积分二次约束下系统鲁棒镇定的凸参数化方法

耿志勇 [1]

摘 要 研究了积分二次约束下不确定系统的鲁棒控制器设计问题. 通过将控制器的 Youla 参数化方法与鲁棒稳定性频域判据相结合, 将鲁棒控制器设计问题转化为 RH^∞ 空间的凸可行性问题, 进而将该问题转化为求解频域线性矩阵不等式的可行解问题. 在此基础上, 利用有理函数矩阵边界插值方法求得鲁棒控制器.

关键词 积分二次约束, 鲁棒镇定, 凸参数化, 线性矩阵不等式
中图分类号 TP271

Convex Parameterization Approach for Robust Stabilization of Systems with Integral Quadratic Constrained Uncertainties

GENG Zhi-Yong[1]

Abstract This paper studies the problem of robust controller design for systems with integral quadratic constrained uncertainties. By combining the method of Youla parameterization with the criterion of robust stability, the problem of robust controller design is converted into that of convex feasibility in RH^∞ space, and is further converted into that of finding solutions for a frequency dependent linear matrix inequality. Thus, the robust controller can be achieved by the method of rational matrix interpolation on border.

Key words Integral quadratic constraint, robust stabilization, convex parameterization, linear matrix inequalities

1 引言

积分二次约束 (Integral quadratic constraint, IQC), 方法起源于绝对稳定性问题的研究[1~3], 特别是在利用 S- 过程研究非线性控制系统稳定性时, 从输入输出的角度刻划非线性不确定性时引入一种积分二次不等式约束[4,5]. 然而, IQC 方法广泛应用于系统鲁棒性分析只是近几年的事情[6~12], 其中, Megretski 和 Rantzer 的工作是开创性的[8]. 通过引入非因果乘子, 拓广了 IQC 的原始描述, 将基于小增益描述的结构及非结构不确定性以及基于无源性描述的不确定性有机地结合起来, 从而能够刻划几乎所有现代鲁棒分析中的不确定性模式, 在此基础上给出了系统鲁棒稳定性的频域判据. 从而使得 IQC 方法受到广泛关注和研究. 近期的研究工作可见 [13]. IQC 方法虽然在刻划系统的不确定性方面有着广泛的代表性, 然而对于 IQC 所描述系统的鲁棒综合, 还没有有效的方法. 如何设计带有 IQC 不确定性系统的鲁棒控制器, 显然具有重要的理论意义和应用价值. 鲁棒控制器设计的凸参数化方法[14~18] 是一种控制器设计的凸优化方法, 设计实例表明该方法与其他控制器设计方法相比具有保守性小的优点[19,20]. 但该方法目前只限于带有秩一 (Rank one) 不确定性系统, 对于高于秩一的不确定性的研究表明[21], 若系统的不确定性是非结构性的, 凸参数化方法的推广可以得到充分必要条件; 对于具有分块对角结构不确定性, 凸参数化方法的结论将丧失必要性但至少与结构奇异值方法 (μ 综合方法) 具有同样的保守性. 最近作者又将控制器凸参数化方法推广到具有代数二次约束不确定系统[22]. 本文研究带有 IQC 不确定性系统鲁棒控制器设计的凸参数化方法.

收稿日期 2005-12-29 收修改稿日期 2006-12-25
Received December 29, 2005; in revised form December 25, 2006
国家自然科学基金 (60374039, 60334030, 60204007) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60374039, 60334030, 60204007)
1. 北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京大学力学与工程科学系 北京 100871
1. State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems and Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871
DOI: 10.1360/aas-007-0422

2 问题描述

首先引入本文所用的一些符号. 用 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 表示实数域和复数域, 并记 $\bar{\mathbb{R}} = \{-\infty\}\bigcup\mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$. $m\times n$ 维复矩阵的集合记为 $\mathbb{C}^{m\times n}$. $\mathbb{R}(s)^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 维有理传递函数矩阵的集合, 用 RL^∞ 表示在虚轴上本征有界的传递函数 (或传递函数矩阵) 的集合, 用 RH^∞ 表示真的稳定的传递函数 (或传递函数矩阵) 的集合, 当需要强调 RL^∞ 或 RH^∞ 中的传递函数矩阵的维数为 $m\times n$ 时, 用 $\mathrm{RL}^\infty(\mathbb{C}^{m\times n})$ 或 $\mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{m\times n})$. 对于矩阵 $M\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 用 M^* 表示 M 的共轭转置, 对于 Hermitian 矩阵 $M=M^*\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 用 $M>0$ 表示矩阵是正定的. 用 L_2^n 表示定义在 $[0,\infty)$ 上, 取值于 $\mathbb{R}^n$ 的平方可积的信号空间, 而用 L_{2e}^n 表示定义在 $[0,\infty)$ 上, 取值于 $\mathbb{R}^n$ 的有限平方可积的信号空间.

考虑图 1 所示不确定系统, 其输入输出描述为

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \\ v = \Delta z + e,\ u = Ky \tag{1}$$

其中, $z\in L_{2e}^n$ 和 $y\in L_{2e}^q$ 分别是不确定输出和控制输出信号, $w\in L_{2e}^m$ 和 $u\in L_{2e}^p$ 分别是不确定输入和控制输入信号, G 是带有传递函数 $G(s)\in\mathbb{R}(s)^{(n+q)\times(m+p)}$ 的标称广义线性时不变受控对象, 根据输入输出可将其写成如下分块形式

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{2}$$

并且 $G_{22}(s)$ 可表示为 RH^∞ 上的左右互质分解

$$G_{22}(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \tag{3}$$

使得 $M(s)$, $N(s)$, $\tilde{M}(s)$, $\tilde{N}(s)\in\mathrm{RH}^\infty$. $\Delta: L_{2e}^n\to L_{2e}^m$ 为不确定有界因果算子.

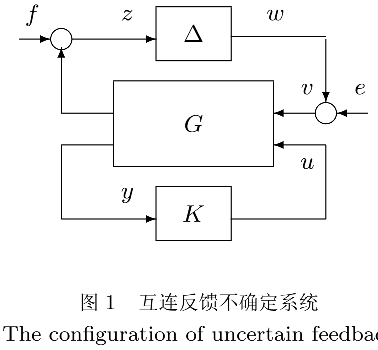

图 1 互连反馈不确定系统

Fig. 1 The configuration of uncertain feedback system

设 $\Pi(j\omega)=\Pi^*(j\omega)\in \mathrm{RL}^\infty(\mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)})$ 是取值为 Hermitian 矩阵的传递函数, 称 Δ 为满足由乘子 Π 定义的 IQC[8], 系指积分不等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}\hat{z}(j\omega)\\ \hat{w}(j\omega)\end{bmatrix}^*\Pi(j\omega)\begin{bmatrix}\hat{z}(j\omega)\\ \hat{w}(j\omega)\end{bmatrix}\mathrm{d}\omega\geq 0 \tag{4}$$

对所有的 $\omega\in\bar{\mathbb{R}}$ 成立. 其中, "^" 表示相应信号的 Fourier 变换. 满足上述 IQC 的不确定算子的集合记为 Δ_Π. 不确定性的 IQC 描述可以代表鲁棒控制中所涉及到的相当广泛的一类不确定性摄动模式.

设 K 为镇定对象 $G_{22}(s)$ 并带有传递函数 $K(s)\in \mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{p\times q})$ 的线性时不变控制器, 使得 $(I-G_{22}(s)K(s))^{-1}\in \mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{q\times q})$, 则由 w 到 z 的传递函数可表示为: $T_{zw}(s)=G_{11}(s)+G_{12}(s)K(s)(I-G_{22}(s)K(s))^{-1}G_{21}(s)$.

定义 1. 称控制器 $K(s)\in \mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{p\times q})$ 鲁棒镇定不确定广义受控对象, 系指

1) $T_{zw}(s)\in \mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{n\times m})$;

2) 对任意的 $\Delta\in\Delta_\Pi$, 由信号 $[e,f]^\mathrm{T}\in L_{2e}^{m+n}$ 可唯一确定信号 $[w,z]^\mathrm{T}\in L_{2e}^{m+n}$;

3) 存在常数 $\gamma>0$, 使得对任意 $T>0$ 有

$$\int_0^T(|z(t)|^2+|v(t)|^2)\mathrm{d}t\leq\gamma\int_0^T(|e(t)|^2+|f(t)|^2)\mathrm{d}t \tag{5}$$

满足条件 1) 的控制器可镇定标称对象 $G(s)$, 称为标称控制器, 记为 $K_0(s)$, 要使控制器 $K(s)$ 镇定不确定对象首先就要镇定标称对象. 条件 2) 给出的是闭环系统的适定性. 条件 3) 所给出的是由 $T_{zw}(s)$ 和 Δ 构成的反馈系统的内稳定性.

假定定义 1 的条件 1), 2) 满足, 同时假设 $\Delta\in\Delta_\Pi$ 可保证对任意 $\tau\in[0,1]$, 有 $\tau\Delta\in\Delta_\Pi$. 则关于闭环系统的鲁棒稳定性有如下定理.

定理 1[8]. 若对任一 $\omega\in\bar{\mathbb{R}}$ 下列频域不等式成立

$$\Phi_\Pi(T_{zw}(j\omega))=\begin{bmatrix}T_{zw}(j\omega)\\ I\end{bmatrix}^*\Pi(j\omega)\begin{bmatrix}T_{zw}(j\omega)\\ I\end{bmatrix}<0 \tag{6}$$

则闭环系统为鲁棒稳定的.

所谓鲁棒镇定问题即是设计控制器 $K(s)\in \mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{p\times q})$, 使得对任意的 $\Delta\in\Delta_\Pi$, 闭环系统稳定. 关于这个问题, 目前还很难给出求解鲁棒控制器的充分必要条件. 本文所要研究的问题是在假定满足定义 1 的条件 1)、2) 的控制器集合非空的情况下, 用凸优化的方法寻求控制器, 使得定理 1 的条件得到满足, 从而求得鲁棒控制器.

3 鲁棒控制器的凸参数化

为使控制器 $K(s)$ 镇定不确定对象, 它首先要镇定标称对象, 即 $\Delta=0$ 的情形. 为此我们首先要确定所有镇定标称对象 $G(s)$ 的控制器的集合. 根据 Youla 参数化[23], 镇定标称对象 $G(s)$ 的控制器有如下形式

$$K=(\tilde{V}_0+Q_l\tilde{N})^{-1}(\tilde{U}_0+Q_l\tilde{M})=(U_0+MQ_r)(V_0+NQ_r)^{-1} \tag{7}$$

其中, $U_0(s),V_0(s),\tilde{U}_0(s),\tilde{V}_0(s)\in \mathrm{RH}^\infty$, 使得 $K_0(s)=\tilde{V}_0^{-1}(s)\tilde{U}_0(s)=U_0(s)V_0^{-1}(s)$ 镇定对象 $G_{22}(s)$, 并满足

$$\begin{bmatrix}\tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0\\ -\tilde{N} & \tilde{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M & U_0\\ N & V_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix} \tag{8}$$

其中, $Q_r(s),Q_l(s)\in \mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{p\times q})$ 是任意稳定传递函数矩阵. $K_0(s)$ 称为标称控制器.

设 IQC 乘子 $\Pi(j\omega)$ 具有如下结构

$$\Pi(j\omega)=\begin{bmatrix}\Pi_{11}(j\omega) & \Pi_{12}(j\omega)\\ \Pi_{12}^*(j\omega) & \Pi_{22}(\omega)\end{bmatrix}$$

其中, $\Pi_{11}(j\omega)=\Pi_{11}^*(j\omega)\geq 0$, $\Pi_{22}(j\omega)=\Pi_{22}^*(j\omega)$. 由于 $\Pi_{11}(j\omega)\geq 0$, 可将其分解为 $\Pi_{11}(j\omega)=\Pi_{11}^{\frac{1}{2}}(j\omega)\Pi_{11}^{\frac{1}{2}}(j\omega)$. 记 $L_{0,11}=-I$, $L_{0,12}=\Pi_{11}^{\frac{1}{2}}(G_{11}+G_{12}M\tilde{U}_0G_{21})$, $L_{0,22}=\Pi_{22}+\Pi_{12}^*(G_{11}+G_{12}M\tilde{U}_0G_{21})+(G_{11}+G_{12}M\tilde{U}_0G_{21})^*\Pi_{12}$.

$$L_0(j\omega)=\begin{bmatrix}L_{0,11}(j\omega) & L_{0,12}(j\omega)\\ L_{0,12}^*(j\omega) & L_{0,22}(j\omega)\end{bmatrix}$$

$$L_l(j\omega)=\begin{bmatrix}0 & \Pi_{11}^{\frac{1}{2}}G_{12}M\\ 0 & \Pi_{12}^*G_{12}M\end{bmatrix},\ L_r(j\omega)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \tilde{M}G_{21}\end{bmatrix}$$

则有如下定理.

定理 2. 若存在控制器参数矩阵 $Q(s)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & Q_l(s)\end{bmatrix}\in \mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{(n+p)\times(n+q)})$, 使得下列频域线性矩阵不等式成立

$$\begin{aligned}L(j\omega;Q(j\omega)):\ &=L_0(j\omega)+L_l(j\omega)Q(j\omega)L_r(j\omega)+\\ &L_r^*(j\omega)Q^*(j\omega)L_l^*(j\omega)<0\end{aligned} \tag{9}$$

则闭环系统鲁棒稳定.

证明. 取控制器 $K(s)$ 的 Youla 参数化形式如下, $K(s)=(\tilde{V}_0(s)+Q_l(s)\tilde{N}(s))^{-1}(\tilde{U}_0(s)+Q_l(s)\tilde{M}(s))$, 其中 $Q_l\in \mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{p\times q})$. 将 $K(s)$ 代入其传递函数 $T_{zw}(s)$, 经过简单的代数运算可以证明[24]

$$T_{zw}(s)=T_1(s)+T_2(s)Q_l(s)T_3(s) \tag{10}$$

其中, $T_1(s)=G_{11}(s)+G_{12}(s)M(s)\tilde{U}_0(s)G_{21}(s)$, $T_2(s)=G_{12}(s)M(s)$, $T_3(s)=\tilde{M}(s)G_{21}(s)$. 由不等式 (6) 可得

$$T_{zw}^*\Pi_{11}^{\frac{1}{2}}\Pi_{11}^{\frac{1}{2}}T_{zw}+T_{zw}^*\Pi_{12}+\Pi_{12}^*T_{zw}+\Pi_{22}<0,\forall\omega\in\bar{\mathbb{R}}$$

由此, 代入 $T_{zw}=T_1+T_2Q_lT_3$, 并利用 Schur 补可得

$$L(j\omega;Q(j\omega))=\begin{bmatrix}L_{11}(j\omega) & L_{12}(j\omega)\\ L_{12}^*(j\omega) & L_{22}(j\omega)\end{bmatrix}<0,\ \forall\omega\in\bar{\mathbb{R}}$$

其中, $L_{11}=-I$, $L_{12}=\Pi_{11}^{\frac{1}{2}}(T_1+T_2Q_lT_3)$, $L_{22}=\Pi_{22}+\Pi_{12}^*(T_1+T_2Q_lT_3)+(T_3^*Q_l^*T_2^*+T_1^*)\Pi_{12}$
带入 $T_1(s),T_2(s),T_3(s)$ 即得 (9) 式. □

注 1. 当 $\Pi_{11}(j\omega)>0,\forall\omega\in\bar{\mathbb{R}}$ 时, 将不等式 (9) 两边乘以 $\mathrm{diag}(\Pi_{11}^{\frac{1}{2}}(j\omega),\ I)$, 并令不等式 (9) 中的 L_0,L_l 为

$$L_0(j\omega)=\begin{bmatrix}L_{0,11} & L_{0,12}\\ L_{0,12}^* & L_{0,22}\end{bmatrix},L_l(j\omega)=\begin{bmatrix}0 & \Pi_{11}G_{12}M\\ 0 & \Pi_{12}^*G_{12}M\end{bmatrix}$$

其中, $L_{0,11}=-\Pi_{11}$, $L_{0,12}=\Pi_{11}(G_{11}+G_{12}M\tilde{U}_0G_{21})$, $L_{0,22}=\Pi_{22}+\Pi_{12}^*(G_{11}+G_{12}M\tilde{U}_0G_{21})+(G_{11}+G_{12}M\tilde{U}_0G_{21})^*\Pi_{12}$.

而当 $\Pi_{11}(j\omega)\equiv 0$ 时, 令不等式 (9) 中的 L_0, L_l 及 L_r 为

$$L_0(j\omega)=L_{0,22}(j\omega),\ L_l(j\omega)=\Pi_{12}^*G_{12}M,\ L_r(j\omega)=\tilde{M}G_{21}.$$

注 2. 设

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}=\{Q(s)\in \mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{(n+p)\times(n+q)}):\\ L(j\omega;Q(j\omega))<0,\ \forall\omega\in\bar{\mathbb{R}}\}\end{aligned}\tag{11}$$

若集合 $\mathscr{Q}$ 非空, 则是 $\mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{p\times q})$ 中的凸集, 问题转化为 RH^∞ 空间的凸可行性问题. 该过程称为鲁棒控制器的凸参数化. 由于IQC 下的稳定性判据是充分的, $\mathscr{Q}$ 只是实际鲁棒控制器参数矩阵集合的凸子集, 从而不可避免地引入保守性.

接下来的问题是如何求得 $Q(s)\in\mathscr{Q}$, 为此我们引入如下双线性变换：$s=(1-z)/(1+z)$. 它将右半平面解析的函数一一映射到单位圆盘 $D:=\{z:\ |z|<1\}$ 上解析的函数. 记 $\tilde{F}(z)=F((1-z)/(1+z))$, 且在不引起混淆的情况下, $F(s)\in\mathrm{RH}^\infty$ 经过变换后的函数仍记为 $\tilde{F}(z)\in\mathrm{RH}^\infty$.

定理 3. $\mathscr{Q}\neq\emptyset$ 当且仅当, 对任意 $\theta\in[-\pi,\pi]$, 存在 $Q_\theta\in\mathbb{C}^{p\times q}$, 使得 $\tilde{L}(e^{j\theta};Q_\theta)<0$.

证明. 利用双线性变换 $j\omega=(1-e^{j\theta})/(1+e^{j\theta})$, 并令 $Q_\theta=Q((1-e^{j\theta})/(1+e^{j\theta}))$, 则必要性显然. 现证明充分性. 令 $z=e^{j\theta}$, 考虑多项式矩阵插值问题, 由对称性, 我们只考虑 $\theta\in[0,\pi]$ 上插值问题, 取 $\theta_0(=0)$, θ_1, $\theta_2,\cdots,\theta_n(=\pi)\in[0,\pi]$, 则一定存在多项式矩阵 $\tilde{Q}_p(z)=\sum_{k=0}^n Q_kz^k$, 使得 $\tilde{Q}_p(e^{j\theta_i})=Q_{\theta_i}$, $i=0,1,2,\cdots,n$, 由传递函数以及多项式的连续性, 当分点 $\theta_0,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\in[0,\pi]$ 取得足够密时, 多项式矩阵 $\tilde{Q}_p(z)$ 一定满足

$$\tilde{L}(e^{j\theta};\tilde{Q}_p(e^{j\theta}))<0,\ \forall\theta\in[0,\pi]\tag{12}$$

显然 $\tilde{Q}_p(z)$ 是 D 上解析并有界的, 从而 $\tilde{Q}_p(z)\in\mathrm{H}^\infty$. 同时 $\tilde{Q}$ (z) 在单位圆 $\partial D:\{z:\ |z|=1\}$ 上连续, 若将满足这样两个条件的函数集合记为 A, 则 $\tilde{Q}_p(z)\in$ A. 由于集合 RH^∞ 在 A 中一致稠密 [20], 故由 $\tilde{L}(z,\tilde{Q})$ 在 A 一致拓扑下的连续性, 一定存在 $\tilde{Q}\in\mathrm{RH}^\infty$, 使得 (12) 式成立. 令 $Q(s)=\tilde{Q}((1-s)/(1+s))$, 则显然有 $Q(s)\in\mathrm{RH}^\infty$, 且满足: $L(j\omega;Q(j\omega))<0$, $\forall\omega\in\mathbb{R}$, 从而 $\mathscr{Q}\neq\emptyset$. □

注 3. 定理 3 给出了求取鲁棒控制器参数 $Q(s)$ 的方法. 首先利用插值方法求得实系数多项式矩阵 $\tilde{Q}_p(z)=\sum_{k=0}^n Q_kz^k$, 然后可根据部分实现 (Partial realization) 理论[25], 求得在原点解析且等于 Q_0 的解析传递函数, $\tilde{Q}(z)=Q_0+C(z^{-1}I-A)^{-1}B$, 使得 $\tilde{Q}(z)$ 具有最小的阶次, 同时 $\tilde{Q}(z)$ 在原点展开的幂级数的前 $(n+1)$ 项与多项式矩阵 $\tilde{Q}_p(z)$ 相同, 即 $CA^{i-1}B=Q_i$, $i=1,\cdots,n$, 最后利用双线性变换 $s=(1-z)/(1+z)$, 求得鲁棒控制器参数矩阵 $Q_l(s)$.

注 4. 频域线性矩阵不等式 (9) 的求解问题, 目前还没有比较好的办法, 虽然在理论上可通过定理 3 转化为频率域上取点扫描的插值问题, 因为实际插值过程在频率域上取点只能是有限个, 为了检验插值函数矩阵 $Q(s)$ 满足频域不等式, 需要利用 KYP 引理来加以验证.

4 例子

考虑如下具有互质分解不确定性系统：

$$P_\Delta=(\tilde{M}+\Delta\tilde{M}_\Delta)^{-1}(\tilde{N}+\Delta\tilde{N}_\Delta)$$

其中, $M(s),N(s)\in\mathrm{RH}^\infty$ 为标称对象 $P(s)$ 的互质分解, 使得 $P(s)=M^{-1}(s)N(s)$,

$$\tilde{N}(s)=\left[\begin{array}{cc|cc}-2.564&5.647&1.956&1.956\\-0.03796&-1.762&0.05938&0.05938\\\hline -0.9379&1.116&1&0\\-0.9379&1.116&0&1\end{array}\right],$$

$$\tilde{M}(s)=\left[\begin{array}{cc|cc}-2.564&5.647&0.5992&-1.39\\-0.03796&-1.762&0.5036&-1.376\\\hline 0.9379&-1.116&0&0\\0.9379&-1.116&0&1\end{array}\right],$$

$\Delta\in\mathrm{RH}^\infty(\mathbb{C}^{2\times2})$ 为不确定性扰动, 满足由 $\Pi=\mathrm{diag}\,(I_2,\ -I_2)$ 定义的 IQC, 其中 I_2 为 2 阶单位阵. $\tilde{M}_\Delta=\tilde{N}_\Delta=\mathrm{diag}\,(0.313,\ 0.313)$ 为标度矩阵, 求镇定不确定对象 $P_\Delta(s)$ 的控制器 $K(s)$. 将系统写成本文处理的标准形式

$$\begin{bmatrix}z\\y\end{bmatrix}=G(s)\begin{bmatrix}w\\u\end{bmatrix},\ w=\Delta z,\ u=Ky$$

其中广义标称对象

$$G(s)=\begin{bmatrix}-\tilde{M}_\Delta\tilde{M}^{-1}&\tilde{N}_\Delta-\tilde{M}_\Delta P\\\tilde{M}^{-1}&P\end{bmatrix}$$

通过对 $G_{22}(s)=P(s)$ 的双互质分解 (7), 可求得镇定 $G(s)$ 的标称控制器 ($Q(s)=0$ 时)

$$K_0=\tilde{V}_0^{-1}(s)\tilde{U}_0(s)=\left[\begin{array}{cc|cc}-3.281&-1.078&0.1756&0.1756\\4.671&-3.467&-1.372&-1.372\\\hline 1.115&4.713&0&0\\-0.3856&0.3944&0&0\end{array}\right]$$

在标称控制器下由 w 到 z 的传递函数为

$$T_1(s)=\left[\begin{array}{cc|cc}-1.649&1.797&-1.923&-1.923\\0.06489&-2.172&-1.99&-1.99\\\hline 0.6223&0.6634&-0.313&0\\0.321&-0.03211&0&-0.313\end{array}\right]$$

易验证, $T_1(s)$ 与 Δ 构成的闭环反馈系统不是鲁棒稳定的. 而由 (6) 式, 取 $\varPhi_\Pi\left[T_1\left((1-e^{j\theta})/(1+e^{j\theta})\right)\right]$, $\theta\in[0,\pi]$, 其最大特征值随频率 θ 的变化如图 2 中的点划线所示, 说明在低频段, $T_1(s)$ 不满足 IQC 下稳定性判据条件. 需要对控制器用凸参数化方法进行优化设计, 求出鲁棒控制器参数 $Q(s)$, 而由 (7) 式, 改进后的鲁棒控制器为

$$K(s)=(\tilde{V}_0(s)+Q(s)\tilde{N}(s))^{-1}(\tilde{U}_0(s)+Q(s)\tilde{M}(s))=\left[\begin{array}{cc|cc}-6.361&0.1128&-1.624&-1.576\\0.2067&-1.111&0.2216&0.05948\\\hline 0.08768&3.539&-0.04977&0.4737\\3.283&1.379&1.201&1.325\end{array}\right]$$

在鲁棒控制器下, 由 w 到 z 的传递函数为

$$T_{zw}(s)=T_1(s)+T_2(s)Q_l(s)T_3(s)=\left[\begin{array}{cc|cc}-0.945&-0.9236&3.135&3.331\\0.8081&-2.875&6.553&7.705\\\hline 0.728&-0.1467&-0.876&-0.4557\\0.1984&0.1734&0&-0.313\end{array}\right]$$

而 $\Phi_\Pi\left[T_{zw}\left((1-e^{j\theta})/(1+e^{j\theta})\right)\right]$, $\theta\in[0,\pi]$ 的最大特征值随频率 θ 的变化如图 2 中的实线所示, 整个曲线位于零值以下, 说明对控制器优化设计后 $T_{zw}(s)$ 满足 IQC 下稳定性判据条件. 从而根据定理 1, 由 $T_{zw}(s)$ 与 Δ 组成的闭环反馈系统是鲁棒稳定的.

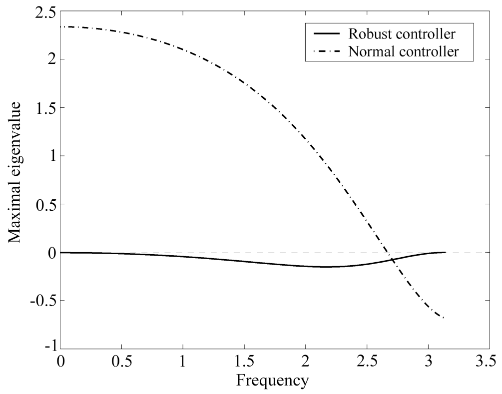

图 2 $\lambda_{\max}(\Phi_\Pi(T))$ 随频率变化曲线

Fig. 2 The variation of $\lambda_{\max}(\Phi_\Pi(T))$ vs frequency

5 结论

IQC 不确定系统鲁棒控制器的设计, 可通过结合 Youla 参数化和稳定性判据转化为控制器设计的凸参数化问题, 通过求解频域线性矩阵不等式, 对控制器参数进行优化, 进而求得鲁棒控制器. 本文所给控制器设计的凸参数化方法, 是一种充分性方法, 其保守性来源于 IQC 下鲁棒稳定性判据本身. 进一步有意义的研究工作是, 当不确定性输入输出关系满足多个不同的 IQC 时的鲁棒控制器设计问题.

References

1 Yakubovich V A. Abstrract theory of absolute stability of nonlinear systems. *Vestnik Lenigrad University, Series 1*, 1977, **41**(13): 99~118

2 Yakubovich V A. Absolute stability of nonlinear systems with a periodically nonstationary linear part. *Soviet Physics Doklady*, 1988, **32**(1): 5~7

3 Yakubovich V A. Dichotomy and absolute stability of nonlinear systems with periodically nonstationary linear part. *Systems and Control Letters*, 1988, **11**(3): 221~228

4 Savkin A V, Petersen I R. Nonlinear versus linear control in the absolute stability of uncertain systems with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(1): 122~127

5 Savkin A V, Petersen I R. Robust H^∞ control of uncertain systems with structured uncertainty. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 1996, **6**(3): 1~14

6 Megretski A. Necessary and sufficient conditions of stability: A multiloop generalization of the criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, **38**(5): 753~756

7 Rantzer A, Megretski A. System analysis via integral quadratic constraints, In: Proceedings of 33th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 1994, 3602~3607

8 Megretski A, Rantzer A. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(6): 819~830

9 Jönsson U, Rantzer A. Duality bounds in robustnees analisis. *Automatica*, 1977, **33**(10): 1835~1844

10 Jösson U. Duality in multiplier-based robustness analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(12): 2246~2256

11 Geng Z Y, Huang L. Robust stability of systems with both parametric and dynamic uncertainties. *Systems and Control Letters*, 2000, **39**(2): 87~96

12 Geng Z Y, Huang L. Robust stability of the systems with mixed uncertainties under the IQC descriptions. *International Journal of Control*, 2000, **37**(9): 776~786

13 Kao C Y, Megretski A, Jösson U. Special fast algorithms for IQC feasibility and optimization problems. *Automatica*, 2004, **40**(2): 239~252

14 Rantzer A, Megretski A. A convex parameterization of robustly stabilizing controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(9): 1802~1808

15 Rantzer. Linear Matrix inequalities for rank one robust synthesis. In: Proceedings of 32th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 1993, 2590~2591

16 Lu J. Robust stabilization for systems with rank-one uncertainty structure. *System & Control Letters*, 2001, **44**(4): 321~331

17 Ghulchak A, Rantzer A. Duality in H^∞ cone optimization. *SAIM Journal on Control and Optimization*, 2000, **41**(1): 253~277

18 Ghulchak A, Rantzer A. Robust controller design under parametric uncertainty via primal-dual convex analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(4): 632~636

19 Langer L, Constantinescu A. Pole placement design using convex optimization criteria for the flexible transmission benchmark. *European Journal of Control*, 1999, **1**(5): 193~207

20 Graebe S F. Guest editorial special section on 'robust control benchmark - new results'. *European Journal of Control*, 1999, **5**(5): 183~184

21 Geng Z Y. Stabilization of the systems with coprime factor uncertainty by convex parameterization approach. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2004, **11**(5-6): 871~884

22 Geng Z Y. Stabilization of the systems with quadratic constraint uncertainties. In: Proceedings of the 24th Chinese Control Conference. Guanzhou: South China University Press, 2005, 718~724

23 Youla D C, Jabr H A, Bongiorno J J. Jr.. Modern Winer-Hopf design of optimal controllers: part II. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, **21**(3): 319~338

24 Francis B A. *LNCiS 88: A Course in H_∞ Control Theory*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987, 42~47

25 Gohberg I, Kaashoek M A, Lerer L. On minimality in the partial realization problem. *Systems & Contrl Letters*, 1987, **9**(2): 97~104

耿志勇 北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室, 力学工程科学系教授. 主要研究方向为鲁棒控制与非线性控制.
E-mail: zygeng@pku.edu.cn
(**GENG Zhi-Yong** Professor at State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems and Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University. His research interest covers robust control and nonlinear control.)