

一种三对角结构非线性系统的稳定性 及其应用

刘斌¹ 张曾科¹

摘要 针对非线性系统的分析及综合问题, 提出了一种状态渐近稳定的三对角结构非线性系统, 并给出其应用 - 设计镇定控制器使原系统变换成该类三对角结构系统. 对移动机器人跟踪控制的仿真说明这种设计方法的有效性.

关键词 非线性系统, 三对角结构, 稳定性, 逆推控制
中图分类号 TP273

Stability of Nonlinear Systems with Tridiagonal Structure and Its Applications

LIU Bin ZHANG Zeng-Ke

Abstract A class of asymptotically stable nonlinear systems with a special tridiagonal structure is proposed for the purpose of designing controllers. If the origin system can be transformed into a system with special tridiagonal structure by controllers or some coordinates transformations, these controllers are the stabilizing controllers. The simulation of the mobile robot with tracking control shows the effectiveness of this method.

Key words Nonlinear systems, tridiagonal structure, stability, backstepping

1 引言

近年来针对下三角结构非线性系统发展出的逆推控制^[1](Backstepping) 得到人们广泛的研究和应用^[2~5]. 逆推控制的特点是针对特定下三角结构系统, 不用考虑系统的维数, 可以迭代构造虚拟控制器, 最终得到实际镇定控制器. 逆推方法与精确线性化方法相比, 它的优点是可以推广到不确定非线性系统的控制上^[6,7].

本文观察到逆推控制最终得到的系统是一种特定的三对角结构系统, 再利用三对角矩阵的相关结论^[8], 提出了一类渐近稳定的三对角结构非线性系统. 利用这种结构系统提出一种面向结构的非线性系统控制器设计方法. 该方法主要是通过坐标变换和控制器选择使待镇定系统变换为具有特定三对角结构的系统, 进而直接得到系统状态的渐近稳定性. 面向系统结构设计控制器的方法有两种: 1) 递推构造法, 对下三角结构系统借鉴逆推设计过程迭代构造出结构系统, 进而得到镇定控制器; 2) 直接构造法, 根据原系统的特点直接设计出满足结构要求的控制器. 递推构造法包括逆推控制, 其参数选择范围比逆推控制更宽. 直接构造法主要靠经验, 更适合设计低维系统的控制器. 通过直接法构造移动机器人的跟踪控制器, 仿真验证了此直接构造方法的有效性. 对比以前文献^[9]用逆推法得到的控制器, 直接构造法得到的控制器结构更简单.

收稿日期 2006-9-21 收修改稿日期 2007-1-4

Received September 21, 2006; in revised form January 4, 2007

1. 清华大学自动化系控制理论与技术研究所 北京 100084

1. Institute of Control Theory and Technology, Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084

DOI: 10.1360/aas-007-0442

2 预备知识

首先给出逆推控制的介绍, 为了简便, 这里考虑 2 维系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $x_i \in R$, $g_i \neq 0$, $i = 1, 2$. 逆推控制过程: 先把 x_2 视为虚拟控制器, 对 $\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2$ 设计镇定控制器

$$\alpha(x_1) = \frac{1}{g_1(x_1)}(-f_1(x_1) - k_1x_1)\quad (2)$$

其中 $k_1 > 0$. 实际上 x_2 是状态变量, 取变换 $z_2 = x_2 - \alpha(x_1)$, 得到的新系统形式如下

$$\dot{z} = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u - \dot{\alpha}(x_1)\quad (3)$$

设计实际控制器

$$u = \frac{1}{g_2(x_1, x_2)}(-f_2(x_1, x_2) - k_2z_2 - g_1(x_1)x_1 + \dot{\alpha}(x_1))\quad (4)$$

其中 $k_2 > 0$. 最终得到的系统形式如下

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & g_1(x_1) \\ -g_1(x_1) & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\quad (5)$$

可以用 $V = (x_1^2 + z_2^2)$ 作为李亚普诺夫函数来验证系统稳定性. 该设计过程可以推广到高维下三角结构系统, 对下三角结构系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)u \\ x_i &\in R, g_i(x_1, \dots, x_i) \neq 0 \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}\quad (6)$$

通过变换和控制器作用, 可以得到如下结构形式渐近稳定的系统

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -k_1 & l_1(\mathbf{z}) & & & \\ -l_1(\mathbf{z}) & -k_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & l_{n-1}(\mathbf{z}) \\ & & & & -l_{n-1}(\mathbf{z}) & -k_n \end{bmatrix} \mathbf{z}\quad (7)$$

其中, $k_i > 0$, $\mathbf{z} \in R^n$. 我们可以把逆推控制的目标认作是得到具有上述结构特征的系统. 此类系统是一种特殊的三对角结构系统, 下面将介绍矩阵论中一个关于三对角矩阵的结论:

结论 1^[8]. 对于矩阵 $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$, λ 是 A 的特征值, 如果满足

- 1) 当 $|i - j| > 1$ 时, $a_{ij} = 0$;
- 2) $a_{i+1, i}a_{i, i+1} < 0$, $i = 1, \dots, n - 1$.

则 $\min_{1 \leq i \leq n} a_{ii} \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$.

可见三对角实矩阵只要满足:

- 1) 非对角的、非零的对称元素乘积小于零;
- 2) 对角元素不大于零;
- 3) 其特征值实部的取值范围保证非正.

该矩阵就一定是稳定的.

可以考虑是否非线性系统也具有这样的性质, 下面将介绍主要结果.

3 三对角结构系统的稳定性

借鉴逆推闭环控制得到的系统形式, 我们得到如下定理:

定理 1. 对于三对角结构非线性系统 (7), 其状态是全局渐近稳定的.

证明. 取正定函数 $V = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}$, 可以验证 $\dot{V} = -\sum_{i=1}^n k_i z_i^2$, 故 V 是李亚普诺夫函数, 得证. \square

借鉴三对角矩阵的结论, 我们推广定理 1 得到如下定理:

定理 2. 三对角结构非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -k_1 & g_1(\mathbf{x}) & & & \\ -c_1 g_1(\mathbf{x}) & -k_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -c_{n-1} g_{n-1}(\mathbf{x}) & -k_n \end{bmatrix} \mathbf{x}\quad (8)$$

其中, $\mathbf{x} \in R^n$. 系统状态 \mathbf{x} 是全局渐近稳定的, 其中 $c_i, k_i \in R^+$, $i = 1, \dots, n$.

证明. 取 $\mathbf{z} = \Lambda^{-1} \mathbf{x}$, $l_i(\mathbf{z}) = \sqrt{c_i} g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, n - 1$, 其中

$$\begin{aligned}\Lambda &= \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_n\} \\ d_1 &= 1, d_2 = \sqrt{c_1}, d_i = \sqrt{c_{i-1}} d_{i-1}, i = 2, \dots, n\end{aligned}\quad (9)$$

则可以得到式 (7), 由定理 1 可知系统 (7) 状态 \mathbf{z} 全局渐近稳定, 故系统 (8) 状态 \mathbf{x} 全局渐近稳定. \square

定理 3. 对于三对角结构非线性系统 (26)(见下页底部), 其中 $\mathbf{x} \in R^n$, $c_{\max} > c_i(t) > c_{\min} > 0$, $k_i \in R^+$, $i = 1, \dots, n$. 如果满足

$$\frac{d}{dt} \left(\prod_{i=1}^j c_i(t) \right) + k_j \prod_{i=1}^j c_i(t) > 0\quad (10)$$

则系统状态 \mathbf{x} 是渐近稳定的.

证明. 取 Λ 如下定义,

$$\begin{aligned}\Lambda &= \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_n\} \\ d_1 &= 1, d_2 = \sqrt{c_1(t)}, d_i = \sqrt{c_{i-1}(t)} d_{i-1}, i = 2, \dots, n\end{aligned}\quad (11)$$

则可以验证

$$\dot{\Lambda} = \Lambda A_1 \Lambda^{-1}\quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} -k_1 & l_1 & & & \\ -l_1 & -k_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & l_{n-1} \\ & & & & -l_{n-1} & -k_n \end{bmatrix} \\ l_i &= \sqrt{c_i} g_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}\quad (13)$$

取正定函数 $V = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$, 其中 P 如下定义

$$P = \Lambda^{-2}\quad (14)$$

则 $V \geq \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{x}$, 其中 $\alpha = \min\{1, c_{\min}^{-2(n-1)}\}$. 对 V 求时间导数得到

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \mathbf{x}^T (PA + A^T P + \dot{P}) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\Lambda^{-2} \Lambda A_1 \Lambda^{-1} + \Lambda^{-1} A_1^T \Lambda \Lambda^{-2}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T (\dot{P}) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \Lambda^{-1} (A_1 + A_1^T) \Lambda^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T (\dot{P}) \mathbf{x}\end{aligned}\quad (15)$$

由式 (13) 可得

$$A_1 + A_1^T = A_1 = \text{diag} \{-2k_1, \dots, -2k_n\} \quad (16)$$

将式 (16) 代入式 (15), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{x}^T \Lambda^{-1} A_1 \Lambda^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T (\dot{P}) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (A_1 P + \dot{P}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (17)$$

可知 $A_1 P + \dot{P}$ 是对角阵, 第 i 个对角元素为 $-2k_i d_i^{-2} + \frac{d}{dt} (d_i^{-2})$. 根据式 (10) 和式 (11), 可以得到

$$-2k_i d_i^{-2} + \frac{d}{dt} (d_i^{-2}) < 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (17), 可得 \dot{V} 负定, 故系统状态全局渐近稳定. \square

定理 4. 对于三对角结构非线性系统 (27)(见本页底部), 其中, $\mathbf{x} \in R^n, c_{\max} > c_i(\mathbf{x}) > c_{\min} > 0, k_i(\mathbf{x}) \in R^+, i = 1, \dots, n$. 如果满足

$$\frac{d}{dt} \left(\prod_{i=1}^j c_i(\mathbf{x}) \right) + k_j(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^j c_i(\mathbf{x}) > 0 \quad (19)$$

则系统状态是渐近稳定的.

证明. 同定理 3. \square

结合不变集定理, 可以把定理 1~4 的条件放宽到 $k_j \in R^+, k_i \notin R^-, i \neq j, j \in \{1, \dots, n\}$, 这点将在应用中给出说明.

4 面向结构的设计方法

前一节关于一类三对角结构系统稳定性方面的结论, 可以用来设计非线性系统的镇定控制器, 使待设计的系统的结构形式如特定三对角结构系统. 这种面向结构的控制器设计方法有两种: 一种是逆推构造法, 对上三角结构系统采用逆推设计过程, 得到的最终系统就是一个三对角结构系统, 类似于式 (7) 或 (8); 另一种是直接构造法, 对比原系统系数矩阵, 设计控制器使系统化化为三对角结构系统.

对于系统 (1), 逆推构造三对角结构系统和逆推控制的设计过程一样, 利用三对角结构得到的控制器如下

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{g_2(x_1, x_2)} (-f_2(x_1, x_2) - k_2 z_2 - c_{g_1}(x_1) x_1 + \dot{\alpha}(x_1)) \\ k_2, c > 0 \end{aligned} \quad (20)$$

可见逆推构造法包括了逆推控制, 具有更多的可调参数, 也可以从式 (7) 和式 (8) 的结构特点中得出这个结论.

直接构造法主要靠经验, 更适合设计低维系统的控制器. 下面就移动机器人跟踪控制应用直接构造法, 并且和利用逆推控制 (递推构造法的特例) 得到的控制器相比较.

例: 考虑 [9] 中的移动机器人运动跟踪误差模型

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= w y_e - v + v_r \cos \theta_e \\ \dot{y}_e &= -w x_e + v_r \sin \theta_e \\ \dot{\theta}_e &= w_r - w \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $[x_e, y_e, \theta_e]^T \in R^3$ 为系统的状态, $w_r, v_r \in R$ 为已知常数, $w, v \in R$ 为控制输入. 控制器设计的目标是使状态渐近稳定到原点.

方法 1 (直接构造法).

对其结构分析可以得到

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w & 0 \\ -w & 0 & v_r \frac{\sin \theta_e}{\theta_e} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v + v_r \cos \theta_e \\ 0 \\ w_r - w \end{bmatrix} \quad (22)$$

对照 (7) 中系统的结构, 可以看出在系数矩阵 (1,1)(2,2)(3,2)(3,3) 位置上需要补充, 即控制器需要满足

$$\begin{bmatrix} -v + v_r \cos \theta_e \\ 0 \\ w_r - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 x_e \\ -k_2 y_e \\ -k_3 \theta_e - c_2 v_r \sin \theta_e / \theta_e y_e \end{bmatrix} \quad (23)$$

得到可行解 $k_2 = 0, k_1, k_3 > 0$,

$$\begin{aligned} w &= \begin{cases} w_r + k_3 \theta_e + c_2 v_r \frac{\sin \theta_e}{\theta_e} y_e, & \theta_e \neq 0 \\ w_r + k_3 \theta_e + c_2 v_r y_e, & \theta_e = 0 \end{cases} \\ v &= v_r \cos \theta_e + k_1 x_e, \quad k_1, k_3, c_2 > 0 \end{aligned} \quad (24)$$

此时系统化为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_1 & w & \\ -w & & v_r \frac{\sin \theta_e}{\theta_e} \\ & -c_2 v_r \frac{\sin \theta_e}{\theta_e} & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -k_1 & g_1(\mathbf{x}) & & & \\ -c_1(t) g_1(\mathbf{x}) & -k_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & g_{n-1}(\mathbf{x}) \\ & & & -c_{n-1}(t) g_{n-1}(\mathbf{x}) & -k_n \end{bmatrix} \mathbf{x} = A\mathbf{x} \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -k_1 & g_1(\mathbf{x}) & & & \\ -c_1(\mathbf{x}) g_1(\mathbf{x}) & -k_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & g_{n-1}(\mathbf{x}) \\ & & & -c_{n-1}(\mathbf{x}) g_{n-1}(\mathbf{x}) & -k_n \end{bmatrix} \mathbf{x} = A\mathbf{x} \quad (27)$$

由于 $k_2 = 0$, 不能直接得到系统全部状态的渐近稳定性, 只能保证 x_e, θ_e 渐近稳定. 结合不变集定理, 可知当 $x_e = \theta_e = 0$ 时, 不变集动态满足

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_1 & w_r + v_r \\ -(w_r + v_r) & v_r \\ -v_r & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \\ &= A_1 \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

此时, 可以知道当 $v_r, w_r + v_r$ 不同时为零时, A_1 的特征根实部为负, 即不变集只能稳定在原点. 当 $w_r = 0 \text{ m/s}, v_r = 1 \text{ m/s}, k_1 = k_3 = c_1 = 1$ 时, 闭环系统仿真如图 1.

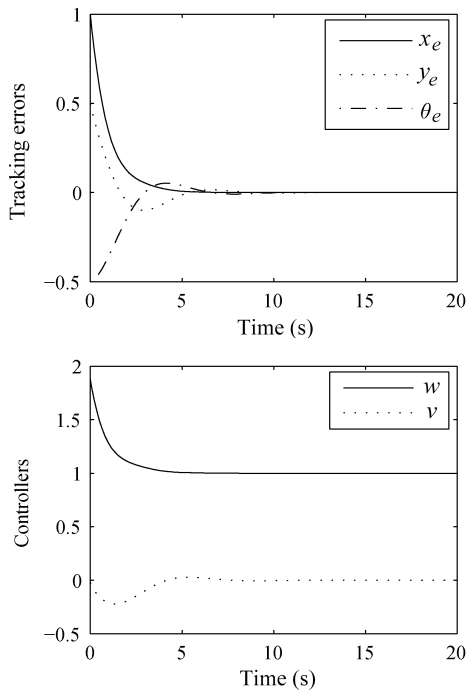


图 1 移动机器人运动跟踪误差状态及控制曲线
Fig. 1 Tracking error and controllers of mobile robots

从图 1 中可看到在控制器作用下, 闭环系统状态渐近稳定到零点, 达到控制目的.

方法 2 (逆推控制^[6]).

利用逆推控制得到控制器如下

$$v = v_r \cos \theta_e + k_1 x_e \quad (29)$$

$$w = [1 + \varphi'(y_e v_r) x_e v_r]^{-1} [\gamma \eta y_e v_r + w_r + k_2 \gamma \bar{\theta}_e + \varphi'(y_e v_r) (v_r^2 \sin \theta_e + y_e \dot{v}_r)] \quad (30)$$

其中 $k_1, k_2, \gamma, \eta > 0$,

$$\varphi(z) = \frac{\delta z}{1 + z^2}, 0 < \delta < 2(\pi - \varepsilon), \varepsilon > 0 \quad (31)$$

此时在控制效果大致一样的情况下, 与逆推控制相比, 用直接构造法设计的控制器结构更简单.

5 结论

本文提出了一类三对角结构系统, 该类系统可以保证系统状态的渐近稳定性. 利用此类结构系统作为设计非线性系统的镇定控制器的目标, 使原系统变换到此类三对角结构系统. 这种面向结构的控制器设计方法既可以借鉴逆推控制对下三角结构系统通过递推构造出三对角结构系统, 也可以根据原系统的特点直接构造新系统. 逆推控制可以看作是一种特殊的三对角结构系统构造方法. 递推构造三对角结构系统的可调参数个数多于逆推控制, 而直接构造法可以简化设计过程. 仿真说明直接构造法可以构造出结构简单的控制器. 逆推控制的相关结论 (自适应控制、鲁棒控制) 如何推广到三对角结构系统有待进一步研究.

References

- 1 Tsinias J. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1989, **2**(4): 343~357
- 2 Zhou J, Wang Y. Real-time nonlinear adaptive backstepping speed control for a PM synchronous motor. *Control Engineering Practice*, 2005, **13**(10): 1259~1269
- 3 Harb A M, Harb B A. Controlling chaos in Josephson-Junction using nonlinear backstepping controller. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2006, **16**(4): 1988~1998
- 4 Mazenc F, Bliman P A. Backstepping design for time-delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(1): 149~154
- 5 Yassen M T. Controlling, synchronization and tracking chaotic Liu system using active backstepping design. *Physics Letters A*, 2007, **360**(4-5): 582~587
- 6 Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(11): 1241~1253
- 7 Freeman R, Kokotovic P V. Backstepping design of robust controllers for a class of nonlinear system. In: *Proceedings of the IFAC nonlinear systems design symposium*. Oxford: Pergamon Press, 1992. 307~312
- 8 Horn R A, Johnson C R. *Topic in Matrix Analysis*. Beijing: Posts & Telecom Press. 2005. 2~3
- 9 Jiang Z P, Nijmeijer H. Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping. *Automatica*, 1997, **33**(7): 1393~1399

刘 斌 清华大学自动化系博士研究生. 主要研究方向为基于系统结构的非线性控制. 本文通信作者.

E-mail: b-liu02@mails.tsinghua.edu.cn

(LIU Bin Ph. D. candidate at Department of Automation, Tsinghua University. His research interest covers nonlinear control based on structure analysis. Corresponding author of this paper.)

张曾科 清华大学自动化系教授. 主要研究方向为模糊控制和运动控制. E-mail: zzk@mail.tsinghua.edu.cn

(ZHANG Zeng-Ke Professor at Department of Automation, Tsinghua University. His research interest covers motion control and fuzzy control.)