

# 鲁棒逆奈奎斯特方法中 鲁棒 Gershgorin 带的近似估计

高大远<sup>1</sup> 沈辉<sup>1</sup> 董国华<sup>1</sup> 胡德文<sup>1</sup>

**摘要** 针对多输入多输出线性系统的鲁棒逆奈奎斯特阵列分析, 提出一种保守性较小的鲁棒 Gershgorin 带近似估计方法. 首先给出一个保守性较小的鲁棒对角优势性引理, 基于此引理, 对具有参数不确定性的传递函数矩阵, 推导了鲁棒 Gershgorin 带的近似估计方法, 降低了估计结果的保守性. 最后给出了仿真验证.

**关键词** 逆奈奎斯特阵列, 鲁棒 Gershgorin 带, 鲁棒对角优势性, 解耦控制

中图分类号 TP13

## An Estimation of Robust Gershgorin Bands in Robust Inverse Nyquist Array Method

GAO Da-Yuan<sup>1</sup> SHEN Hui<sup>1</sup> DONG Guo-Hua<sup>1</sup>  
HU De-Wen<sup>1</sup>

**Abstract** In this paper, a method of estimating the width of the robust Gershgorin bands with less conservation is proposed. A lemma of robust diagonal dominance with less conservation is given first. Based on this lemma, the estimation method is derived for the transfer function matrix with uncertain parameters. The estimation obtained through this method is less conservative. Finally, an example is presented to illustrate the method.

**Key words** Inverse Nyquist array, robust Gershgorin bands, robust diagonal dominance, decoupling control

### 1 引言

逆奈奎斯特阵列 (Inverse Nyquist array, INA) 方法是线性多变量系统的控制方法之一, 由 Rosenbrock 提出<sup>[1]</sup>, 其基本思想是<sup>[2]</sup>: 在被控对象  $G(s)$  前或后引入预补偿矩阵  $K_1(s)$ , 使传递函数矩阵成为对角优势矩阵, 然后针对每个通道分别设计控制器  $K_2(s)$ , 得到总的控制器  $K(s) = K_1(s)K_2(s)$ . 由于使用了 Gershgorin 带等图形工具, 此方法具有便于设计、易于工程实现、稳定性容易判定等优点, 因此得到广泛应用, 如导弹自动驾驶仪设计<sup>[3]</sup> 等. 但是, 它的鲁棒性较差<sup>[4]</sup>, 其原因是模型参数不确定易导致传递函数矩阵对角优势性丧失, 从而使 INA 方法无效. Arkun 等<sup>[5]</sup> 系统地提出了鲁棒逆奈奎斯特阵列 (Robust inverse Nyquist array, RINA) 方法, 其思路是在设计补偿器时就考虑参数不确定性的影响, 使对角优势性在存在参数不确定时也能保持. Gao 等<sup>[6]</sup> 用数值方法研究了参数不确定性对对角优势性的影响, 并给出 2 阶和 3 阶

方阵鲁棒稳定性的经验公式. Nwokah 和 Nordgren 等<sup>[7, 8]</sup> 将 INA 方法与定量反馈理论 (QFT) 结合, 以提高 INA 方法的鲁棒性. 鲁棒性问题的解决, 使得 RINA 方法得到广泛应用, 如航空发动机控制<sup>[8]</sup>、控制电路设计<sup>[9]</sup> 等. 然而一般来说, 基于 RINA 方法设计的控制器比较保守, 这是因为在估计鲁棒 Gershgorin 带时所得结果一般较为保守, 将各个元素的不确定性所导致的 Gershgorin 带的宽度变化估计得较大. Chen 等<sup>[10]</sup> 针对由参数辨识带来的参数统计不确定性, 在近似估计鲁棒 Gershgorin 带时使用了各元素不确定性之间的互相关信息, 得到了保守性较小的估计, 并研究了相应的 RINA 方法, 在此估计方法中使用了 2-范数, 而鲁棒 Gershgorin 带的概念是用 1-范数进行度量, 这样不可避免地也带来了放大.

本文针对上述问题, 提出一种保守性较小的鲁棒 Gershgorin 带估计方法. 首先给出一个所需条件更弱的鲁棒对角优势性引理, 放松了对保持鲁棒对角优势性的条件限制. 然后针对有界的参数误差情况, 近似估计鲁棒 Gershgorin 带的宽度. 估计过程中, 直接应用 1-范数而不是 2-范数, 减少了放大环节, 并且利用了各元素之间的互相关信息, 此方法显著降低了 RINA 方法的保守性. 最后针对一个多变量系统进行仿真.

### 2 鲁棒对角优势性引理

#### 2.1 不确定性描述

考虑带有加性不确定性的传递函数矩阵

$$G_p(s) = G_m(s) + E(s)$$

其中,  $G_m(s)$  是被控对象的标称传递函数矩阵模型, 它近似刻画了系统的动态特性;  $G_p(s)$  是具有不确定性的真实对象的传递函数模型;  $E(s)$  是不确定性 (误差) 传递函数矩阵. 在许多实际应用中, 传递函数矩阵可写为  $G(s, \theta)$ , 其中  $\theta \in R^p$  是参数,  $\theta_0$  是  $\theta$  的标称值, 此时有

$$E(s) = G(s, \theta) - G(s, \theta_0)$$

假设参数误差有上界:  $\|\theta - \theta_0\|_2 \leq c_\theta$ ,  $c_\theta > 0$ , 本文研究参数误差导致的传递函数矩阵 Gershgorin 带的变化.

#### 2.2 鲁棒对角优势性

关于参数变化时的矩阵鲁棒对角优势性, 定义如下:

**定义 1.** 复数域上的  $m \times m$  矩阵  $A(\theta) = [a_{ij}(\theta)]$ ,  $\theta \in R^p$  为受到扰动的参数,  $\theta_0$  为  $\theta$  的标称值, 设  $\theta - \theta_0 \in E_c$ ,  $E_c$  为有界闭区域. 若对  $\forall \theta : \theta - \theta_0 \in E_c$ , 有

$$|a_{ii}(\theta)| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m |a_{ij}(\theta)| \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

则称  $A$  为鲁棒行对角优势矩阵. 同样可定义鲁棒列对角优势矩阵.

通过定义判断一个矩阵是否为鲁棒对角优势矩阵需要对每一种参数取值情况进行判断, 这是不可能的. 而如果已知当参数变化时不等式 (1) 右边的变化范围, 则判定变得容易. 文 [5] 假设参数变化时每个元素的误差界已知, 给出了下面的判定不等式

$$|a_{ii}(\theta_0)| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m |a_{ij}(\theta_0)| + \sum_{j=1}^m |a_{ij}(\theta) - a_{ij}(\theta_0)| \quad (2)$$

收稿日期 2005-5-13 收修改稿日期 2006-5-8  
Received May 13, 2005; in revised form May 8, 2006  
国家自然科学基金 (60234030), 国家杰出青年科学基金项目 (60225015), 高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划项目资助  
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60234030), National Distinguished Young Scholars Fund of China (60225015), Ministry of Education of China (TRAPOYT Project)  
1. 国防科技大学机电工程与自动化学院自动控制系 长沙 410073  
1. Department of Automatic Control, College of Mechatronics and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073  
DOI: 10.1360/aas-007-0435

在一个矩阵中,各元素通常不是相互独立的,如果已知不等式的行(列)元素整体的变化界,则可得到下面引理.

**引理 1.** 复数域上的  $m \times m$  矩阵  $A(\boldsymbol{\theta}) = [a_{ij}(\boldsymbol{\theta})]$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in R^p$  为受到扰动的参数,  $\boldsymbol{\theta}_0$  为  $\boldsymbol{\theta}$  的标称值. 定义  $d_i(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m |a_{ij}(\boldsymbol{\theta})|$ , 若对  $\forall \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0 \in E_c$ , 有

$$|a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)| > d_i(\boldsymbol{\theta}_0) + \left| [d_i(\boldsymbol{\theta}) - d_i(\boldsymbol{\theta}_0)] - [|a_{ii}(\boldsymbol{\theta})| - |a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)|] \right| \quad (3)$$

$i = 1, 2, \dots, m$

则  $A$  是鲁棒行对角优势矩阵.

**证明.**

$$\begin{aligned} |a_{ii}(\boldsymbol{\theta})| &= [|a_{ii}(\boldsymbol{\theta})| - |a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)|] + |a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)| \\ &\geq [|a_{ii}(\boldsymbol{\theta})| - |a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)|] + d_i(\boldsymbol{\theta}_0) + \\ &\quad \left| [d_i(\boldsymbol{\theta}) - d_i(\boldsymbol{\theta}_0)] - [|a_{ii}(\boldsymbol{\theta})| - |a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)|] \right| \\ &\geq [|a_{ii}(\boldsymbol{\theta})| - |a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)|] + d_i(\boldsymbol{\theta}_0) + \\ &\quad [d_i(\boldsymbol{\theta}) - d_i(\boldsymbol{\theta}_0)] - [|a_{ii}(\boldsymbol{\theta})| - |a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)|] \\ &= d_i(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m |a_{ij}(\boldsymbol{\theta})| \end{aligned}$$

鲁棒列对角优势性同样可证.  $\square$

将式(2)右边第二项与式(3)右边第二项比较,可以看出后者小于前者. 一个简单的几何解释如图1所示. 式(3)直接使用长度的差(三角形两边长度之差)作为对矩阵元素偏差的估计;而式(2)将元素变化前后之差的长度(三角形第三边的长度)视为元素不确定的估计,而因为三角形两边之差小与第三边,因此相比较而言,引理1所用到的不确定性范围较小.

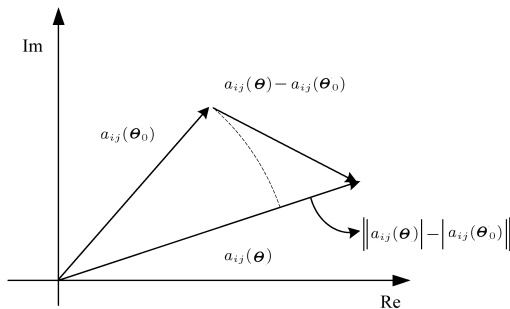


图1 引理1的几何解释

Fig. 1 Geometrical illustration of Lemma 1

基于引理1中对元素不确定性的估计方法,针对具有不确定元素的矩阵,可以得出新的鲁棒 Gershgorin 定理:

**定理 1 (鲁棒 Gershgorin 定理).** 复数域上的  $m \times m$  矩阵  $A(\boldsymbol{\theta}) = [a_{ij}(\boldsymbol{\theta})]$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in R^p$  为受到扰动的参数,  $\boldsymbol{\theta}_0$  为  $\boldsymbol{\theta}$  的标称值,对于  $\forall \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0 \in E_c$ ,  $E_c$  为有界闭区域,  $A(\boldsymbol{\theta})$  的特征值落在下面  $m$  个圆的并集中

$$|\lambda(A(\boldsymbol{\theta})) - a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)| \leq R_{0i} + \Delta R_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

其中

$$R_{0i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}(\boldsymbol{\theta}_0)|$$

$$\Delta R_i = \left| [d_i(\boldsymbol{\theta}) - d_i(\boldsymbol{\theta}_0)] - [|a_{ii}(\boldsymbol{\theta})| - |a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)|] \right|$$

或者在下面  $m$  个圆的并集中

$$|\lambda(A(\boldsymbol{\theta})) - a_{ll}(\boldsymbol{\theta}_0)| \leq R_{0l} + \Delta R_l, \quad l = 1, 2, \dots, m$$

其中

$$R_{0l} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m |a_{kl}(\boldsymbol{\theta}_0)|$$

$$\Delta R_l = \left| [d_l(\boldsymbol{\theta}) - d_l(\boldsymbol{\theta}_0)] - [|a_{ll}(\boldsymbol{\theta})| - |a_{ll}(\boldsymbol{\theta}_0)|] \right|$$

上面定理中,  $\Delta R_i(\Delta R_l)$  与  $\boldsymbol{\theta}$  有关. 设对于  $\forall \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0 \in E_c$ ,  $\Delta R_i(\Delta R_l)$  有上界, 记为  $\Delta R_i^*(\Delta R_l^*)$ . 对于矩阵  $A(\boldsymbol{\theta})$ , 以  $a_{ii}(\boldsymbol{\theta}_0)$  为圆心,  $R_{0i} + \Delta R_i^*$  为半径在复平面上画圆, 此圆称为矩阵  $A(\boldsymbol{\theta})$  的第  $i$  行的鲁棒行 Gershgorin 圆, 同样可作出鲁棒列 Gershgorin 圆.

由引理1和定理1可以知道,如果矩阵  $A(\boldsymbol{\theta})$  是鲁棒行对角优势的,则它的所有鲁棒行(列) Gershgorin 圆均不包含原点,反之亦然. 这是判断一个矩阵是否为鲁棒行对角优势的图形判据.

### 3 鲁棒 Gershgorin 带近似估计

#### 3.1 一般矩阵的鲁棒 Gershgorin 圆估计

从定理1可知,矩阵  $A(\boldsymbol{\theta})$  的鲁棒 Gershgorin 圆半径可看成由两部分叠加而成,一部分是参数不变时,矩阵  $A(\boldsymbol{\theta}_0)$  的 Gershgorin 圆半径  $R_{0i}$ ,另一部分是参数变化所引起的 Gershgorin 圆半径的变化  $\Delta R_i^*$ .  $R_{0i}$  是已知的,如果能估计出  $\Delta R_i^*$ ,则矩阵  $A(\boldsymbol{\theta})$  的鲁棒 Gershgorin 圆半径即可估计出来. 对于参数误差有界的情况,设  $\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0\|_2 \leq c_{\boldsymbol{\theta}}$ , 令

$$a_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = x_{ij}(\boldsymbol{\theta}) + jy_{ij}(\boldsymbol{\theta})$$

$$r_i(\boldsymbol{\theta}) = d_i(\boldsymbol{\theta}) - |a_{ii}(\boldsymbol{\theta})|$$

$$\nabla x_{ij} = \frac{\partial x_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T}, \quad \nabla y_{ij} = \frac{\partial y_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T}$$

则

$$\begin{aligned} \Delta r_i &= r_i(\boldsymbol{\theta}) - r_i(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &\approx \left. \frac{\partial r_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right|_{\boldsymbol{\theta}_0} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \\ &\triangleq \mathbf{v}_i^T T_i (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{v}_i^T = \left[ \frac{x_{i1}(\boldsymbol{\theta})}{|a_{i1}(\boldsymbol{\theta})|}, \frac{y_{i1}(\boldsymbol{\theta})}{|a_{i1}(\boldsymbol{\theta})|}, \dots, -\frac{x_{ii}(\boldsymbol{\theta})}{|a_{ii}(\boldsymbol{\theta})|}, -\frac{y_{ii}(\boldsymbol{\theta})}{|a_{ii}(\boldsymbol{\theta})|}, \dots, \frac{x_{im}(\boldsymbol{\theta})}{|a_{im}(\boldsymbol{\theta})|}, \frac{y_{im}(\boldsymbol{\theta})}{|a_{im}(\boldsymbol{\theta})|} \right] \Big|_{\boldsymbol{\theta}_0} \quad (4)$$

$$T_i^T = \left[ \nabla x_{i1}^T, \nabla y_{i1}^T, \dots, \nabla x_{im}^T, \nabla y_{im}^T \right] \Big|_{\boldsymbol{\theta}_0}$$

由 Hölder 不等式,有

$$\Delta R_i = |\Delta r_i(\boldsymbol{\theta})| \approx \left| \mathbf{v}_i^T T_i (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \right| \leq c_{\boldsymbol{\theta}} \lambda_i$$

其中,  $\lambda_i = \sqrt{\mathbf{v}_i^T T_i T_i^T \mathbf{v}_i}$ , 由于  $\Delta R_i^*$  是  $\Delta R_i$  的上界, 这样即可得到  $\Delta R_i^*$  的近似估计, 有如下定理.

**定理 2.** 复数域上的  $m \times m$  矩阵  $A(\boldsymbol{\theta}) = [a_{ij}(\boldsymbol{\theta})]$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in R^p$  为受到扰动的参数,  $\boldsymbol{\theta}_0$  为  $\boldsymbol{\theta}$  的标称值, 且满足  $\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0\|_2 \leq c_{\boldsymbol{\theta}}$ , 则  $\Delta R_i^*$  的一个近似估计为  $c_{\boldsymbol{\theta}}\lambda_i$ .

在上面的定理中, 以 1-范数度量矩阵元素的不确定性. 当然也可以用 2-范数进行度量<sup>[10]</sup>, 此时可以得到  $\Delta R_i^c = \sqrt{m}\sqrt{\chi_{\alpha p}^2\sigma_{1i}}$ ,  $\sigma_{1i}$  是  $T\Sigma_{\boldsymbol{\theta}}T^T$  的最大奇异值. 但是可以证明  $\Delta R_i^* \leq \Delta R_i^c$ , 如下.

**证明.** 只需证  $\lambda_i = \sqrt{\mathbf{v}_i^T T_i \Sigma_{\boldsymbol{\theta}} T_i^T \mathbf{v}_i} \leq \sqrt{m\sigma_{1i}}$

令  $T_i \Sigma_{\boldsymbol{\theta}} T_i^T$  的奇异值分解为

$$T_i \Sigma_{\boldsymbol{\theta}} T_i^T = U \text{diag} [\sigma_{1,i}, \sigma_{2,i}, \dots, \sigma_{2m,i}] U^T \triangleq U \Sigma_{\sigma} U^T$$

其中

$$\sigma_{1,i} \geq \sigma_{2,i} \geq \dots \geq \sigma_{2m,i}$$

令  $\mathbf{y} = \mathbf{v}_i^T U$ , 则有

$$\lambda_i = \sqrt{\mathbf{v}_i^T T_i \Sigma_{\boldsymbol{\theta}} T_i^T \mathbf{v}_i} = \sqrt{\mathbf{y}^T \Sigma_{\sigma} \mathbf{y}} \leq \|\mathbf{y}\|_2 \sqrt{\sigma_{1i}}$$

由于  $U$  是酉矩阵, 所以

$$\|\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{v}_i^T U\|_2 = \|\mathbf{v}_i\|_2 = \sqrt{m} \quad (5)$$

也就是说, 由本文估计出的矩阵行元素不确定性界小于文 [10] 的估计.  $\square$

注意, 式 (5) 最后一个等号成立是因为  $\mathbf{v}_i$  的特殊结构. 由式 (4) 可知,  $\mathbf{v}_i^T(2k-1) + \mathbf{v}_i^T(2k) = 1, k = 1, 2, \dots, m$ , 因此  $\|\mathbf{v}_i\|_2 = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = m$ .

文 [10] 在估计不确定性时用了元素间的相关信息 ( $T_i \Sigma_{\boldsymbol{\theta}} T_i^T$ ), 使得估计的保守性降低. 本文中, 由于使用了 1-范数作度量, 从而还使用了各个元素的分量信息 ( $\mathbf{v}_i$ ), 这样更进一步降低了估计的保守性, 这也是使用引理 1 的好处.

当  $\Delta R_i^*$  估计出来后, 将它与  $R_{0i}$  相加, 即可得到  $A(\boldsymbol{\theta})$  的第  $i$  行的鲁棒行 Gershgorin 圆半径的近似估计.

### 3.2 传递函数矩阵的鲁棒 Gershgorin 带估计

以每一个  $s$  值下传递函数矩阵的鲁棒 Gershgorin 圆估计为基础, 当  $s$  沿 Nyquist 围线变化时, 即可得到它的鲁棒 Gershgorin 带估计. 这里要注意的是, 在利用定理 2 估计鲁棒 Gershgorin 圆时,  $\Delta R_i(\Delta R_i)$  不仅是  $\boldsymbol{\theta}$  的函数, 还是  $s$  的函数.

在得到传递函数矩阵的鲁棒 Gershgorin 带估计后, 将其用于 INA 方法便可以得到 RINA 方法, 此时, 其形式与一般的 RINA 方法并无区别, 只要将鲁棒 Gershgorin 带的大小按照定理 2 的结论进行改动即可, 具体的定理见文 [5] 和 [10].

从这些定理看不出鲁棒 Gershgorin 带与系统稳定性的关系, 实际上, 鲁棒 Gershgorin 带的估计与控制系统设计有很密切的关系. 在设计  $K(s) = K_1(s)K_2(s)$  时,  $K_2(s)$  是对角阵, 用来对各个通道进行控制,  $K_1(s)$  为预补偿矩阵, 用来使传递函数变为对角优势矩阵, 即使得  $\hat{Q}(s, \boldsymbol{\theta}) = \text{inv}(G(s, \boldsymbol{\theta})K(s))$  为对角优势的. 一般来说, 对  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ , 总存在  $K_1(s)$ , 使得  $\hat{Q}(s, \boldsymbol{\theta})$  成为对角优势矩阵, 但是不一定存在一个  $K_1(s)$ , 使得对  $\forall \boldsymbol{\theta} : \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0\|_2 \leq c_{\boldsymbol{\theta}}$ ,  $\hat{Q}(s, \boldsymbol{\theta})$  都是对角优势矩阵, 这也是应用 RINA 方法的难点所在. 这里, 鲁棒 Gershgorin 带的意义在于给出了当参数不确定时, 传递函数矩阵各通道交连的变化, 为设计  $K_1(s)$  提供了定量信息. 鲁棒 Gershgorin 带越小, 则  $K_1(s)$  越好设计.

## 4 仿真

考虑如下系统<sup>[2]</sup>, 其标称传递函数矩阵模型和预补偿矩阵分别为

$$G(s, \mathbf{k}_0) = \begin{bmatrix} \frac{k_{10}}{s+k_{20}} & \frac{k_{30}}{s+k_{40}} \\ \frac{k_{50}}{s+k_{60}} & \frac{k_{70}}{s+k_{80}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{s+1} & \frac{8}{s+1} \\ \frac{12}{s+2} & \frac{14}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

其中,  $\mathbf{k}_0 \triangleq [k_{10}, \dots, k_{80}]^T$  为标称参数. 可以看出, 这不是一个对角优势系统, 在预补偿矩阵作用下, 标称系统变为对角阵  $G(s, \mathbf{k}_0)K_1 = \text{diag} \left[ \frac{1}{s+1}, \frac{2}{s+2} \right]$ , 从而是对角优势的. 此时它的行 Gershgorin 带图变为一条曲线 (Gershgorin 带宽度为零). 但是当参数  $\mathbf{k}$  变化 ( $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$ ) 时,  $G(s, \mathbf{k})K_1$  不再是对角的甚至不再是对角优势的. 图 2 是参数  $\mathbf{k}$  在标称值的 20% 范围内发生随机变化时,  $G(s, \mathbf{k})K_1$  的一组 Gershgorin 带图, 星号为各鲁棒 Gershgorin 圆的圆心. 从第二行 Gershgorin 带图可知, 它已不是对角优势的了. 实际上, 经过多次仿真可以发现, 随着参数的不同,  $G(s, \mathbf{k})K_1$  的 Gershgorin 带图会发生很大的变化. 图 3 是  $G(s, \mathbf{k})K_1$  的鲁棒 Gershgorin 带宽度的近似估计. 虚线是文 [10] 中估计方法估计的宽度, 实线是采用本文的估计方法得出的宽度. 可以看出, 本文的方法有明显的改进.

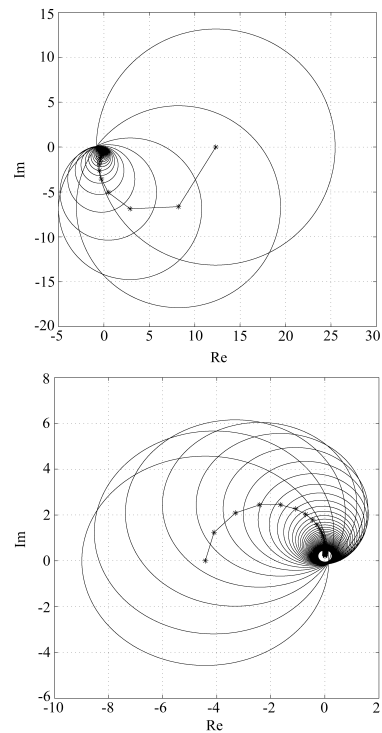


图 2  $G(s, \mathbf{k})K_1$  的一组 Gershgorin 带图  
Fig. 2 One group of the Gershgorin bands of  $G(s, \mathbf{k})K_1$

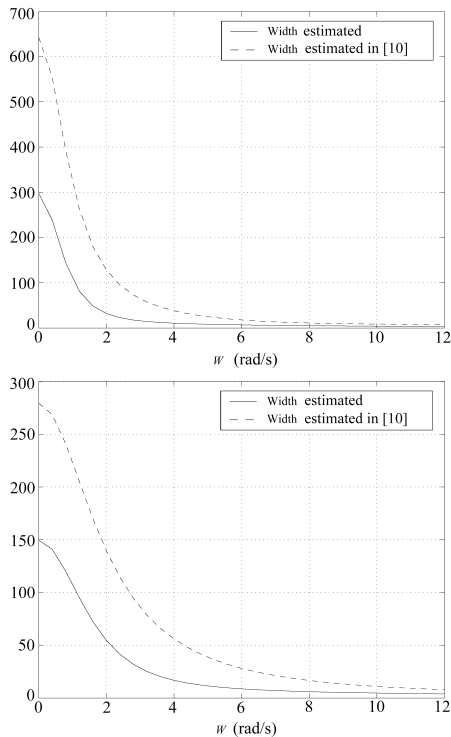


图3  $G(s, \mathbf{k})K_1$  的鲁棒 Gershgorin 带宽度估计

Fig. 3 The estimation of width of robust Gershgorin bands of  $G(s, \mathbf{k})K_1$

在估计出  $G(s, \mathbf{k})K_1$  的鲁棒 Gershgorin 带宽度后, 就可以判断  $G(s, \mathbf{k})K_1$  是否为鲁棒对角优势的 (在本例中,  $G(s, \mathbf{k})K_1$  显然不是对角优势的). 然后或者重新设计  $K_1$ , 或者应用 RINA 方法设计  $K_2(s)$  或  $F$ , 使闭环系统稳定, 具体的设计方法参见文 [5].

## 5 结论

在 RINA 方法的应用中, 鲁棒 Gershgorin 带的估计对闭环系统的性能影响很大. 本文给出了一个所需条件更弱的鲁棒对角优势性引理, 并在此基础上, 推导了一种新的鲁棒 Gershgorin 带的估计方法. 新方法使用 1-范数作度量, 不仅充分使用了矩阵元素间的互相关信息, 还使用了元素实部和虚部的分量信息, 大大降低了估计的保守性. 不仅为设计控制器带来了方便, 还使得系统鲁棒稳定性估计的保守性降低.

## References

- 1 Rosenbrock H H. *Computer-Aided Control System Design*. London: Academic Press, 1974
- 2 Gao Dai-Ling, Wu Qi. *Multiple Variables Frequency Domain Control Theory*. Beijing: Tsinghua University Press, 1998 (高黛陵, 吴麒. 多变量频率域控制理论. 北京: 清华大学出版社, 1998)
- 3 Zheng J H, Luan Z W, Cui P Y, Yang D, Feng W J, Xu P G, Yang H W. Autopilot design for a bank-to-turn missile using the inverse Nyquist array method. In: Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, AIAA, 1993
- 4 Doyle J C, Stein G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(1): 4~16
- 5 Arkun Y, Manousiouthakis B, Putz P. Robust Nyquist array methodology: a new theoretical framework for analysis

and design of robust multivariable feedback systems. *International Journal of Control*, 1984, **40**(4): 603~629

- 6 Gao D L, Zhang L. The robust inverse Nyquist array(RINA) method for the design of multivariable control systems. In: Proceedings of IEEE TENCN'93, Beijing, IEEE, 1993. 234~237
- 7 Nwokah O D I, Grewal G S, Gastineau Z, Nordgren R E. Quantitative Nyquist array feedback design. In: Proceedings of the American Control Conferences, IEEE, 1995. 3965~3969
- 8 Nwokah O D I, Nordgren R E, Grewal G S. Inverse Nyquist array: a quantitative theory. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 1995, **142**(1): 23~30
- 9 Ivezić D D, Petrović T B. New approach to milling circuit control-robust inverse Nyquist array design. *International Journal of Mineral Processing*, 2003, **70**(1-4): 171~182
- 10 Chen D, Dale E S. Robust Nyquist array analysis based on uncertainty descriptions from system identification. *Automatica*, 2002, **38**(3): 467~475

高大远 国防科技大学机电工程与自动化学院博士研究生. 主要研究方向为非线性控制, 神经网络控制, 飞行控制.

E-mail: dygao@nudt.edu.cn

(GAO Da-Yuan Ph.D. candidate at National University of Defense Technology. His research interest covers nonlinear control, neural networks control, and flight control.)

沈辉 国防科技大学机电工程与自动化学院副教授. 主要研究方向包括机器人控制, 神经网络控制与辨识数字图像处理, 计算机视觉和脑功能成像分析. E-mail: dygao@nudt.edu.cn

(ShEN Hui Associate professor at National University of Defense Technology. His research interest covers robot control, control and identification using neural networks, digital image processing, computer vision, and functional brain image analysis.)

董国华 国防科技大学机电工程与自动化学院讲师. 主要研究方向包括神经信号处理, 非线性系统辨识与控制. E-mail: dygao@nudt.edu.cn

(DONG Guo-Hua Lecturer at National University of Defense Technology. His research interest covers neural signal processing, nonlinear system identification and control.)

胡德文 国防科技大学机电工程与自动化学院教授, 博士生导师, 国家杰出青年科学基金获得者. 研究领域包括系统辨识, 神经网络, 图象信号处理, 脑功能成像分析, 认知科学等. 本文通信作者. E-mail: dwhu@nudt.edu.cn

(HU De-Wen Professor at National University of Defense Technology and he was awarded the National Distinguished Young Scholar Fund of China. His research interest covers system identification, neural networks, image information processing, functional brain image analysis, and cognitive neuroscience. Corresponding author of this paper.)