第 33 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 33, No. 4
2007 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　April, 2007

离散时间 MIMO 系统极限零点的稳定性

梁 山 [1]　石飞光章 [2]　石为人 [1]　鲜晓东 [1]

摘 要　不稳定零点限制了系统可达到的控制性能, 当采用 ZOH 对一个连续系统进行离散化, 零点的稳定性不能得到保证. 针对无限初等因子次数为 2 或 3 时, MIMO 系统极限零点的渐近特性和稳定条件不确知问题, 分析了在 ZOH 条件下, 当采样周期 $T \to 0$ 时离散时间系统极限零点的渐近特性, 推导出了关于极限零点稳定性的线性近似公式和保证极限零点稳定的条件, 并给出了详细的证明. 所给出的定理是对 Ishitobi 定理的进一步扩展.

关键词　极限零点, 稳定性, 离散时间系统, MIMO
中图分类号　TP13

On Stability of the Limiting Zeros of Discrete-time MIMO Systems

LIANG Shan[1]　ISHITOBI Mitsuaki[2]　SHI Wei-Ren[1]　XIAN Xiao-Dong[1]

Abstract　Unstable zeros limit the achievable control performance. When a continuous-time system is discretized using the zero-order hold, the stability of zeros cannot be reserved. This paper analyzes the asymptotic properties of the limiting zeros of discrete-time system corresponding to continuous-time MIMO plants with the degrees of infinite elementary divisors being two or three. The linear approximate expressions with respect to the asymptotic behavior of the limiting zeros are given. The conditions that ensure the stability of the limiting zeros of discrete-time systems for sufficiently small sampling periods are derived and proved in detail. It is a further extension of Ishitobi′s result.

Key words　Limiting zeros, stability, discrete-time system, MIMO

1　引言

众所周知, 不稳定零点限制了控制系统可达到的控制性能. 当过程或对象存在不稳定零点时, 很难构建一些控制系统, 如逆系统、鲁棒控制器、模型匹配系统和模型参考自适应控制器等[1~3]. 当采用 ZOH 对一个连续时间系统进行离散化, 稳定的极点被映射到单位圆内, 从而保证了系统的稳定性. 然而相对于零点, 连续系统与其相应的离散系统之间却不存在如此简单的对应关系. 由于离散时间零点是采样时间 T 的函数, 推导出这种描述关系是相当困难的. 只有在某些特殊情况下, 如 $T \to 0$ 或 $T \to \infty$, 才有可能对零点特性作出描述. 当 $T \to 0$ 时离散时间系统的零点被称为极限零点 (Limiting zeros). 从控制工程的观点出发, 足够小的 T 是人们所期望和关心的. 因此关于极限零点特性的研究引起了研究者广泛注意[4~7].

该问题最早由著名的瑞典学者 Åström 提出[4], 其后学者们进行了大量的研究[4~9], 阐述了离散系统零点的特性及一些保持稳定性的条件. 由于 MIMO 系统零点的复杂性, 学者们的研究工作主要针对 SISO 系统.

MIMO 系统的零点特性可由系统矩阵的无限初等因子次数 (Degrees of the infinite elementary divisors) $\mu_1, \dots, \mu_m$ $(2 \le \mu_1 \le \cdots \le \mu_m)$[10] 来刻画. Åström 等的结论[4] 对于最大最小无限初等因子次数之差小于 $2(\mu_m - \mu_1 < 2)$ 的正方系统是成立的[11], 该结论也可直接用于解耦 MIMO 系统[12]. 由文献 [11] 可知, 对于无限初等因子次数为 2 且所有零点均稳定的连续时间系统, 相应的离散时间系统的极限零点是稳定的. 文献 [13] 仅针对一类无限初等因子次数为 $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-1} = 2$ 和 $\mu_m = 3$ 的连续时间系统, 分析了其相应的离散时间系统极限零点的渐近特性和稳定性. 但对于更一般的情况, 如无限初等因子次数为 $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-k} = 2$, $\mu_{m-k+1} = \cdots = \mu_m = 3$ $(0 \le k \le m-1)$ 或 $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 3$ $(k = m)$, 极限零点的渐近特性和稳定性仍是不确知的.

本文针对上述问题, 分析当 $T \to 0$ 时, 离散时间零点的渐近特性, 推导关于极限零点稳定性的线性近似公式和保证极限零点稳定的条件, 并给出相应证明.

2　离散时间 MIMO 系统的极限零点

考虑一个时不变, 能控能观测的 m 输入 m 输出 n 阶线性系统, 并可表示为

$$S_C : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t) \end{cases} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{u}(t) \in R^m$ 和 $\boldsymbol{y}(t) \in R^m$ 分别是输入和输出, $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$ 是状态向量. 则经 ZOH 采样离散化后的离散时间 MIMO 系统可表示为

$$S_D : \begin{cases} \boldsymbol{x}((k+1)T) &= \Phi\boldsymbol{x}(kT) + \Gamma\boldsymbol{u}(kT) \\ \boldsymbol{y}(kT) &= C\boldsymbol{x}(kT) \end{cases} \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{x}(kT) \in R^n$, $\boldsymbol{u}(kT) \in R^m$, $\boldsymbol{y}(kT) \in R^m$ 且

$$\Phi = e^{AT}, \quad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau}\mathrm{d}\tau B \tag{3}$$

在 S_C (1) 的假设条件下, 系统零点 (System zeros)、传递零点 (Transmission zeros) 和不变零点 (Invariant zeros) 的定义是一致的[14, 15]. 因此文中将这些零点简单地称为 S_C 的零点. 这些零点是 $\det N(s) = 0$ 的根, 其中 $N(s)$ 为 S_C 的系统矩阵[16], 定义为

$$N(s) = \begin{bmatrix} A - sI_n & B \\ C & O_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

对足够小的 T, S_D 的零点具有与 S_C 的零点相同的特性[11, 16]. 因此, S_D 的零点同样可表示为 $\det N_d(z) = 0$ 的根, 其中

$$N_d(z) = \begin{bmatrix} \Phi - zI_n & \Gamma \\ C & O_m \end{bmatrix} \tag{5}$$

收稿日期 2005-10-13　收修改稿日期 2006-5-23
Received October 13, 2005; in revised form May 23, 2006
国家自然科学基金 (60574003), 教育部留学回国人员科研启动基金, 重庆市自然科学基金 (CSTC2005BB2020) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60574003), The Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, State Education Ministry, and Natural Science Foundation of Chongqing (CSTC2005BB2020)
1. 重庆大学自动化学院 重庆 400044　2. 日本国熊本大学大学院 熊本 860-8555 日本
1. College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044　2. Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University, Kumamoto 860-8555, Japan
DOI: 10.1360/aas-007-0439

如果连续时间系统 S_C 的传递函数 $G(s)$ 分别有 $R_e(s) < 0$ 或 $R_e(s) > 0$ 的零点, 则分别称其为稳定零点或不稳定零点; 离散时间系统 S_D 的脉冲传递函数 $H(z)$ 分别有 $|z| < 1$ 或 $|z| > 1$ 的零点, 则分别称其为稳定零点或不稳定零点.

ZOH 条件下, 当 T 足够小, 离散时间 MIMO 系统的极限零点特性可由以下定理来描述.

Hayakawa 定理[11]**.** 考虑系统 $S_C(1)$ 及其相应的离散化模型 $S_D(2)$. 如果 S_C 有 r 个零点且最大最小无限初等因子次数之差小于 2, 即 $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-k} = \mu$ 和 $\mu_{m-k+1} = \cdots = \mu_m = \mu + 1$ $(1 \leq k \leq m)$, 则 S_D 有 $n-m$ 个极限零点, $n-m$ 个极限零点中有 r 个极限零点位于 $z = 1$, 其余的 $n-m-r$ 个零点是多项式 $B_{\mu}^{k}(z)B_{\mu-1}^{m-k}(z) = 0$ 的根.

文献 [17] 将 r 个极限零点称为真性零点 (Intrinsic zeros), $n-m-r$ 个极限零点称为离散化零点 (Discretization zeros). 根据 Hayakawa 定理, 当 S_C 的无限初等因子次数是 $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 2$, 如果 S_C 的 $n-m$ 个零点全部稳定, 则对足够小的 T, S_D 的所有零点为真性零点, 且均是稳定的; 当 S_C 的无限初等因子次数为 2 或 3, 比如, $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-k} = 2$ 和 $\mu_{m-k+1} = \cdots = \mu_m = 3$ $(1 \leq k \leq m)$, S_D的极限零点位于单位圆上.

文献 [13] 对一类具有 $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-1} = 2$ 和 $\mu_m = 3$ 的系统分析表明, S_D 有 $n-m-1$ 个真性零点和 1 个离散化零点. 当 $T \to 0$, 离散化零点趋近于 $z = -1$. 保证离散化零点从单位圆内趋近 $z = -1$ 的充分条件由如下 Ishitobi 定理描述.

Ishitobi 定理. 考虑系统 S_C (1) 及其相应的 ZOH 离散化模型 $S_D(2)$. 对于无限初等因子次数为 $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-1} = 2$ 和 $\mu_m = 3$ 的 S_C, 如果 S_C 的 $n-m-1$ 个零点稳定, 且 $\left(\boldsymbol{\ell}_{12}^{T}CA^2B\boldsymbol{r}_{12}\right)\left(\boldsymbol{\ell}_{12}^{T}CAB\boldsymbol{r}_{12}\right) < 0$, 其中 $\boldsymbol{\ell}_{12}$ 和 $\boldsymbol{r}_{12}$ 分别是 $m \times m$ 维非奇异矩阵 $L_1 = [L_{11}, \boldsymbol{\ell}_{12}]$ 和 $R_1 = [R_{11}, \boldsymbol{r}_{12}]$ 的最后一列列矢量, L_1 与 R_1 满足关系 $L_1^T CBR_1 = \begin{bmatrix} I_{m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$, 则对足够小的 T, S_D 的极限零点是稳定的.

3 极限零点的稳定性

考虑一个有 r_i $(i = 1, \ldots, n-m-k)$ 个零点的 MIMO 系统 S_C , S_C 的零点与 S_D 的零点间的关系可由下面的定理来描述.

定理 1. Case (a). $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-k} = 2$, $\mu_{m-k+1} = \cdots = \mu_m = 3$ $(1 \leq k \leq m-1)$.

S_D 有 $n-m-k$ 个真性零点 z_i $(i = 1, \ldots, n-m-k)$ 和 k 个离散化零点 $z_{n-m-k+i}$ $(i = 1, \ldots, k)$. 真性零点 z_i $(i = 1, \ldots, n-m-k)$ 有关系

$$z_i = 1 + r_i T + O(T^2) \tag{6}$$

其余的离散化零点 $z_{n-m-k+i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ 可表示为

$$z_i = -1 - \frac{\lambda_i\{\Theta_2 {\Theta_1}^{-1}\}T}{3} + O(T^2) \tag{7}$$

式中 $\Theta_2 = H_{1B}CA^2BG_{1R}$, $\Theta_1 = H_{1B}CABG_{1R}$, $\lambda_i\{\cdot\}$ 记为矩阵的特征值, H_{1B} 和 G_{1R} 是 $m \times m$ 维非奇异矩阵 $H_1 = \begin{bmatrix} H_{1T} \\ H_{1B} \end{bmatrix}$, $G_1 = \begin{bmatrix} G_{1L} & G_{1R} \end{bmatrix}$ 的子矩阵, H_1 和 G_1 满足关系式 $H_1 CBG_1 = \begin{bmatrix} I_{m-k} & O \\ O & O_k \end{bmatrix}$, 其中 H_{1T}, H_{1B}, G_{L1} 和 G_{1R} 维数分别为 $(m-k) \times m$, $k \times m$, $m \times (m-k)$ 和 $m \times k$.

Case (b). $k = m$, $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 3$.

在 S_D 的零点中有 $n-2m$ 个真性零点和 m 个离散化零点, 真性零点 z_i $(i = 1, \ldots, n-2m)$ 可表示为

$$z_i = 1 + r_i T + O(T^2) \tag{8}$$

离散化零点 z_{n-2m+i} $(i = 1, \ldots, m)$ 可表示为

$$z_i = -1 - \frac{\lambda_i\{\Theta_{02} {\Theta_{01}}^{-1}\}T}{3} + O(T^2) \tag{9}$$

式中 $\Theta_{02} = CA^2B$ 和 $\Theta_{01} = CAB$.

证明. 当 S_C (1) 的系统矩阵 $N(s)(4)$ 的无限初等因子次数为 $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-k} = 2$, $\mu_{m-k+1} = \cdots = \mu_m = 3$ $(1 \leq k \leq m-1)$, 存在非奇异矩阵 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ O & P_{22} \end{bmatrix}$ 和 $Q = \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} & O \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$ 将 $N(s)$ 转换为 $\widehat{N}(s) = PN(s)Q = \begin{bmatrix} \widehat{A} - sI_n & \widehat{B} \\ \widehat{C} & O_m \end{bmatrix}$, 其中 $P_{11}, P_{12}, P_{22}, Q_{21}, Q_{22}$ 分别是 $n \times n$, $n \times m$, $m \times m$, $m \times n$ 和 $m \times m$ 维矩阵,

$$\widehat{A} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} O_{m-k} & O_{(m-k)\times 2k} \\ \hline O_{2k\times(m-k)} & \begin{array}{c|c} O_k & I_k \\ \hline O_k & O_k \end{array} \end{array} & O_{(m+k)\times(n-m-k)} \\ \hline O_{(n-m-k)\times(m+k)} & A_f \end{array}\right]$$

$$\widehat{B} = \left[\begin{array}{c} \begin{array}{c|c} I_{m-k} & O_{(m-k)\times k} \\ \hline O_{2k\times(m-k)} & \begin{array}{c} O_k \\ \hline I_k \end{array} \end{array} \\ \hline O_{(n-m-k)\times m} \end{array}\right]$$

$$\widehat{C} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} I_{m-k} & O_{(m-k)\times 2k} \\ \hline O_{k\times(m-k)} & \begin{array}{c|c} I_k & O_k \end{array} \end{array} & O_{m\times(n-m-k)} \end{array}\right]$$

通过 P 和 Q 矩阵计算不改变零点的值, A_f 的特征根与 S_C 的零点是一致的.

对离散时间系统矩阵 $N_d(z)(5)$, 存在矩阵 [11] $\widetilde{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & O \\ O & P_{22} \end{bmatrix}$ 和 $\widetilde{Q} = \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} & O \\ O & Q_{22} \end{bmatrix}$ 将 $N_d(z)$ 转换为 $\widetilde{N}_d(z) = \widetilde{P}N_d(z)\widetilde{Q}$, 其中 P_{11}, P_{22} 和 Q_{22} 分别是 P 和 Q 的子矩阵. 由文献 [11] 可知,

$$\widetilde{N}_d(z) = \begin{bmatrix} \widetilde{\Phi} - zI_n & \widetilde{\Gamma} \\ \widetilde{C} & O \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中 $\widetilde{\Phi} = e^{\widetilde{A}T}$, $\widetilde{\Gamma} = \int_0^T e^{\widetilde{A}\tau}\widehat{B}\mathrm{d}\tau$, $\widetilde{C} = \widehat{C}$, $\widetilde{A} = P_{11}AP_{11}^{-1}$. 同样, 通过 $\widetilde{P}$ 和 $\widetilde{Q}$ 矩阵计算不改变 $N_d(z)$ 的零点. 因此, 可将矩阵 $\widetilde{A}$ 表示为如下块矩阵形式

$$\widetilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m-k & k & k & n-m-k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} & \widetilde{A}_{13} & \widetilde{A}_{14} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} & I_k & O \\ \widetilde{A}_{31} & \widetilde{A}_{32} & O_k & \widetilde{A}_{34} \\ \widetilde{A}_{41} & \widetilde{A}_{42} & O & A_f \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} m-k \\ k \\ k \\ n-m-k \end{array} \tag{11}$$

式中 $\widetilde{A}_{ij}$ 是常数矩阵.

进一步, 定义 $\bar{N}_d(z) = \widetilde{U}\widetilde{N}_d(z)\widetilde{V}$, 其中 $\widetilde{U} = $ block-diag $(V^{-1},\ U)$, $\widetilde{V} = $ block-diag $(V,\ T^{-1}I_m)$, $V = $ block-diag $(I_{m-k},\ TI_k,\ I_{n-m})$, $U = $ block-diag $(I_{m-k},\ T^{-1}I_k)$. 则有[11]

$$\bar{N}_d(z) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi} - zI_n & \bar{\Gamma} \\ \bar{C} & O_m \end{bmatrix} \tag{12}$$

式中

$$\bar{\Phi} = e^{\bar{A}}, \quad \bar{\Gamma} = \int_0^1 e^{\bar{A}t}\widehat{B}\mathrm{d}t, \quad \bar{C} = \widehat{C} \tag{13}$$

$$\bar{A} = V^{-1}\widetilde{A}VT = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11}T & \widetilde{A}_{12}T^2 & \widetilde{A}_{13}T & \widetilde{A}_{14}T \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22}T & I_k & O \\ \widetilde{A}_{31}T & \widetilde{A}_{32}T^2 & O_k & \widetilde{A}_{34}T \\ \widetilde{A}_{41}T & \widetilde{A}_{42}T^3 & O & A_fT \end{bmatrix} \tag{14}$$

对足够小的 T, 按 T 的一阶项对 $\bar{A}$ 近似扩展, 那么 $\bar{A}$ 可表示为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11}T & O & \widetilde{A}_{13}T & \widetilde{A}_{14}T \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22}T & I_k & O \\ \widetilde{A}_{31}T & O & O_k & \widetilde{A}_{34}T \\ \widetilde{A}_{41}T & O & O & A_fT \end{bmatrix} + \left[O\left(T^2\right)\right] \tag{15}$$

(15) 的自乘积有

$$\bar{A}^2 = \begin{bmatrix} O & O & O & O \\ \widetilde{A}_{2,21}T & O_k & \widetilde{A}_{2,23}T & \widetilde{A}_{2,24}T \\ O & O_k & O_k & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} + \left[O\left(T^2\right)\right] \tag{16}$$

$$\bar{A}^3 = \left[O\left(T^2\right)\right] \tag{17}$$

式中 $\widetilde{A}_{2,21} = \widetilde{A}_{21}\widetilde{A}_{11} + \widetilde{A}_{22}\widetilde{A}_{21} + \bar{A}_{31}$, $\quad \widetilde{A}_{2,23} = \widetilde{A}_{21}\widetilde{A}_{13} + \widetilde{A}_{22}$, $\quad \widetilde{A}_{2,24} = \widetilde{A}_{21}\widetilde{A}_{14} + \widetilde{A}_{34}$. 那么, (13) 可表述为

$$\bar{\Phi} = I_n + \bar{A} + \frac{1}{2!}\bar{A}^2 + \left[O\left(T^2\right)\right] \tag{18}$$

$$\bar{\Gamma} = \left(I_n + \frac{1}{2}\bar{A} + \frac{1}{6}\bar{A}^2\right)\widehat{B} + \left[O\left(T^2\right)\right] \tag{19}$$

将 (18) 和 (19) 代入 (12) 有

$$\det \bar{N}_d(z) = \alpha \det\left\{(1-z)I_{n-m-k} + A_fT\right\} \times \det\left\{(1+z)I_k + \frac{1}{3}\widetilde{A}_{2,23}T\right\} + O\left(T^2\right) \tag{20}$$

式中 α 是一个常数.

记等式 $\det\left\{(1-z)I_{n-m-k} + A_fT\right\} = 0$, 即 $\det\left\{\left(\frac{z-1}{T}\right)I_{n-m-k} - A_f\right\} = 0$ 的根为 $z_i (i = 1, \dots, n-m-k)$. S_C 的零点记为 $s_i\ (i = 1, \dots, n-m-k)$, 由于关系式 $\det(s_iI_{n-m-k} - A_f) = 0\ (i = 1, \dots, n-m-k)$ 成立, 有 $s_i = (z_i - 1)/T\ \ (i = 1, \dots, n-m-k)$. 因此, S_D 的 $n-m-k$ 个零点 $z_i\ (i = 1, \dots, n-m-k)$ 可表述为式 (6).

记剩余的 k 个零点 $z_i\ (i = 1, \dots, k)$ 为

$$\det\left\{(1+z)I_k + \frac{1}{3}\widetilde{A}_{2,23}T\right\} = 0, \quad i = 1, \dots, k \tag{21}$$

的根,

$$z_i = -1 - \frac{1}{3}x_iT + O\left(T^2\right), \quad x_i \in \mathrm{C} \tag{22}$$

将 (22) 代入 (21) 可得 $\det\left\{\widetilde{A}_{2,23} - x_iI_k\right\} = 0$. 明显地, x_i 是矩阵

$$\widetilde{A}_{2,23} = \left(H_{1B}CA^2BG_{1R}\right)\left(H_{1B}CABG_{1R}\right)^{-1} \tag{23}$$

的特征根. Case (a) 得证.

Case (b) 同理得证. □

由定理 1 可知, 当 T 足够小, $n-m-k\ (1 \le k \le m)$ 个真性零点 $z_i\ (i = 1, \dots, n-m-k)$ 收敛于 $z = 1$, 剩余的 k 个离散化零点收敛于 $z = -1$. 离散化零点的稳定条件可描述如下.

定理 2. 假定 S_C 在虚轴上无零点存在.

Case (a). $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-k} = 2$, $\mu_{m-k+1} = \cdots = \mu_m = 3\ (1 \le k \le m-1)$.

如果 S_C 的 $(n-m-k)$ 个零点是稳定的且

$$\Re\left[\lambda_i\left\{\Theta_2{\Theta_1}^{-1}\right\}\right] < 0, \quad i = 1, \dots, k \tag{24}$$

成立, 则对足够小的 T, S_D 的所有零点均严格地位于单位圆内.

Case (b). $k = m$, $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 3$.

如果 S_C 的 $(n-2m)$ 零点是稳定的且

$$\Re\left[\lambda_i\left\{\Theta_{02}{\Theta_{01}}^{-1}\right\}\right] < 0, \quad i = 1, \dots, m \tag{25}$$

成立, 则对足够小的 T, S_D 的所有零点均严格地位于单位圆内.

证明. 由 (7) 和 (9) 立即得证. □

4　结论

针对无限初等因子次数为 2 或 3 的 MIMO 系统, 研究了极限零点的稳定性. 推导出了关于极限零点稳定性的线性近似公式和保证极限零点稳定的条件. 研究证明, 对无限初等因子次数为 $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-k} = 2$ 和 $\mu_{m-k+1} = \cdots = \mu_m = 3\ (0 \le k \le m-1)$ 的系统, 如 S_C 的零点稳定且 $\Re\left[\lambda_i\left\{\Theta_2{\Theta_1}^{-1}\right\}\right] < 0$, 则离散时间零点是稳定的; 对无限初等因子次数为 $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 3\ (k = m)$ 的系统, 如 S_C 的零点稳定且 $\Re\left[\lambda_i\left\{\Theta_{02}{\Theta_{01}}^{-1}\right\}\right] < 0$, 则离散时间零点是稳定的. 该结论是对 Ishitobi 定理[13] 的进一步自然扩展.

References

1 Clarke D W. Self-tuning control of nonminimum-phase systems. *Automatica*, 1984, **20**(3): 501∼517

2 Åström K J, Wittenmark B. *Adaptive Control*. Addison-Wesley, 1989

3 Åström K J, Wittenmark B. *Computer Controlled Systems: Theory and Design. Englewood Cliffs*, 2nd ed., New Jersey: Prentice-Hall, 1990,

4 Åström K J, Hagander P, Sternby J. Zeros of sampled systems. *Automatica*. 1984, **20**(1): 31∼38

5 Hagiwara T, Yuasa T, Araki M. Stability of the limiting zeros of sampled-data systems with zero- and first-order holds. *International Journal of Control*. 1993, **58**(6): 1325~1346

6 Blachuta M J. On zeros of pulse transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1999, **44**(6): 1229~1234

7 Ishitobi M. Stable zeros of sampled low-pass systems. *International Journal of Control*. 1993, **57**(6): 1485~1498

8 Passino K M, Antsaklis P J. Inverse stable sampled low-pass systems. *International Journal of Control*. 1988, **47**(6): 1905~1913

9 Blachuta M J. On zeros of sampled systems. In: Proceedings of 1997 American Control Conference. Albuquerque, NM, IEEE, 1997, 3205~3210

10 Gantmacher F R. *The Theory of Matrices*, New York: Chelsea, 1959, **I~II**

11 Hayakawa Y, Hosoe S , Ito M. On the limiting zeros of sampled multivariable systems. *Systems and Control Letters*. 1983, **2**(5): 292~300

12 Weller S R. Limiting zeros of decouplable MIMO systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1999, **44**(1): 129~134

13 Ishitobi M. A stability condition of zeros of sampled multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(2): 295~299

14 Schrader C B, Sain M. K. Research on system zeros: a survey. *International Journal of Control*. 1989, **50**(4): 1407~1433

15 Antsaklis P J, Michel A N. *Linear Systems*. New York: McGraw-Hill, 1997

16 Rosenbrock H H. *State-Space and Multivariable Theory*. London: Nelson, 1970

17 Hagiwara T, Araki M. Properties of limiting zeros of sampled systems. *Transactions of the Institute of Electrical Engineers of Japan*. 1990, **110-C**(4): 235~244. (in Japanese)

梁 山 重庆大学教授, 研究领域为自适应控制和传感器网络. 本文通信作者. E-mail: lightsun@cqu.edu.cn
(**LIANG Shan** Professor at Chongqing University. His research interest covers adaptive control and sensor network. Corresponding author of this paper.)

石飞光章 日本熊本大学教授, 研究领域为自适应控制和非线性控制系统.
(**ISHITOBI Mitsuaki** Professor at Kumamoto University, Japan. His research interest covers adaptive control and control on nonlinear systems.)

石为人 重庆大学教授, 研究领域为智能系统理论与应用.
(**SHI Wei-Ren** Professor at Chongqing University. His research interest covers intelligent system.)

鲜晓东 博士, 研究领域为智能系统理论与应用.
(**XIAN Xiao-Dong** Ph. D. of Chongqing University. Her research interest covers intelligent system.)