \epsilon\hat{A}_{13}\\ \hline \hat{A}_{21} & \epsilon\hat{A}_{22} & \epsilon\hat{A}_{23}\\ \hat{A}_{31} & \epsilon\hat{A}_{32} & \epsilon\hat{A}_{33}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h\left(i, j\right)\\ \boldsymbol{x}^v\left(i, j\right)\end{bmatrix} \qquad (16)$$

其中 $A_{11} \in \mathbf{R}^{m\times m}, \hat{A}_{22} \in \mathbf{R}^{(n_1-m)\times(n_1-m)}, \hat{A}_{33} \in \mathbf{R}^{n_2\times n_2}$. 此时显然有 $A_{11} = A_{11}, A_{12} = \begin{bmatrix}\hat{A}_{12} & \hat{A}_{13}\end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix}\hat{A}_{21}\\ \hat{A}_{22}\end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix}\hat{A}_{22} & \hat{A}_{23}\\ \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33}\end{bmatrix}$.

2) $m > n_1$ 时, 方程 (15) 可表示为如下系统

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h(i+1,j)\\ \boldsymbol{x}^v(i,j+1)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \epsilon\hat{A}_{13}\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \epsilon\hat{A}_{23}\\ \hline \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \epsilon A_{33}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^h(i,j)\\ \boldsymbol{x}^v(i,j)\end{bmatrix} \tag{17}$$

其中 $\hat{A}_{11} \in \mathbf{R}^{n_1\times n_1}, \hat{A}_{22} \in \mathbf{R}^{(m-n_1)\times(m-n_1)}, A_{33} \in \mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$.

此时显然有 $A_{11} = \begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix}\hat{A}_{13}\\ \hat{A}_{23}\end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix}\hat{A}_{31} & \hat{A}_{32}\end{bmatrix} A_{22} = A_{33}$.

下面首先讨论情形 1).

定理 5. 存在 $\epsilon^* > 0$, 使得对于任意的 $\epsilon \in (0,\epsilon^*)$, 系统 (16) 是稳定的充分条件为:

i) $A_{22} = \begin{bmatrix}\hat{A}_{22} & \hat{A}_{23}\\ \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33}\end{bmatrix}$ 是 Schur 矩阵;

ii) A_{11} 是 Schur 矩阵且 $I - A_{11}$ 可逆.

证明. 令 $A(\epsilon) = \left[\begin{array}{c|cc}A_{11} & \epsilon\hat{A}_{12} & \epsilon\hat{A}_{13}\\ \hline \hat{A}_{21} & \epsilon\hat{A}_{22} & \epsilon\hat{A}_{23}\\ \hat{A}_{31} & \epsilon\hat{A}_{32} & \epsilon\hat{A}_{33}\end{array}\right]$, 则

$A(0) = \begin{bmatrix}A_{11} & 0 & 0\\ \hat{A}_{21} & 0 & 0\\ \hat{A}_{31} & 0 & 0\end{bmatrix}$. 根据推论 1, 推论 2 和定理 1,

只须证明存在 $\epsilon^* > 0$, 使得对于任意的 $\epsilon \in (0,\epsilon^*)$, 当 $|z| = |w| \le 1$ 时

$$\det(I_n - A(\epsilon)I(z,w)) \neq 0 \tag{18}$$

即可, 此时 $I(z,w) = \mathrm{diag}\{zI_m, zI_{n_1-m}, wI_{n_2}\}$. 注意到 (18) 成立的充分条件为: A_{11} 是 Schur 矩阵且对于任意固定的 $|z| = |w| = 1$, 当 $\epsilon = 0$ 时 (18) 成立, 即 $\begin{bmatrix}zA_{11} & 0 & 0\\ z\hat{A}_{21} & 0 & 0\\ z\hat{A}_{31} & 0 & 0\end{bmatrix} - I$ 为满秩矩阵, 这等价于 $I - A_{11}$ 可逆. 定理得证. □

下面讨论情形 2).

定理 6. 存在 $\epsilon^* > 0$, 使得对于任意的 $\epsilon \in (0,\epsilon^*)$, 系统 (17) 是稳定的充分条件为:

i) $A_{11} = \begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{11}\end{bmatrix}$ 是 Schur 矩阵;

ii) $\det(I_m - A_{11}I(z,w)) \neq 0, |z| = |w| = 1$. 其中 $I(z,w) = \mathrm{diag}\{zI_{n_1}, wI_{m-n_1}\}$.

证明. 根据推论 1, 推论 2 和定理 1, 以上两个条件是显然的. □

推论 3. 存在 $\epsilon^* > 0$, 使得对于任意的 $\epsilon \in (0,\epsilon^*)$, 系统 (17) 是稳定的充分条件为:

i) $A_{11} = \begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{11}\end{bmatrix}$ 是 Schur 矩阵;

ii) 存在对角的正定矩阵 $P = \mathrm{diag}\{P_1, P_2\}$, $P_1 \in \mathbf{R}^{n_1\times n_1}$, $P_2 \in \mathbf{R}^{(n_1-m)\times(n_1-m)}$, 使得

$$P - A_{11}^{\mathrm{T}}PA_{11} > 0 \tag{19}$$

证明. 假设存在正定矩阵 $P_1 \in \mathbf{R}^{n_1\times n_1}, P_2 \in \mathbf{R}^{(n_1-m)\times(n_1-m)}$ 满足条件 (19). 令 $Q = P - A_{11}^{\mathrm{T}}PA_{11} > 0$, 则由文献 [11] 易得, 系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A_{11}\boldsymbol{x}$ 稳定的充分条件为存在 $P > 0$ 和 $Q > 0$ 使得 Lyapunov 方程 $P - A_{11}^{\mathrm{T}}PA_{11} = Q$ 成立, 再由定理 6 可知推论成立. □

推论 4. 存在 $\epsilon^* > 0$, 使得对于任意的 $\epsilon \in (0,\epsilon^*)$, 系统 (17) 是稳定的充分条件为:

i) $A_{11} = \begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{11}\end{bmatrix}$ 是 Schur 矩阵;

ii) $\|\hat{A}_{11}\| < 1$ 且 $\|\hat{A}_{22}\| + \|\hat{A}_{21}\|(1 - \|\hat{A}_{11}\|)^{-1}\|\hat{A}_{12}\| < 1$, 或 $\|\hat{A}_{22}\| < 1$ 且 $\|\hat{A}_{11}\| + \|\hat{A}_{12}\|(1 - \|\hat{A}_{22}\|)^{-1}\|\hat{A}_{21}\| < 1$. 其中 $\|A\|$ 定义为 $\max\limits_i(\lambda_i^{(1/2)}(A^{\mathrm{T}}A))$ 是 A 的诱导 2- 范数, $\lambda(\cdot)$ 为矩阵 $(\cdot)$ 的特征值.

3.4 算例与仿真

例 1. 设情形 1) 的 Roessor 模型奇异摄动系统, 状态矩阵为

$$\left[\begin{array}{c|cc}A_{11} & \epsilon\hat{A}_{12} & \epsilon\hat{A}_{13}\\ \hline \hat{A}_{21} & \epsilon\hat{A}_{22} & \epsilon\hat{A}_{23}\\ \hat{A}_{31} & \epsilon\hat{A}_{32} & \epsilon\hat{A}_{33}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc}0.5 & -0.5 & \epsilon & -\epsilon\\ 1 & -0.4 & \epsilon & 0\\ \hline -1 & 1 & -0.5\epsilon & \epsilon\\ 0 & 0 & -\epsilon & 0.5\epsilon\end{array}\right]$$

边界条件 $\boldsymbol{x}_1^h(0,j) = \boldsymbol{x}_2^h(0,j) = \boldsymbol{x}_3^h(0,j) = \boldsymbol{x}_4^v(i,0) = 0.5$ 时, 系统状态垂直分量 $\boldsymbol{x}_1$ 和水平分量 $\boldsymbol{x}_4$ 变化如图 1 ~ 图 4 所示.

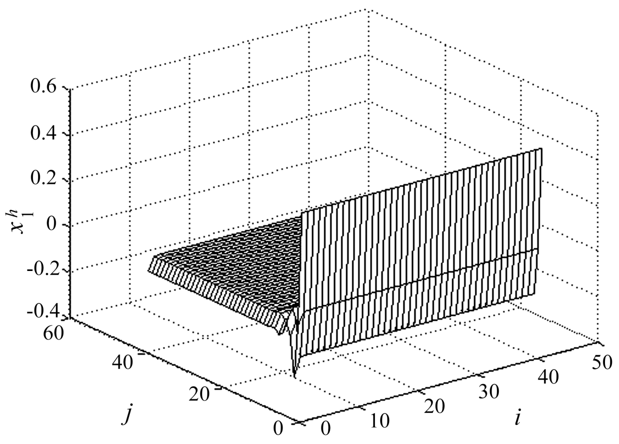

图 1　$\epsilon=0.1$ 时垂直分量 $\boldsymbol{x}_1$ 响应曲线

Fig. 1　Perpendicular state $\boldsymbol{x}_1$ response at $\epsilon=0.1$

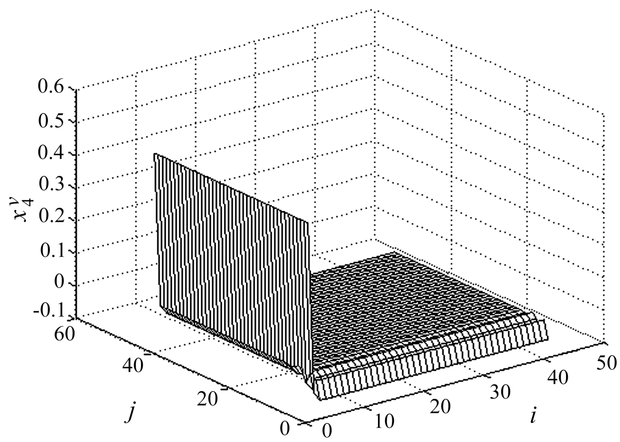

图 2　$\epsilon=0.1$ 时水平分量 $\boldsymbol{x}_4$ 响应曲线

Fig. 2　Horizontal state $\boldsymbol{x}_4$ response at $\epsilon=0.1$

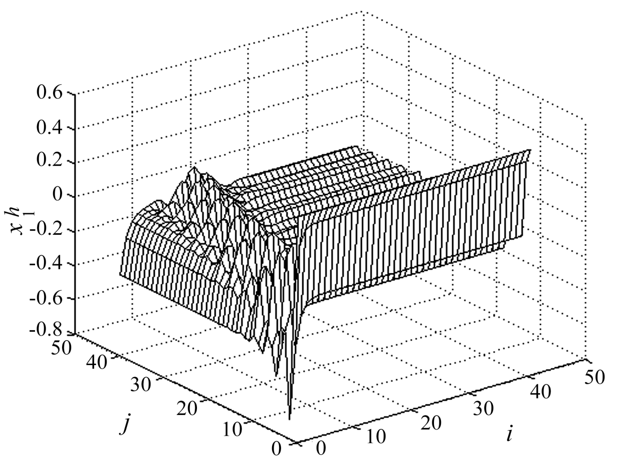

图 3　$\epsilon=0.5$ 时垂直分量 $\boldsymbol{x}_1$ 响应曲线

Fig. 3　Perpendicular state $\boldsymbol{x}_1$ response at $\epsilon=0.5$

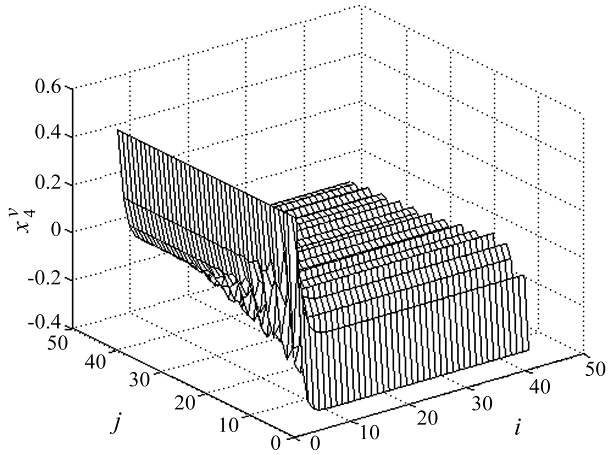

图 4　$\epsilon=0.5$ 时水平分量 $\boldsymbol{x}_4$ 响应曲线

Fig. 4　Horizontal state $\boldsymbol{x}_4$ response at $\epsilon=0.5$

系统稳定性随着 ϵ 的变大而变差. 仿真结果验证了定理 5 的正确性.

例 2. 设情形 2) 的 Roessor 模型奇异摄动系统, 状态矩阵为

$$\left[\begin{array}{cc|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \epsilon\hat{A}_{13} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \epsilon\hat{A}_{23} \\ \hline \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \epsilon A_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.8 & -0.5 & \epsilon \\ 0 & -0.5 & -\epsilon \\ \hline 1 & 0 & -0.5\epsilon \end{array}\right]$$

边界条件 $\boldsymbol{x}_1^h(0,j)=\boldsymbol{x}_2^v(i,0)=\boldsymbol{x}_3^v(i,0)=0.4$ 时, 系统状态垂直分量 $\boldsymbol{x}_1$ 和水平分量 $\boldsymbol{x}_2$ 变化如图 5 ∼图 10 所示.

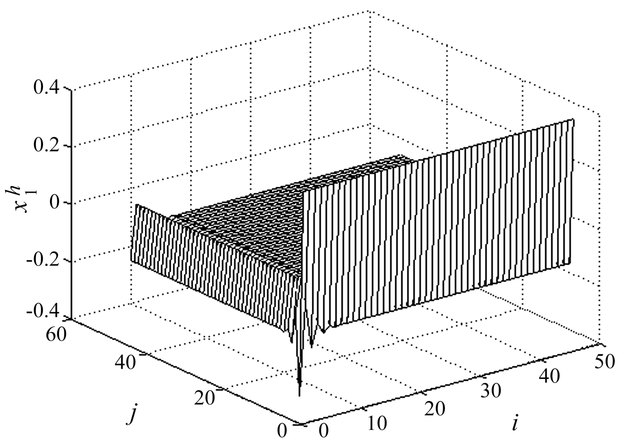

图 5　$\epsilon=0.1$ 时垂直分量 $\boldsymbol{x}_1$ 响应曲线

Fig. 5　Perpendicular state $\boldsymbol{x}_1$ response at $\epsilon=0.1$

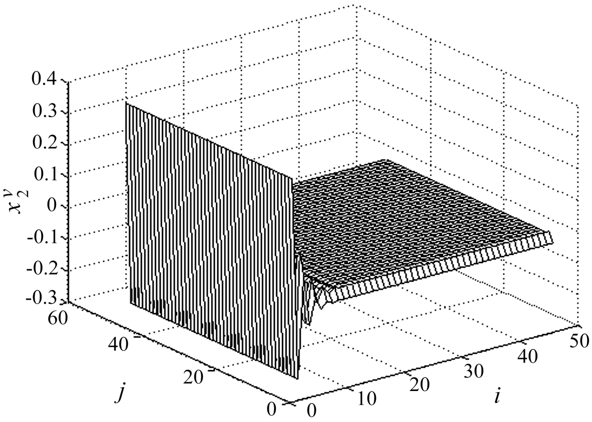

图 6 $\epsilon = 0.1$ 时水平分量 $\boldsymbol{x}_2$ 响应曲线

Fig. 6 Horizontal state $\boldsymbol{x}_2$ response at $\epsilon = 0.1$

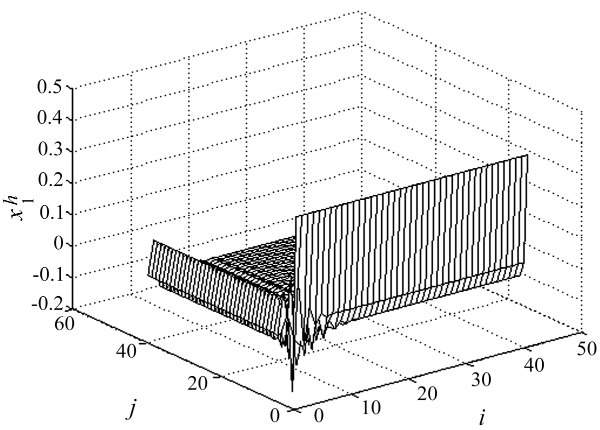

图 7 $\epsilon = 0.5$ 时垂直分量 $\boldsymbol{x}_1$ 响应曲线

Fig. 7 Perpendicular state $\boldsymbol{x}_1$ response at $\epsilon = 0.5$

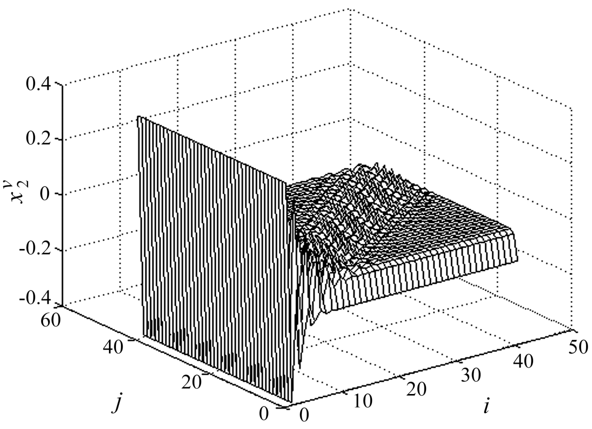

图 8 $\epsilon = 0.5$ 时水平分量 $\boldsymbol{x}_2$ 响应曲线

Fig. 8 Horizontal state $\boldsymbol{x}_2$ response at $\epsilon = 0.5$

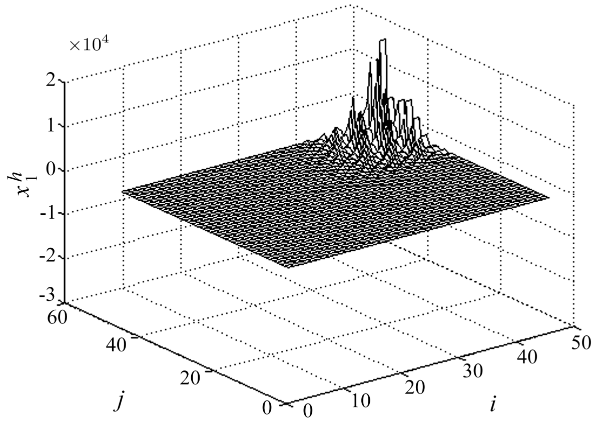

图 9 $\epsilon = 0.8$ 时垂直分量 $\boldsymbol{x}_1$ 响应曲线

Fig. 9 Perpendicular state $\boldsymbol{x}_1$ response at $\epsilon = 0.8$

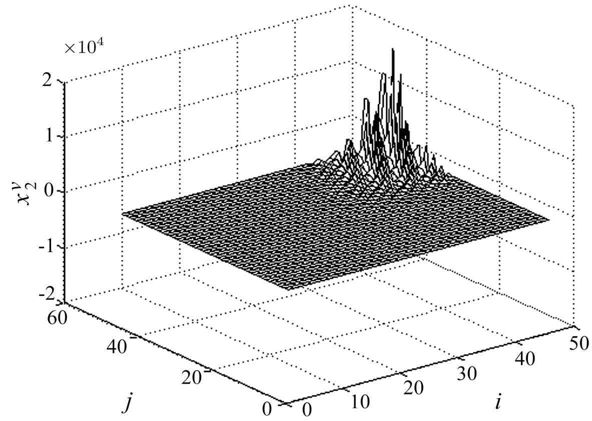

图 10 $\epsilon = 0.8$ 时水平分量 $\boldsymbol{x}_2$ 响应曲线

Fig. 10 Horizontal state $\boldsymbol{x}_2$ response at $\epsilon = 0.8$

系统稳定性随着 ϵ 的变大而变差. 仿真结果验证了定理 6 及其推论的正确性.

4 结论

本文讨论了离散奇异摄动系统的基本稳定性问题. 通过分析含有摄动参数的状态矩阵的特征值随摄动参数的变化规律, 找到了离散奇异摄动 1-D, 2-D 系统稳定的条件. 由于 2-D 系统本身模型的复杂性及其奇异摄动的特性, 使得问题分析比较困难, 在此仅仅得到了 2-D 系统稳定的充分条件, 对其相关问题有待进一步讨论.

References

1 Klimushev A I, Krasovskii N K. Uncertain asymptotic stability of systems of differential equations with a small parameter in the derivative terms. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1962, **25**(9): 1011~1025

2 Li T H S, Chiou J S, Kung F C. Stability bounds of singularly perturbed discrete systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(10): 1934∼1938

3 Hsiao F H, Pan S T, Teng C C. D-stability bound analysis for discrete multiparameter singularly perturbed systems. *IEEE Transactions on Circuit and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1997, **44**(4): 347∼351

4 Li T H S, Li J H. Stabilization bound of discrete two-time-scale systems. *System and Control Letters*, 1992, **18**: 479∼489

5 Ghosh R, Sen S, Datta K B. Method for evaluating stability bounds for discrete-time singularly perturbed systems. *IEE Proceedings Control Theory Application*, 1999, **146**(2): 227∼233

6 Vidyasagar M. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall Incomporation, 1978

7 Wilkinson J H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1965

8 Weljoson J H [written], Shi Zhong-Ci, Deng Jian-Xin [translate]. *Algebra Eigenvalues Problem*. Beijing: Science Press, 2001
(威尔金森 J H [著], 石钟慈, 邓健新 [译]. 代数特征值问题. 北京: 科学出版社, 2001)

9 Cai C X, Wang W Q, Zou Y. A note on the internal stability of 2-D singular discrete systems. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2004, **15**(2): 197∼204

10 Decarlo R A, Murray J, Saeks R. Multivariable Nyquist theory. *International Journal of Control*, 1977, **25**: 657∼675

11 Yang Cheng-Wu, Zou Yun. *2-D Linear Discrete System*. Beijing: National Defense and Industry Press, 1995
(杨成梧, 邹云. 2-D 线性离散系统. 北京: 国防工业出版社, 1995)

蔡晨晓　讲师, 2004 年获得南京理工大学自动化系控制理论控制工程工学博士学位, 主要研究方向为奇异摄动系统分析与综合. 本文通信作者.
E-mail: ccx5281@vip.163.com
(**CAI Chen-Xiao** Received her Ph. D. degree in automatic control engineering from Nanjing University of Science and Technology. Her research interest covers analysis and synthesis about singularly perturbed system. Corresponding author of this paper.)

邹　云　教授, 博士生导师, 美国国家数学学会会员, 美国数学评论评论员, 国务院学位委员会学科评议组成员, 近年主要从事广义系统鲁棒 H_∞ 控制, 2-D系统, 奇异摄动系统及其应用领域的研究. E-mail: zouyun@vip.163.com
(**ZOU Yun** Professor, life member of American Mathematical Society, reviewer of Mathematical Reviews, member of the Subject Evaluation Group of the Academic Degree Committee of the State Council. His research interest covers robust H_∞ control of singular system, 2-D system, and singularly perturbed system.)