# 一类不确定系统的鲁棒稳定性分析

申 涛 [1] 王孝红 [1] 袁铸钢 [1]

**摘 要** 研究了一类不确定系统的稳定性问题, 以线性矩阵不等式 (LMI) 的形式给出了该类系统的鲁棒稳定条件, 并将该结果推广到区间系统的稳定性分析, 提出了研究区间系统稳定性问题的新方法, 给出了线性矩阵不等式形式的稳定判据, 该判据将区间系统的稳定性问题转化为一类线性矩阵不等式的可解问题. 最后通过仿真算例验证了本文结果具有更小的保守性.

**关键词** 区间系统, 线性矩阵不等式 (LMI), 鲁棒稳定性
**中图分类号** TP27.3

# Robust Stability for a Class of Uncertain Systems

SHEN Tao[1] WANG Xiao-Hong[1] YUAN Zhu-Gang[1]

**Abstract** This paper studies the robust stability for a class of uncertain systems. The sufficient stability conditions for these systems are given in the form of linear matrix inequality (LMI). And these results are further applied to the analysis of the robust stability for the interval systems. The criteria of robust stability for interval systems are presented. The problem of robust stability for interval systems can be transformed into a problem of solvability of a class of LMIs. Numerical examples show that our results are less conservative than the conventional ones.

**Key words** Interval system, linear matrix inequality (LMI), robust stability

## 1 引言

区间系统的稳定性问题, 一直以来都是国内外众多学者的研究对象, 随着线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 技术的不断发展和成熟, 利用 LMI 方法分析不确定系统的稳定性问题变得更为有效和便利. 国内外学者在这方面做了大量的工作[1~5], 文 [1 ~ 3] 分别利用 LMI 技术研究了区间系统的鲁棒稳定性问题, 将区间系统的稳定性问题转化为一类 LMI 的求解问题, 其中文 [1] 在研究区间系统的稳定性的基础上, 将区间系统的稳定判据推广到一类不确定系统的稳定性分析. 本文主要针对文 [1] 提出的一类不确定系统研究其鲁棒稳定特性, 将所得结果推广到区间系统.

## 2 问题的提出及预备知识

考虑如下不确定系统[1]

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \tilde{A}_1 \boldsymbol{x}(t) \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$, $\tilde{A}_1 \in R^{n\times n}$ 分别为系统 (1) 的状态向量和系统矩阵, 并且 $\tilde{A}_1 = A_0 + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i A_i$, $A_i \in R^{n\times n}, i = 1, 2, \cdots, N$, 为已知矩阵, $\varepsilon_i$ 为不确定参数, 满足 $|\varepsilon_i| \le 1$.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \tilde{A} \boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

收稿日期 2005-9-6 收修改稿日期 2006-10-27
Received September 6, 2005; in revised form October 27, 2006
山东省自然科学基金 (Y2005G04) 资助
Supported by Shandong Provincial Natural Science Foundation of P. R. China (Y2005G04)
1. 济南大学控制科学与工程学院 济南 250022
1. School of Control Theory and Engineering, University of Jinan, Jinan 250022
DOI: 10.1360/aas-007-0426

其中, $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$, $\tilde{A} \in R^{n\times n}$ 分别为系统 (1) 的状态向量和系统矩阵, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in R^{n\times n}$ 为不确定矩阵, $\underline{A} = [\underline{a}_{ij}] \in R^{n\times n}$, $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}] \in R^{n\times n}$ 为已知矩阵, $\underline{A}$ 满足 $\underline{a}_{ij} \le \tilde{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

**引理 1.** 对于适当维数的矩阵 $X, Y, F$, 若 $F$ 满足 $F^{\mathrm{T}}F \le I$, 则式 (3) 总是成立.

$$XFY + Y^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} \le \lambda XX^{\mathrm{T}} + \lambda^{-1}Y^{\mathrm{T}}Y \tag{3}$$

其中 $\lambda$ 为任意的正实数.

**引理 2.** $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in R^{n\times n}$, $\underline{A} = [\underline{a}_{ij}] \in R^{n\times n}$, $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}] \in R^{n\times n}$ 满足 $\underline{a}_{ij} \le \tilde{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 则 $\tilde{A}$ 可以等价为

$$\tilde{A} = A_0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} A_{ij} \tag{4}$$

其中, $\varepsilon_{ij}$ 为不确定实数并且满足 $|\varepsilon_{ij}| \le 1$,$A_{ij} = 0.5\boldsymbol{e}_i(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_i \in R^n$ 表示第 $i$ 个元素为 1, 其余元素为 0 的列向量.

## 3 主要结果

**定理 1.** 若存在正定对称矩阵 $P \in R^{n\times n}$ 以及正定对称矩阵 $Q_i \in R^{n\times n}$, $i = 1, 2, \cdots, N$, 满足式 (5), 则系统 (1) 是渐近稳定的.

$$\begin{pmatrix} M_0 + M_0^{\mathrm{T}} + \sum\limits_{i=1}^{N} Q_i & M_1 & M_2 & \cdots & M_N \\ M_1^{\mathrm{T}} & -Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}} & 0 & -Q_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ M_N^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0 & -Q_N \end{pmatrix} < 0 \tag{5}$$

其中, $M_i = 0.5(A_i^{\mathrm{T}} + PA_i)$, $i = 0, 1, \cdots, N$.

**证明.** 显然, 若存在正定对称矩阵 $P \in R^{n\times n}$ 满足下式

$$\tilde{A}_1^{\mathrm{T}}P + P\tilde{A}_1 < 0 \tag{6}$$

则系统 (1) 渐近稳定. 对于系统 (1), 式 (6) 可以写为

$$\tilde{A}_0^{\mathrm{T}}P + P\tilde{A}_0 + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i (A_i^{\mathrm{T}}P + PA_i) < 0 \tag{7}$$

令 $M_i = 0.5(A_i^{\mathrm{T}} + PA_i)$, 则式 (7) 可以写为

$$M_0 + M_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i (M_i^{\mathrm{T}} + M_i) < 0 \tag{8}$$

根据矩阵性质可知, 对于任意的可逆矩阵 $L_i \in R^{n\times n}$, 式 (9) 总是成立.

$$\varepsilon_i (M_i^{\mathrm{T}} + M_i) = M_i L_i^{-1}(\varepsilon_i I)L_i + L_i^{\mathrm{T}}(\varepsilon_i I)L_i^{-\mathrm{T}}M_i^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$|\varepsilon_i| \le 1$, 由引理 1 可知

$$\varepsilon_i (M_i^{\mathrm{T}} + M_i) \le M_i L_i^{-1} L_i^{-\mathrm{T}} M_i^{\mathrm{T}} + L_i^{\mathrm{T}} L_i \tag{10}$$

$L_i$ 为任意的可逆矩阵, 由此可以得到 $Q_i = L_i^{\mathrm{T}} L_i$ 为任意的正定对称矩阵. 取 $Q_i = L_i^{\mathrm{T}} L_i$, 则上式可以写为

$$\varepsilon_i (M_i^{\mathrm{T}} + M_i) \le M_i Q_i^{-1} M_i^{\mathrm{T}} + Q_i \tag{11}$$

根据 (11) 式可以得到

$$\begin{aligned} & M_0 + M_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i (M_i^{\mathrm{T}} + M_i) \\ \le\ & M_0 + M_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} M_i Q_i^{-1} M_i^{\mathrm{T}} + Q_i \end{aligned} \tag{12}$$

显然, 若式 (13) 成立, 则不等式 (8) 成立, 从而系统 (1) 渐近稳定.

$$M_0 + M_0^{\mathrm{T}} P + \sum_{i=1}^{N} M_i Q_i^{-1} M_i^{\mathrm{T}} + Q_i < 0 \tag{13}$$

由 Schur 补定理知式 (13) 可等价为式 (5), 得证. □

以下将定理 1 推广应用到区间系统 (2) 的稳定性判别. 由引理 2, 系统 (2) 可以等价为

$$\tilde{A}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} A_{ij}\right)\boldsymbol{x}(t) \tag{14}$$

其中, $\varepsilon_{ij}$ 为不确定实数并且满足 $|\varepsilon_{ij}| \le 1$, $A_{ij} = 0.5\boldsymbol{e}_i(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_i \in R^n$ 表示第 $i$ 个元素为 1, 其余元素为 0 的列向量.

**定理 2.** 若存在正定对称矩阵 $P \in R^{n\times n}$ 以及正定对称矩阵 $Q_{ij} \in R^{n\times n}$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 满足式 (15), 则系统 (14) 是渐近稳定的, 从而系统 (2) 渐近稳定.

$$\begin{pmatrix} M_0 + M_0^{\mathrm{T}} + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} Q_{ij} & M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{nn} \\ M_{11}^{\mathrm{T}} & -Q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ M_{12}^{\mathrm{T}} & 0 & -Q_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ M_{nn}^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0 & -Q_{nn} \end{pmatrix} < 0 \tag{15}$$

其中, $M_0 = 0.5(A_0^{\mathrm{T}} + PA_0)$, $M_{ij} = 0.5(A_{ij}^{\mathrm{T}} + PA_{ij})$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

**证明.** 略.

## 4 算例分析

**算例 1.** 考虑如下系统[4]

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \tilde{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{16}$$

其中, $\tilde{A}$ 如系统 (2) 中所定义, $\underline{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2-\beta_1 & 0 \\ -10 & -2 & -1 \\ 0.5 & 1-\beta_2 & -3 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2+\beta_1 & 0 \\ -10 & -2 & -1 \\ 0.5 & 1+\beta_2 & -3 \end{pmatrix}$, $\beta_1 = 2.05$, $\beta_2 = 2.05$.

由第 3 节的结果可知, 系统 (16) 可以等价为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A_0 + \varepsilon_{12}A_{12} + \varepsilon_{32}A_{32})\boldsymbol{x}(t) \tag{17}$$

其中, $|\varepsilon_{12}| \le 1$, $|\varepsilon_{32}| \le 1$, $A_0 = 0.5(\underline{A} + \overline{A})$, $A_{12} = \boldsymbol{e}_1(\overline{a}_{12} - \underline{a}_{12})\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}$, $A_{32} = \boldsymbol{e}_3(\overline{a}_{32} - \underline{a}_{32})\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}$. 利用 MATLAB 的 LMI 工具箱计算可得, 存在正定对称矩阵 $P$, $Q_{12}$, $Q_{32}$ 满足

$$\begin{pmatrix} M_0 + M_0^{\mathrm{T}} + Q_{12} + Q_{32} & M_{12} & M_{32} \\ M_{12}^{\mathrm{T}} & -Q_{12} & 0 \\ M_{32}^{\mathrm{T}} & 0 & -Q_{32} \end{pmatrix} < 0 \tag{18}$$

其中, $M_0 = 0.5(A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0)$, $M_{12} = 0.5(A_{12}^{\mathrm{T}}P + PA_{12})$, $M_{32} = 0.5(A_{32}^{\mathrm{T}}P + PA_{32})$. 根据定理 2 可以得到系统 (16) 是渐近稳定的, 这与文 [4] 结果是一致的.

**算例 2.** 考虑如下系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A_0 + \varepsilon_1 A_1)\boldsymbol{x}(t), \quad |\varepsilon_1| \le 1 \tag{19}$$

其中, $A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $A_1 = \beta\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\beta = 0.95$.

利用 MATLAB 中的 LMI 工具箱计算可得, 存在正定对称矩阵 $P$, $Q_1$ 满足

$$\begin{pmatrix} M_0 + M_0^{\mathrm{T}} + Q_1 & M_1 \\ M_1^{\mathrm{T}} & -Q_1 \end{pmatrix} < 0 \tag{20}$$

其中, $M_0 = 0.5(A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0)$, $M_1 = 0.5(A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1)$, 由本文定理 1 可知系统 (19) 渐近稳定, 而利用文 [1] 定理 3 的结果无法保证系统 (19) 渐近稳定, 由此可得本文结果具有较小的保守性.

## 5 结论

本文研究了一类不确定系统的鲁棒稳定性问题, 以 LMI 的形式给出了该类系统的稳定判据, 通过算例分析得出, 本文结果与以往结果相比具有更小的保守性. 但是, 本文仅仅是利用算例验证了所得结果的有效性, 并未从理论上得出保守性减小的原因, 今后作者将会对这方面的工作进行进一步研究.

### References


1 Mao W J, Chu J. Quadratic stability and stabilization of dynamic interval systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 1007～1012

2 Wu Fang-Xiang, Shi Zhong-Ke, Dai Guan-Zhong. On robust stability of dynamic interval systems. *Control Theory and Applications*, 2001, **18**(1): 113～115
(吴方向, 史忠科, 戴冠中. 动态区间系统的鲁棒稳定性. 控制理论与应用, 2001, **18**(1): 113～115)

3 Shen Tao, Zhu Jing. Analysis of robust stability of dynamic interval systems. *Journal of Circuits and Systems*, 2005, **10**(2): 79～82
(申涛, 诸静. 区间系统鲁棒稳定性分析. 电路与系统学报, 2005, **10**(2): 79～82)

4 Yang G H, Lum K Y. Comments on"quadratic stability and stabilization of dynamic interval systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(2): 276～277

5 Mao Wei-Jie. Quadratic stability and stability margin analysis of discrete interval systems. *Control Theory and Applications*, 2004, **21**(4): 591～594
(毛维杰. 离散区间系统的二次稳定性及其稳定裕度分析. 控制理论与应用, 2004, **21**(4): 591～594)

6 Huang Lin. *Linear Algebra in System and Control Theory*. Beijing: Science Press, 1984
(黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京: 科学出版社, 1984)



**申 涛**　济南大学副教授, 博士. 主要研究方向为鲁棒控制, 智能控制. 本文通信作者. E-mail: shentao28@163.com
(**SHEN Tao**　Associate professor at Jinan University, Ph. D.. His research interest covers robust control and intelligent control. Corresponding author of this paper.)

**王孝红**　济南大学教授, 博士. 主要研究方向为智能控制、过程控制.
(**WANG Xiao-Hong**　Professor at Jinan University, Ph. D.. His research interest covers intelligent control and process control.)

**袁铸钢**　济南大学教授. 主要研究方向为智能控制、过程控制.
(**YUAN Zhu-Gang**　Professor at Jinan University. His research interest covers intelligent control and process control.)