

一类控制系数未知但等同高阶非线性系统的稳定控制设计

孙宗耀¹ 刘允刚¹

摘要 本文研究了一类控制系数未知但等同高阶非线性系统的状态反馈稳定控制设计问题。尽管该类系统具有不确定性,即控制系数未知,但本文没有采用自适应技术,而是通过选取适当的设计参数,从而得到了设计该类非线性系统稳定控制器的新方法,并基于反推技术,给出了稳定控制器的设计步骤。所设计的状态反馈控制器使得闭环系统全局渐近稳定,并保持在原点的平衡性。

关键词 高阶非线性系统, 不确定性, 状态反馈稳定控制, 反推方法
中图分类号 TP273

Stabilizing Control Design for a Class of High-order Nonlinear Systems with Unknown but Identical Control Coefficients

SUN Zong-Yao¹ LIU Yun-Gang¹

Abstract In this paper, the state-feedback stabilizing control design is investigated for a class of high-order nonlinear systems with unknown but identical control coefficients. Although there are system uncertainties, i.e., the unknown control coefficients, no adaptive technique but appropriately choosing design parameters is available in control design. Here a new approach is put forward to achieve a stabilizing controller for such a class of nonlinear systems. Using the backstepping approach, the design procedure for the stabilizing controller is presented. The designed state-feedback controller preserves the equilibrium at the origin, and guarantees that the closed-loop systems be globally asymptotically stable.

Key words High-order nonlinear systems, uncertainties, state-feedback stabilizing control, the backstepping approach

1 引言

非线性系统的稳定控制设计是当前控制理论研究的热点问题^[1~5]。反推方法是解决该类问题的主要手段之一,并且通过与其他技术相结合,例如非线性阻尼、调节函数、MT 滤波器,在严格反馈系统控制的各个方面取得了丰硕研究成果^[2,3,6~14]。

作为严格反馈系统控制设计的新近发展, Lin 和 Qian 等人研究了一类称之为高阶非线性系统的稳定控制问题和输出跟踪问题^[9~12],进而发展了传统的反推控制设计方法。但是这些成果都假定该类高阶非线性系统的控制系数恒等于 1 或者存在明确的上下界。一个自然且很有意义的问题是 OP: 当该类系统的控制系数未知、无其上下界信息时,如何设计其稳定的控制? 据作者所知,该问题一直未曾得到研究和解

决。

本文将研究如下高阶非线性不确定性系统的状态反馈稳定控制设计问题

$$\begin{cases} \dot{x}_i = dx_{i+1}^p, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = du^p \end{cases} \quad (1)$$

在(1)中 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ 是系统的状态向量,初值 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$; $u \in \mathbb{R}$ 是系统的控制输入; $p \in \mathbb{N}$ 是正奇数; d 是符号已知,但数值未知的非零常数,称之为控制系数。

显然系统(1)是问题 OP 的一个特殊情况,虽较现有文献所研究的系统简单^[9~12],但无控制系数存在明确的上下界的假设条件,且现有方法不能给出其稳定控制器的构造性设计。本文将通过对系统(1)作适当变形,利用灵活的代数手段以及逐步修正算法的反推设计技术,给出了稳定控制器的设计过程。它的解决将给一般情况下问题 OP 的解决提供可供参考的方法和手段。

2 状态反馈稳定控制器的设计

控制器的设计过程开始于传统积分反推设计方法^[6]所定义的如下的状态变换

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_i = x_i - \alpha_{i-1}(\mathbf{x}_{[i-1]}), & i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (2)$$

并约定 $\alpha_0 = 0, z_{n+1} = 0$, 其中 $\mathbf{x}_{[i]} = [x_1, \dots, x_i]^T$ 。此处 $\alpha_i (i = 1, \dots, n-1)$ 是待定的光滑函数,称之为虚拟控制。令 $\alpha_n = u(\mathbf{x})$ 为实际控制。 $\alpha_i, i = 1, \dots, n$, 在原点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处保持平衡性。

在新坐标 z 下,系统(1)转化为如下形式

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = d \left(\alpha_1^p + \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i \alpha_1^{p-i} \right) \\ \dot{z}_k = d \left(\alpha_k^p + \sum_{i=1}^p C_p^i z_{k+1}^i \alpha_k^{p-i} \right) - \\ \quad d \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_j} x_{j+1}^p, & k = 2, 3, \dots, n-1 \\ \dot{z}_n = du^p - d \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} x_{j+1}^p \end{cases} \quad (3)$$

其中 $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}, i = 0, 1, \dots, p$, 且约定 $0! = 1$ 。

要使得系统(1)的状态全局渐近稳定,只要确保变换后的系统(3)的状态全局渐近稳定即可。下面分 n 步设计使系统(3)状态渐近稳定的控制器 u 。

第 1 步。选择 $V_1 = \frac{1}{2} z_1^2$ 作为本步的 Lyapunov 候选函数。则

$$\dot{V}_1 = dz_1 \left(\alpha_1^p + \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i \alpha_1^{p-i} \right) \quad (4)$$

在此,选择光滑的、在原点处为零的虚拟控制: $\alpha_1(x_1) = -(\text{sgn } d)x_1$, 从而有

$$\dot{V}_1 = -|d|z_1^{p+1} + d \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i (-\text{sgn } d)^{p-i} z_1^{p+1-i} \quad (5)$$

收稿日期 2005-11-16 收修稿日期 2006-1-20
Received November 16, 2005; in revised form January 20, 2006
国家自然科学基金(60304002, 60674036), 山东省科技发展计划(2004GG4204014)资助项目。
Supported by National Natural Science Foundation of P.R. China (60304002, 60674036) and the Science and Technology Development Plan of Shandong Province (2004GG4204014)
1. 山东大学控制科学与工程学院 济南 250061
1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061
DOI: 10.1360/aas-007-0331

注1 如果 x_2 为实际控制 u , 则 $z_2 = 0$, 那么由 (5) 易知 z_1 渐近稳定. 反之, 由于 (5) 右边存在不定项 “ $d \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i (-\text{sgn } d)^{p-i} z_1^{p+1-i}$ ”, 所以不能得到子系统 z_1 渐近稳定的结论. 该项的有效控制将在下面的设计步骤中通过选择恰当的虚拟控制 α_2 来实现.

第2步. 选择 $V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2$ 作为本步的 Lyapunov 候选函数. 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -|d|z_1^{p+1} + d \sum_{i=1}^p C_p^i z_3^i \alpha_2^{p-i} z_2 + dz_2 \alpha_2^p - \\ & d \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \sum_{i=0}^p C_p^i z_2^{i+1} (-\text{sgn } d)^{p-i} z_1^{p-i} + \\ & d \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i (-\text{sgn } d)^{p-i} z_1^{p+1-i} \end{aligned} \quad (6)$$

首先利用 Young's 不等式给出 (6) 右边倒数第一项以及倒数第二项的光滑上界估计

$$\begin{aligned} -d \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \sum_{i=0}^p C_p^i z_2^{i+1} (-\text{sgn } d)^{p-i} z_1^{p-i} &\leq \\ |d|z_2^{p+1} + |d| \sum_{i=0}^{p-1} C_p^i |z_2|^{i+1} |z_1|^{p-i} &\leq \\ |d| \left(1 + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(i+1)C_p^i}{(p+1)\varepsilon_1^{\frac{p+1}{i+1}}} \right) z_2^{p+1} + \\ |d| \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(p-i)\varepsilon_1^{\frac{p+1}{p-i}} C_p^i}{p+1} z_1^{p+1} \end{aligned} \quad (7)$$

以及

$$\begin{aligned} d \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i (-\text{sgn } d)^{p-i} z_1^{p+1-i} &\leq |d| \sum_{i=1}^p \frac{iC_p^i}{(p+1)\varepsilon_1^{\frac{p+1}{p-i}}} z_2^{p+1} + \\ |d| \sum_{i=1}^p \frac{(p+1-i)\varepsilon_1^{\frac{p+1}{p+1-i}} C_p^i}{p+1} z_1^{p+1} \end{aligned} \quad (8)$$

上式中 ε_1 为满足如下不等式的设计参数

$$0 < \varepsilon_1 \leq \min \left\{ \left(\frac{p+1}{4 \sum_{i=1}^p (p+1-i)C_p^i} \right)^{\frac{1}{p+1}}, \left(\frac{p+1}{4 \sum_{i=0}^{p-1} (p-i)C_p^i} \right)^{\frac{1}{p+1}} \right\}$$

由此易知 $\varepsilon_1 < 1$. 将 (7) 和 (8) 代入 (6), 且在不等式右边加减 “ $-|d|z_2^{p+1}$ ”, 整理后得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\frac{|d|}{2} z_1^{p+1} - |d|z_2^{p+1} + \\ & d \left(\alpha_2^p + z_2^p (1 + f_2) \text{sgn } d \right) z_2 + d \sum_{i=1}^p C_p^i z_3^i \alpha_2^{p-i} z_2 \end{aligned} \quad (9)$$

其中, 光滑函数 f_2 的定义易于给出. 如此, 选择如下光滑的、在原点处为零的虚拟控制

$$\alpha_2(\mathbf{x}_{[2]}) = \text{sgn } d \left\{ -z_2(1 + f_2)^{\frac{1}{p}} \right\} \Big|_{z_1=x_1, z_2=x_2-\alpha_1(x_1)} \quad (10)$$

将 (10) 代入 (9), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\frac{|d|}{2} z_1^{p+1} - |d|z_2^{p+1} + \\ & d \sum_{i=1}^p C_p^i (1 + f_2)^{\frac{p-i}{p}} z_3^i (-\text{sgn } d)^{p-i} z_2^{p-i+1} \end{aligned} \quad (11)$$

第 k ($k = 3, 4, \dots, n-1$) 步. 假设前 $k-1$ 步已经设计完毕, 且第 $k-1$ 步的 Lyapunov 候选函数 V_{k-1} 满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k-1} &\leq -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{|d|}{2^{k-1-i}} z_i^{p+1} + \\ & d \sum_{i=1}^p C_p^i (1 + f_{k-1})^{\frac{p-i}{p}} z_k^i (-\text{sgn } d)^{p-i} z_{k-1}^{p-i+1} \end{aligned} \quad (12)$$

其中 f_{k-1} 是有适当定义的光滑函数. 选择 $V_k = V_{k-1} + \frac{1}{2} z_k^2$ 作为本步的 Lyapunov 候选函数. 则沿着 (3) 的解求 V_k 的导数并将 (12) 代入, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{|d|}{2^{k-1-i}} z_i^{p+1} + d \sum_{i=1}^p C_p^i z_{k+1}^i \alpha_k^{p-i} z_k + \\ & dz_k \alpha_k^p - dz_k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i} x_{i+1}^p + \\ & d \sum_{i=1}^p C_p^i (1 + f_{k-1})^{\frac{p-i}{p}} z_k^i (-\text{sgn } d)^{p-i} z_{k-1}^{p-i+1} \end{aligned} \quad (13)$$

和第二步的处理方法类似, 通过虽繁琐但很直接的运算, 最终可以找到光滑的函数 f_k , 使得如下的不等式成立

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -\sum_{i=1}^k \frac{|d|}{2^{k-i}} z_i^{p+1} + d \left(\alpha_k^p + z_k^p (1 + f_k) \text{sgn } d \right) z_k + \\ & d \sum_{i=1}^p C_p^i z_{k+1}^i \alpha_k^{p-i} z_k \end{aligned} \quad (14)$$

至此, 可以设计如下的、适当的虚拟控制 $\alpha_k(\mathbf{x}_{[k]})$ 以实现 (14) 右边第二项的有效控制

$$\alpha_k = \text{sgn } d \left\{ -z_k(1 + f_k)^{\frac{1}{p}} \right\} \Big|_{z_1=x_1, \dots, z_k=x_k-\alpha_{k-1}} \quad (15)$$

将 (15) 代入 (14), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -\sum_{i=1}^k \frac{|d|}{2^{k-i}} z_i^{p+1} + \\ & d \sum_{i=1}^p C_p^i (1 + f_k)^{\frac{p-i}{p}} z_{k+1}^i (-\text{sgn } d)^{p-i} z_k^{p-i+1} \end{aligned} \quad (16)$$

第 n 步. 第 k 步的结论当 $k = n$ 时仍然成立. 因此根据第 k 步的设计过程, 易构造 V_n 和 f_n , 进而可给出实际控制:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \alpha_n(\mathbf{x}) = \\ & \text{sgn } d \left\{ -z_n(1 + f_n)^{\frac{1}{p}} \right\} \Big|_{z_1=x_1, \dots, z_n=x_n-\alpha_{n-1}(\mathbf{x}_{[n-1]}} \end{aligned} \quad (17)$$

因在前面已经约定 $z_{n+1} = 0$, 所以参照 (16) 可知, 该控制使得

$$\dot{V}_n \leq - \sum_{i=1}^n \frac{|d|}{2^{n-i}} z_i^{p+1} \quad (18)$$

至此, 控制设计过程完毕.

下面定理概括了本文的主要结果.

定理 1. 考虑 n 维高阶非线性不确定性系统 (1). 如果按照上小节所给出的迭代设计步骤, 最终得到光滑的状态反馈控制器 $u(\mathbf{x})$, 即式 (17), 那么该控制保持在原点的平衡性, 并使得闭环系统全局渐近稳定.

证明. 由状态反馈控制器 u 的表达式 (17), 易验证该控制器在原点处保持平衡性而且是光滑的. 以下证明闭环系统的渐近稳定性.

由 (17) 可直接得到状态向量 \mathbf{z} 的渐近稳定性, 即: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$. 由此及 z_1 的定义 $x_1 = z_1$ 知 x_1 为渐近稳定的. 假设 $[x_1, \dots, x_{i-1}]^T$ 为渐近稳定的, 其中 $i = 2, 3, \dots, n$. 那么由 $x_i = z_i + \alpha_{i-1}(x_{i-1})$ 和 α_{i-1} 的光滑性易知 x_i 及 $[x_1, \dots, x_i]^T$ 为渐近稳定的. 因此, 由归纳法知 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ 为渐近稳定. \square

3 推广

本文上节给出的设计方法还可以推广来研究如下更一般高阶非线性不确定性系统的状态反馈控制设计问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = d(\mathbf{x}, u, t)x_{i+1}^p, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = d(\mathbf{x}, u, t)(u^p + f(\mathbf{x}, t)) \end{cases} \quad (19)$$

其中 p 为正奇数; $d(\mathbf{x}, u, t)$ 的符号已知且保持不变, 并存在 $d_0 > 0$, 使得 $|d(\mathbf{x}, u, t)| \geq d_0$; $f(\mathbf{x}, t)$ 为关于 \mathbf{x} 和 t 连续的函数, 且 $f(\mathbf{0}, t) = 0, \forall t \geq 0$.

定理 2. 存在连续状态反馈控制 $u(\mathbf{x}, t)$, 其保持在原点的平衡性, 即对任意 $t \geq 0, u(\mathbf{0}, t) = 0$, 并且使得高阶非线性不确定性系统 (19) 全局渐近稳定.

证明. 显然, 上节中的控制器设计步骤的前 $n-1$ 步仍然有效, 这样就得到光滑的 $\alpha_i(x_{[i]}), i = 1, \dots, n-1$, 并且

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &\leq - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|d|}{2^{n-1-i}} z_i^{p+1} + \\ &d \sum_{i=1}^p C_p^i (1 + f_{n-1})^{\frac{p-i}{p}} z_n^i (-\text{sgn } d)^{p-i} z_{n-1}^{p-i+1} \end{aligned} \quad (20)$$

则 Lyapunov 函数 $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq - \sum_{i=1}^n \frac{|d|}{2^{n-i}} z_i^{p+1} + |d| z_n^{p+1} + \\ &d \sum_{i=1}^p C_p^i (1 + f_{n-1})^{\frac{p-i}{p}} z_n^i (-\text{sgn } d)^{p-i} z_{n-1}^{p-i+1} + \\ &dz_n \left(u^p + f(\mathbf{x}, t) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} x_{j+1}^p \right) \end{aligned}$$

如此, 可设计如下连续的, 且在原点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处为零的状态反馈

控制器

$$u = - \left(\sum_{i=1}^p C_p^i (1 + f_{n-1})^{\frac{p-i}{p}} z_n^{i-1} (-\text{sgn } d)^{p-i} z_{n-1}^{p-i+1} + (\text{sgn } d) z_n^p + f - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} x_{j+1}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

使得

$$\dot{V}_n \leq - \sum_{i=1}^n \frac{|d|}{2^{n-i}} z_i^{p+1} \leq - \sum_{i=1}^n \frac{d_0}{2^{n-i}} z_i^{p+1}$$

按照定理 1 的证明方法可证明该控制确保系统 (19) 全局渐近稳定. \square

4 仿真算例

考虑如下二阶非线性不确定性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = dx_2^3 \\ \dot{x}_2 = du^3 \end{cases}$$

其中 $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ 是系统的状态向量, 选择符号已知, 但数值未知的非零常数 $d = 10$.

参照第 2 节所给出的设计步骤, 得到控制器: $u(\mathbf{x}) = -z_2(1 + f_2)^{\frac{1}{3}}$, 其中 $z_2 = x_2 - \alpha_1, \alpha_1 = -x_1$; 选取设计参数 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, 计算出 $f_2 = 50.6782$.

如图 1, 图 2 描述了当系统状态初值为 $x_1(0) = 1.25, x_2(0) = -2.5$ 时的闭环系统的动态行为, 验证了本文方法的有效性和结论的正确性.

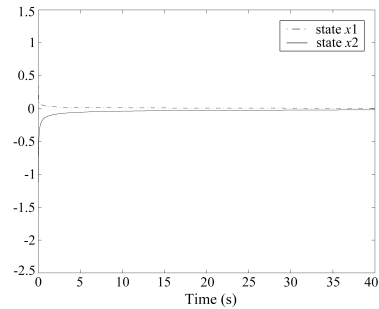


图 1 闭环系统状态轨迹

Fig. 1 State trajectories of the closed-loop system

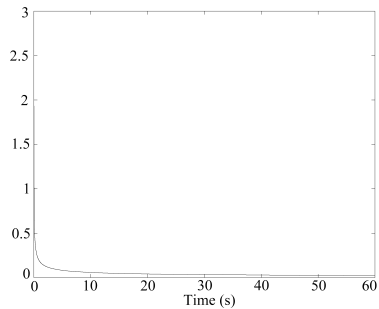


图 2 闭环系统控制输入

Fig. 2 Control input of the closed-loop system

5 结论

本文通过综合传统积分反推设计方法和增加幂次反推设计方法的优点, 分别给出了系统 (1) 和系统 (19), 的光滑

和连续状态反馈稳定控制器的迭代设计步骤. 本文仅解决了引言提及的问题 OP 的一个特殊情况, 需进一步研究的问题还有一些, 例如: 当系统 (1) 的控制系数不等同, 即分别为 d_i , $i = 1, \dots, n$ 时, 如何设计光滑的状态反馈稳定控制器, 使得闭环系统的全局渐近稳定. 该问题正在我们的研究之中, 并已经取得初步结果.

References

- 1 Artstein Z. Stabilizations with relaxed controls. *Nonlinear Analysis*, 1983, **7**(11): 1163~1173
- 2 Ezal K, Pan Z, Kokotović P. Locally optimal backstepping design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(2): 260~271
- 3 Kanellakopoulos I, Kokotović P, Morse S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(11): 1241~1253
- 4 Khalil H K. *Nonlinear Systems*. 3rd edition Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 2002
- 5 Isidori A. *Nonlinear Control Systems*, 3rd edition London: Springer-Verlag, 1995
- 6 Krstić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: John Wiley and Sons, 1995
- 7 Isidori A. *Nonlinear Control Systems II*. New York: Springer-Verlag, 1999
- 8 Lin W, Qian C. Adaptive regulation of high-order lower-triangular systems: Adding a power integrator technique. *Systems & Control Letters*, 2000, **39**(5): 339~364
- 9 Qian C, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(7): 1061~1079
- 10 Qian C, Lin W. Practical output tracking of nonlinearly systems with uncontrollable unstable linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(1): 21~37
- 11 Lin W, Qian C. Adaptive control of nonlinear parameterized systems: the nonsmooth feedback framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(5): 757~774
- 12 Lin W, Qian C. Adaptive control of nonlinear parameterized systems: the smooth feedback case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(8): 1249~1266
- 13 Liu Y, Pan Z, Shi S. Output feedback control design for strict-feedback stochastic nonlinear systems under a risk-sensitive cost. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(3): 509~513
- 14 Liu Y, Zhang J. Minimal-order observer and output-feedback stabilization control design of stochastic nonlinear systems. *Science in China, Series F*, 2004, **48**(4): 527~544

孙宗耀 山东大学控制科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向是非线性控制, 自适应理论等. Email: sunzongyao@sohu.com
(SUN Zong-Yao Ph.D. candidate in School of Control Science and Engineering at Shandong University. His research interest covers nonlinear control and adaptive theory. Email: sunzongyao@sohu.com)

刘允刚 山东大学控制科学与工程学院教授. 主要研究领域为随机控制、非线性系统分析、自适应控制等. 本文通信作者. Email: lygfr@sdu.edu.cn
(LIU Yun-Gang Professor with the School of Control Science and Engineering at Shandong University. His research interest covers stochastic control, nonlinear system analysis, and adaptive control. Corresponding author of this paper. Email: lygfr@sdu.edu.cn)