带有随机丢包的最优控制中 Riccati 方程解存在的条件

肖 俊 [1] 徐红兵 [1] 祝 颖 [1]

摘 要 讨论了带有随机丢包的最优控制. 在传感器网络中，控制器与被控对象通过不可靠无线网络通信，因此代数 Riccati 方程由于通信链路的随机丢包产生了新的参数. 证明了当丢包率大于一临界值时，此 Riccati 方程的解不存在. 通过解线性矩阵不等式，得到了这一临界值.

关键词 最优控制, 代数 Riccati 方程, 无线传感器网络

中图分类号 TP13

Solvability Conditions for Riccati Equations of Optimal Control with Random Packet Losses

XIAO Jun[1] XU Hong-Bing[1] ZHU Ying[1]

Abstract Optimal control design with random packet losses is presented in this paper. In a large multihop sensor network, the controllers and the plants usually communicate via unreliable wireless channels, and the algebraic Riccati equation is modified because of the random packet losses. We show that the optimal control policy does not exist when the packet dropping rate is greater than a critical value. This critical value is obtained by solving linear matrix inequality.

Key words Optimal control, algebraic Riccati equation, wireless sensor networks

1 引言

近年来无线传感器网络 (Wireless sensor networks, WSN)[1] 技术的迅速发展，促使我们考虑在通信线路无法保障的情况下如何设计控制系统. 在这一环境中，控制系统的各个组成部分 (被控对象，传感器，估计器，控制器) 彼此在空间上隔离开，通过非同步的传感器节点来进行远距离通信. 无线通信线路的脆弱性导致在这一网络中存在显著的随机丢包和时延. 在实时控制系统中，时延和丢包有可能引起控制指标的恶化，甚至使系统脱离稳定状态.

传统的控制理论假设通信是实时的，即测量数据能在需要时到达观测器，控制命令能完整地到达被控对象. 但在无线传感器网络环境中，尤其在其应用于军事目的时，通常无法保证测量数据和控制命令的即时性和完整性[1]. 因此，基于传统控制理论的原有方法无法直接应用于这种环境中. 在设计和分析控制系统时，必须明确考虑通信因素的影响.

依据分离原理，在线性二次型高斯 (Linear quadratic Gaussian, LQG) 控制中，估计器和控制器可以分开设计. 文献 [2~7] 研究了间断观测条件下估计器的设计. 在估计器可以准确估计被控对象状态的假设下，文献 [8~10] 研究了控制命令存在随机丢包和时延情况下控制器的设计.

本文采用与文献 [9] 相同的模型来讨论带有随机丢包的最优控制问题. 对于代数 Riccati 方程，给出了其收敛特性. 同时论证了临界丢包率的存在，指出文献 [9] 的结论只是本文结论的一个特例.

收稿日期 2005-11-15 收修改稿日期 2006-10-28
Received November 15, 2005; in revised form October 28, 2006
1. 电子科技大学自动化工程学院 成都 610054
1. School of Automation Engineering, University of Electronic and Science Technology of China, Chengdu 610054
DOI: 10.1360/aas-007-0373

2 系统模型建立

考虑如下线性时不变离散系统

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{k+1} &= A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{w}_k \\ \boldsymbol{y}_k &= C\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k \qquad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{1}$$

最优指标为

$$\mathop{E}_{k=0,\dots,N-1}\left\{\boldsymbol{x}'_N Q_N \boldsymbol{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1}\left(\boldsymbol{x}'_k Q_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}'_k R_k \boldsymbol{u}_k\right)\right\}$$

其中 $\boldsymbol{x}_k$ 和 $\boldsymbol{u}_k$ 分别是 n 维和 m 维向量, A, B, C, Q_k, R_k 给定并有其相应的维数, $Q_N \geq 0$, $Q_k \geq 0$, $R_k > 0$. 在本文中, 约定 $P \geq 0 (P > 0)$ 表示非负定矩阵 (正定矩阵). $\boldsymbol{w}_k$ 是系统扰动量, $\boldsymbol{v}_k$ 是测量噪声. $\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 均是独立的高斯白噪声. 这是一个标准的最优控制问题, 很容易通过递推得到其解, 这里不再赘述. 我们仅列出其中的代数 Riccati 方程 [11]：

$$\begin{aligned} K_k =& A'K_{k+1}A + Q_k - \\ & A'K_{k+1}B\left(B'K_{k+1}B + R_k\right)^{-1}B'K_{k+1}A \end{aligned} \tag{2}$$

如果 Q 和 R 为时不变距阵, (A, B) 可控, $\left(A, Q^{1/2}\right)$ 可观, 对于任何半正定对称初始矩阵 K_N, 方程 (2) 有稳态解.

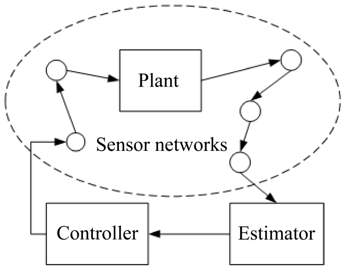


图1 无线传感器网络环境中的控制系统

Fig. 1 Control system via sensor networks

现考虑图1所示的情况. 从控制器发出的命令通过无线传感器网络传递给被控对象. 引言中已经提到, 这个过程中可能会存在显著的随机丢包和时延. 从控制理论的观点来看, 大时延相当于丢包. 因此在本文中, 仅讨论随机丢包而不考虑随机时延的影响以避免问题过于复杂. 同时, 仅考虑从控制器/观测器到被控对象之间存在随机丢包, 没有考虑从被控对象到控制器/观测器之间的随机丢包. 这两条通信线路从本质上来说是相同的, 但若同时考虑这两者的随机丢包会使问题极大的复杂化, 超出了本文关注的范围, 我们将在后续的研究中尝试解决这一难题. 定义二元随机变量 θ_k 来表示在时间 k 控制命令是否传递给了被控对象. 如果被控对象收到了控制命令, $\theta_k=1$, 否则 $\theta_k=0$; 如果 $k\neq s$, θ_k 与 θ_s 相互独立. 同时定义概率分布函数 $p_{\theta_k}(\theta_k=1)=\alpha$. 使用与文献 [9] 相同的方法, 将系统 (1) 改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{k+1}&=A\boldsymbol{x}_k+\theta_kB\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{w}_k\\ \boldsymbol{y}_k&=C\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{v}_k\qquad k=0,1,\dots,N-1\end{aligned}\tag{3}$$

现计算系统 (3) 的最优控制律 [9]

$$\boldsymbol{\mu}_k^*(\hat{\boldsymbol{x}}_k)=L_k\hat{\boldsymbol{x}}_k\tag{4}$$

其中

$$L_k=-\Psi_k\mathrm{E}[\theta_k]B'K_{k+1}A\tag{5}$$

$$\Psi_k=\left(R_k+\mathrm{E}\left[\theta_kB'K_{k+1}B\theta_k\right]\right)^{-1}\tag{6}$$

K_k 由如下递推方程得到

$$\begin{aligned}K_N=&Q_N\\ K_k=&A'K_{k+1}A+Q_k-\\ &A'K_{k+1}B\mathrm{E}[\theta_k]\Psi_k\mathrm{E}[\theta_k]B'K_{k+1}A\end{aligned}\tag{7}$$

注意到 $\mathrm{E}[\theta_k]=\alpha$, 将方程 (7) 改写为 [9]

$$\begin{aligned}K_{k+1}=&A'K_kA+Q_k-\\ &\alpha^2A'K_kB\left(\alpha B'K_kB+R_k\right)^{-1}B'K_kA\end{aligned}\tag{8}$$

此方程与标准代数 Riccati 方程 (2) 相比, 区别在于因为通信链路的随机丢包引入了新的参数 α. 对于这一修改后的代数 Riccati 方程, 其是否有稳态解, 如果有, 需要何种条件是本文要解决的两个主要问题. 在第3节中, 将以定理的形式来讨论方程 (8) 的收敛特性.

3 Riccati 方程的收敛特性

对于方程 (8), Sadjadi[9] 利用 *uncertainty threshold principle*[12, 13] 证明了如果 (A,B) 可控, $\left(A,Q^{1/2}\right)$ 可观, B 可逆, 且 $\max\limits_i|\lambda_i(A)|<1\big/(1-\alpha)^{1/2}$, 则这一 Riccati 方程存在稳定解. 但是, 文献 [9,12,13] 的作者均未讨论如果 B 不可逆, 解是否存在. 众所周知, 在实际的控制系统里, B 不可能总满足可逆这一条件. 因此, 文献 [9] 的结论有巨大的局限性. 而且, 即使上述条件均满足, 文献 [9,12,13] 仅仅指出了解的存在性, 没有给出解的其它任何性质.

在本节中将完善这两个方面. 首先, 我们不再限制 B 可逆, 文献 [9] 的结论将成为我们的一个特例. 其次, 我们将给出方程 (8) 的收敛特性. 下面通过引理和定理的形式给出本文的主要结论. 其证明思路受到了文献 [2] 的启发. 在 [2] 中, 作者研究了间断观测的 Kalman 滤波, 得到了丢包率临界值的上界和下界. 而我们主要关注带有随机丢包的最优控制, 并通过解线性矩阵不等式, 明确得到了使最优控制规律存在的随机丢包率的临界值.

根据方程 (8), 定义

$$\begin{aligned}f_\alpha(X)=&A'XA+Q-\\ &\alpha^2A'XB\left(\alpha B'XB+R\right)^{-1}B'XA\end{aligned}\tag{9}$$

和一个辅助函数

$$\begin{aligned}\Phi(M,X)=&(1-\alpha)\left(A'XA+Q\right)+\\ &\alpha\left(F'XF+V\right)\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $F=A+BM', V=Q+MRM'/\alpha$.

引理 1. 设 $M_p=-A'XB\left(B'XB+R/\alpha\right)^{-1}$, 则 $f_\alpha(X)=\Phi(M_p,X)=\min\limits_M\Phi(M,X)$.

证明.

$$\begin{aligned}f_\alpha(X)=&(1-\alpha)\left(A'XA+Q\right)+\alpha\Big(A'XA+Q-\\ &A'XB\left(B'XB+R/\alpha\right)^{-1}B'XA\Big)\\ =&(1-\alpha)\left(A'XA+Q\right)+\alpha\left(A'XA+Q-\right.\\ &\left.M_pB'XA\right)\\ =&(1-\alpha)\left(A'XA+Q\right)+\alpha\left(F_p'XA+Q\right)\end{aligned}$$

其中 $F_p' = A' + M_p B'$. 注意到

$$\begin{aligned} F_p' XB + M_p R/\alpha =& \left(A' + M_p B'\right) XB + M_p R/\alpha \\ =& A'XB + M_p \left(B'XB + R/\alpha\right) \\ =& 0 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f_\alpha(X) =& (1-\alpha)\left(A'XA + Q\right) + \alpha\left(F_p'XA + Q\right) + \\ & \alpha\left(F_p'XB + M_p R/\alpha\right) M_p' \\ =& \Phi\left(M_p, X\right) \end{aligned}$$

由 $X \geq 0$ 和 $R > 0$, 可知 $\Phi(M, X)$ 是关于 M 的凸函数. 通过解 $\partial\Phi(M,X)/\partial M = 0$, 得到 $M = -A'XB\left(B'XB + R/\alpha\right)^{-1}$, $f_\alpha(X) = \min\limits_M \Phi(M, X)$, 得证. $\square$

引理 2. $f_\alpha(X)$ 是关于 X 的单调不减函数.

证明. 假设 $0 \leq X \leq Y$, 则 $f_\alpha(X) = \Phi(M_X, X) \leq \Phi(M_Y, X) \leq \Phi(M_Y, Y) = f_\alpha(Y)$. $\square$

引理 3. $f_\alpha(X) \geq (1-\alpha) A'XA + Q$.

证明. 注意到 $X \geq 0, R > 0$, 因此

$$\begin{aligned} f_\alpha(X) =& (1-\alpha)\left(A'XA + Q\right) + \\ & \alpha\left(F'XF + Q + M_P R M_P'/\alpha\right) \\ \geq& (1-\alpha)\left(A'XA + Q\right) + \alpha Q \\ =& (1-\alpha) A'XA + Q \end{aligned}$$ $\square$

引理 4. 定义辅助函数 $L(Y) = (1-\alpha) \times (A'YA) + \alpha(F'YF)$. 假设 $\exists\, \bar{Y} > 0$ 使 $\bar{Y} > L\left(\bar{Y}\right)$, 则:

a) $\forall\, W \geq 0, \lim\limits_{k\to\infty} L^k(W) = 0$.

b) 设 $V \geq 0$ 并考虑 $Y_{k+1} = L(Y_k) + V$, 则 $\{Y_k\}$ 有界.

证明.

a) 选择 $0 < r < 1$, 使 $L\left(\bar{Y}\right) < r\bar{Y}$. 对于 $\forall\, W \geq 0$, 选择 $m \geq 0$ 使 $W \leq m\bar{Y}$. 可得 $0 \leq L(W) \leq L\left(m\bar{Y}\right) = mL\left(\bar{Y}\right) \leq mr\bar{Y}$. 由此推出 $0 \leq L^k(W) \leq mr^k\bar{Y}$. 注意到 $0 < r < 1$, 因此对于 $\forall\, W \geq 0, L^k(W) \to 0$.

b)
$$\begin{aligned} Y_k =& L^k(Y_0) + \sum_{t=0}^{k-1} L^t(V) \\ \leq& m_{Y_0} r^k \bar{Y} + \sum_{t=0}^{k-1} m_v r^t \bar{Y} \\ =& \left(m_{Y_0} r^k + m_v \frac{1-r^k}{1-r}\right)\bar{Y} \\ \leq& \left(m_{Y_0} + \frac{m_v}{1-r}\right)\bar{Y} \end{aligned}$$

由此推出 $\{Y_k\}$ 有界. $\square$

引理 5. 如果 $\exists\, \bar{K} > 0, \bar{K} \geq \Phi\left(\bar{M}, \bar{K}\right)$, 则对于 $\forall\, K_0 \geq 0, K_k = f_\alpha^k(K_0)$ 有界.

证明. $\bar{K} \geq \Phi\left(\bar{M}, \bar{K}\right) = L\left(\bar{K}\right) + Q + MRM' \geq L\left(\bar{K}\right)$. 由引理 4, 可得 $\{K_k\}$ 有界. $\square$

定理 1. 如果 $\exists\, \tilde{K} > 0$ 和 $\tilde{M}$, 使 $\tilde{K} > \Phi\left(\tilde{M}, \tilde{K}\right)$, 则:

a) $\forall\, K_0 \geq 0, \lim\limits_{k\to\infty} K_k = \lim\limits_{k\to\infty} f_\alpha^k(K_0) = \bar{K}$, 其中 $\bar{K}$ 与初始 K_0 无关.

b) $\bar{K}$ 是 $f_\alpha(X)$ 的唯一正半定固定点.

证明.

a) 首先考虑 $K_0^1 = 0, K_k^1 = f_\alpha^k(K_0^1)$. 由 $0 = K_0^1 \leq K_1^1$ 和 $K_1^1 = f_\alpha(K_0^1) \leq f_\alpha(K_1^1) = K_2^1 \cdots$, 可得 $0 = K_0^1 \leq K_1^1 \leq K_2^1 \leq \cdots \leq K_k^1$. 根据引理 5, $\{K_k^1\}$ 收敛于 $\bar{K}$. 另一方面，如果 $K_0^2 \geq \bar{K}$, 则 $K_1^2 = f_\alpha(K_0^2) \geq f_\alpha\left(\bar{K}\right) = \bar{K}$. 显然 $K_k^2 \geq \bar{K}$, $\forall\, k$. 因此,

$$\begin{aligned} 0 \leq& K_{k+1}^2 - \bar{K} \\ =& f_\alpha\left(K_k^2\right) - f_\alpha\left(\bar{K}\right) \\ =& \Phi\left(M_{K_k^2}, K_k^2\right) - \Phi\left(M_{\bar{K}}, \bar{K}\right) \\ \leq& \Phi\left(M_{\bar{K}}, K_k^2\right) - \Phi\left(\mathrm{M}_{\bar{K}}, \bar{K}\right) \\ =& L\left(K_k^2 - \bar{K}\right) \end{aligned}$$

由引理 4 a), 当 $k \to +\infty$ 时, $L\left(K_k^2 - \bar{K}\right) \to 0$. 可知 $\{K_k^2\}$ 也收敛于 $\bar{K}$. 最后, 对于 $K_0^1 \leq K_0^3 \leq K_0^2$, 由简单递推可得 $K_k^1 \leq K_k^3 \leq K_k^2$. 又因为 $\{K_k^1\}$ 和 $\{K_k^2\}$ 都收敛于 $\bar{K}$, 可得 $\forall K_0 \geq 0, \lim\limits_{k\to\infty} K_k = \bar{K}$.

b) 假设存在另一个 $\hat{K} = f_\alpha\left(\hat{K}\right)$ 且 $\hat{K} \neq \bar{K}$. 如果选择初始 K_k 为 $K_0 = \hat{K}$, 可得 $\lim\limits_{k\to\infty} K_k = \hat{K} \neq \bar{K}$, 与此定理的 a) 矛盾. 因此, $\hat{K} = \bar{K}$. $\square$

定理 2. 假设 (A, B) 可控, $\left(A, Q^{1/2}\right)$ 可观, A 不稳定, 则 $\exists\, \alpha_c \in [0,1]$, 使如下结论成立:

$$\text{如果 } 0 \leq \alpha \leq \alpha_c,\ \exists\, K_0 \geq 0, \lim_{k\to\infty} K_k = +\infty \tag{11}$$

$$\text{如果 } \alpha_c < \alpha \leq 1,\ \forall\, K_0 \geq 0, K_k \leq P_{K_0}, \forall\, k \tag{12}$$

证明. 假设 $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, 则

$$\begin{aligned} f_{\alpha_1}(X) =& A'XA + Q - \\ & \alpha_1 A'XB\left(B'XB + R/\alpha_1\right)^{-1} B'XA \\ \geq& A'XA + Q - \\ & \alpha_2 A'XB\left(B'XB + R/\alpha_2\right)^{-1} B'XA \\ =& f_{\alpha_2}(X) \end{aligned}$$

因此选择 $\alpha_c = \{\inf \alpha^* : \alpha > \alpha^* \Rightarrow K_k\text{有界}, \forall\, K_0 \geq 0\}$. $\square$

定理 3. $\alpha_c = \arg\inf_\alpha \left[\exists\, X | X > f_\alpha(X)\right]$.

证明. 如果 $\alpha > \alpha_c$, $\exists$ X 使 $X > f_\alpha(X)$. 由引理 3, 可得 $X > (1-\alpha)A'XA + Q$. 因为 $(A, Q^{1/2})$ 可观, 可推出 $\exists$ $\hat{X} \geq 0$ 使 $\hat{X} = (1-\alpha)A'\hat{X}A + Q$. 由上两式相减不难得出 $X - \hat{X} > (1-\alpha)A'\left(X - \hat{X}\right)A$. 因此, $\exists$ $\hat{Q}$ 使 $X - \hat{X} = (1-\alpha)A'\left(X - \hat{X}\right)A + \hat{Q}$. 显然 $X - \hat{X} \geq 0$. 由条件知 $\hat{X} \geq 0$, 即 $X > 0$. 再由引理 5, K_k 有界. □

推论 1. 如果 B 可逆或 A 只有唯一一个不稳定的特征值, α_c 有闭合形式

$$\alpha_c = 1 - \frac{1}{(\max_i |\lambda_i(A)|)^2}$$

证明. 首先考虑 B 可逆的情况. 选择 $M' = -B^{-1}A$, 使 $F = 0$. 则

$$\begin{aligned} f_\alpha(X) &= (1-\alpha)\left(A'XA + Q\right) + \alpha\Big(A'XA + Q - \\ &\quad A'XB\left(B'XB + R/\alpha\right)^{-1}B'XA\Big) \\ &= (1-\alpha)A'XA + Q + \alpha F'XA \\ &= (1-\alpha)A'XA + Q \end{aligned}$$

由定理 3 可得 $X > (1-\alpha)A'XA + Q$. 这是一个 Lyapunov 方程, 当且仅当 $\sqrt{1-\alpha}\max_i|\lambda_i(A)| < 1$, 也就是 $\alpha > 1 - 1/(\max_i|\lambda_i(A)|)^2$ 时, 此方程有唯一正定解. 因此 $\alpha_c = 1 - 1/(\max_i|\lambda_i(A)|)^2$.

如果 A 有唯一一个不稳定的特征值, 利用 Kalman 分解, 在稳态时只需要控制一个系统状态. 由于标量系统与 B 可逆等价, 所以在这种情况下 α_c 也有闭合形式. □

注 1. 文献 [9,12~14] 都仅仅考虑了 B 可逆这一情况, 在这一前提下, α_c 有闭合形式. 通过对比推论 1 和定理 3, 可知该结论是本文的一个特例. 当不再限制 B 可逆时, 有如下定理通过解线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality) 来找到 α_c.

定理 4. $\exists$ $0 \leq Y \leq I$ 和 Z 使 $\alpha_c = \arg\ \inf_\alpha \varphi_\alpha(Y, Z) > 0$. 其中 $\varphi_\alpha(Y, Z)$ 由下页顶部式 (13) 定义.

证明. 如果 $X > f_\alpha(X)$, 则

$$\begin{aligned} & X > (1-\alpha)A'XA + Q + \alpha F'XF + MRM' \\ & \Rightarrow X - (1-\alpha)A'XA - \alpha F'XF > 0 \end{aligned}$$

利用 Schur 补分解, 可得

$$\begin{bmatrix} X - (1-\alpha)A'XA & \sqrt{\alpha}F' \\ \sqrt{\alpha}F & X^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

对上式的 (1,1) 元素再次使用 Schur 补分解, 并经简单变换后可得

$$\begin{bmatrix} X^{-1} & \sqrt{\alpha}X^{-1}F' & \sqrt{1-\alpha}X^{-1}A' \\ \sqrt{\alpha}FX^{-1} & X^{-1} & 0 \\ \sqrt{1-\alpha}AX^{-1} & 0 & X^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

令 $Y = X^{-1}, M = XZ$, 则 $\varphi_\alpha(Y, Z) > 0$. 由定理 3, 并注意到条件 $X > f_\alpha(X)$, 可得 $\alpha_c = \arg\ \inf_\alpha \varphi_\alpha(Y, Z) > 0$. □

当 $\alpha \geq \alpha_c$ 时, K_k 的最终收敛值 $\lim\limits_{k\to\infty} K_k = \lim\limits_{k\to\infty} f_\alpha^k(K_0) = \bar{K}$ 可以通过解如下半正定规划 (Semidefinite program, SDP) 得到.

定理 5. 若 $\alpha \geq \alpha_c$, 则 $\bar{K} = f_\alpha\left(\bar{K}\right)$ 可由如下半正定规划得到

$$\begin{aligned} & \arg\ \max_K \quad \mathrm{Trace}(K) \\ & \text{s.t.} \begin{bmatrix} A'KA - K + Q & \sqrt{\alpha}A'KB \\ \sqrt{\alpha}B'KA & B'KB + R/\alpha \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \quad K \geq 0 \end{aligned}$$

证明. 约束条件相当于对 $K \leq f_\alpha(K)$ 使用 Schur 补分解. 假设 $\hat{K} = f_\alpha\left(\hat{K}\right)$ 是这个方程的一个可行解, 且 $\tilde{K}$ 也是一个可行解但 $\tilde{K} \neq \hat{K} = f_\alpha\left(\hat{K}\right)$. 因此 $\tilde{K} < f_\alpha\left(\tilde{K}\right) = \hat{\hat{K}}$. 可以证明, $\hat{\hat{K}}$ 也是这个优化问题的可行解, 但 $\mathrm{Trace}\left(\hat{K}\right) < \mathrm{Trace}\left(\hat{\hat{K}}\right)$. 这与假设矛盾, 所以 $\tilde{K} = \hat{K}$. □

4 计算机仿真

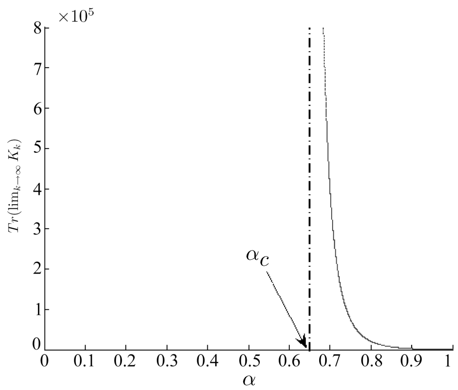


图 2 临界概率 α_c 和 $\mathrm{Trace}\,(\lim_{k\to\infty} K_k)$

Fig. 2 Critical value α_c vs $\mathrm{Trace}\,(\lim_{k\to\infty} K_k)$

考虑如下系统

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.8 & 0 \\ 0 & 1.27 & 5 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = 10\mathrm{I}_3, R = 2$$

$$\varphi_\alpha(Y,Z)=\begin{bmatrix} Y & \sqrt{\alpha}\,(YA'+ZB') & \sqrt{1-\alpha}YA' \\ \sqrt{\alpha}\,(AY+BZ) & Y & 0 \\ \sqrt{1-\alpha}AY & 0 & Y \end{bmatrix} \tag{13}$$

通过定理 4, 得到 $\alpha_c \approx 0.6445$. 将临界概率 α_c 和 $\mathrm{Trace}\left(\lim\limits_{k\to\infty} K_k\right) = \mathrm{Trace}\left(\bar{K}\right)$ 分别在图 2 中标出. 可以看出, 当 α 从 1 逐渐接近 α_c 时, $\mathrm{Trace}\left(\bar{K}\right)$ 趋于无穷.

5　结论

本文研究了带有随机丢包的最优控制问题. 证明当数据包的到达率大于某一临界值时, Riccati 方程的解存在且收敛到某一固定值. 这一结果, 可用于评估控制系统各个部分之间的通信能力, 在设计无线传感器网络这种通信质量难以保障的系统时有很重要的实际意义.

我们假设状态估计器没有随机时延且没有数据丢失, 这在实际的控制系统中很难得到保障. 因此, 在接下来的工作中, 我们将研究估计器和控制器均存在随机时延和丢包的情况.

References

1 Akyildiz I F, Su W, Sankarasubramaniam Y, Cayirci E. A survey on sensor networks. *IEEE Communications Magazine*, 2002, **40**(8): 102～114

2 Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, Poolla K, Jordan M I, Sastry S S. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1453～1464

3 Micheli M. Random Sampling of a Continuous-time Stochastic Dynamical System: Analysis, State Estimation, and Applications [Master dissertation], University of California, Berkeley, 2001. available: http://dam.brown.edu/people/mariom/publications

4 Tatikonda S, Mitter S. Control under communication constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1056～1068

5 Fletcher A K, Rangan S, Goyal V K. Estimation from lossy sensor data: jump linear modeling and kalman filtering. In Proceedings of IEEE 3rd International Symposium on Information Processing in Sensor Networks. Berkeley, 2004. 251～258

6 Tatikonda S, Mitter S. Control over noisy channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1196～1201

7 Smith S, Seiler P. Estimation with lossy measurements: jump estimators for jump systems. *Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(12): 2163～2171

8 Montestruque L A. Antsaklis P. Stability of model-based networked control systems with time-varying transmission times. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1562～1571

9 Azimi-Sadjadi B. Stability of networked control systems in the presence of packet losses. In: Proceedings of IEEE 42nd Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii, 2003. 676～681

10 Hadjicostis C N, Touri R. Feedback control utilizing packet dropping network links. In: Proceedings of 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, 2002, **2**: 1205～1210

11 Bertsekas D P. *Dynamic Programming and Optimal Control*. Athena Scientific, Belmont, MA, USA, 1995

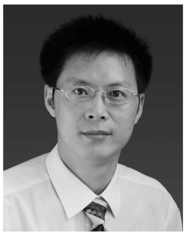
12 Athans M. Ku R, Gershwin S. The uncertainty threshold principle: some fundamental limitations of optimal decision making under dynamic uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1977, **22**(3): 491～495

13 Ku R. Athans M. Further results on the uncertainty threshold principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(5): 866～868

14 Katayama T. On the matrix Riccati equation for linear systems with a random gain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, **21**(5): 770～771

肖 俊　电子科技大学硕士研究生. 主要研究方向为无线传感器网络，网络控制系统. E-mail: xiao@uestc.edu.cn

(**XIAO Jun**　Graduate student at University of Electronic Science and Technology of China. His research interest covers wireless sensor network and networked control system.)



徐红兵　电子科技大学教授，博士生导师. 主要研究方向为无线传感器网络, 复杂系统故障诊断及智能信息处理与控制. 本文通信作者.
E-mail: hbxu@uestc.edu.cn

(**XU Hong-Bing**　Professor at University of Electronic Science and Technology of China. His research interest covers wireless sensor network, fault diagnose of complex system, and intelligent signal process and control. Corresponding author of this paper.)

祝 颖　电子科技大学博士研究生. 主要研究方向为无线传感器网络的拓扑控制. E-mail: zhuying@uestc.edu.cn

(**ZHU Ying**　Ph. D. candidate at University of Electronic Science and Technology of China. Her research interest covers topology control in wireless sensor network.)