第 33 卷 第 3 期 自 动 化 学 报 Vol. 33, No. 3
2007 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA March, 2007

预测控制等效集结优化策略的研究

李德伟 [1] 席裕庚 [1] 秦 辉 [1]

摘 要 优化变量的集结策略是减少预测控制器的在线计算量的一种有效方法. 以往的集结策略大都建立在启发式的基础上，难以保持原预测控制器的性能. 本文从预测控制滚动优化只实际实施第一个控制量的特点出发，提出等效集结的概念，证明了在无约束和有终端零约束的情况下，只要适当选取集结矩阵，可以得到一个与集结前完全等效的集结预测控制器，并给出了确定集结矩阵的算法.

关键词 预测控制，集结矩阵，等效集结
中图分类号 TP273

An Equivalent Aggregation Optimization Strategy in Model Predictive Control

LI De-Wei[1] XI Yu-Geng[1] QIN Hui[1]

Abstract Aggregation optimization strategies are effective approach to decreasing the on-line computation cost of model predictive controllers. But most of the past aggregation strategies are heuristic, whose control quality cannot keep up with that of the conventional predictive controllers. Starting with the fact that the predictive control algorithm only applies the first moves to a system, this paper presents an equivalent aggregation strategy. We prove that for the unconstraint and zero terminal constraint MPC, a proper choice of aggregation matrix can make the control quality of the aggregation predictive controller comparable to that of the conventional predictive controller. The algorithm for obtaining the equivalent aggregation matrix is presented, too.

Key words Model predictive control, aggregation matrix, equivalent aggregation optimization strategy

1 引言

模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 是从上世纪 70 年代开始发展起来的一种先进控制方法[1]. 由于其对模型的要求低，鲁棒性能好，可以较方便地处理约束等能力，因此在实际工业过程中得到了广泛应用. 国内外许多学者对该控制方法的稳定性和鲁棒性进行了大量研究[2~4]，得到了丰富的理论结果. 如 Mayne 等人[2] 针对标称系统总结性地给出了稳定性的 4 个条件，较好地解决了标称系统的稳定性问题.

MPC 是一种滚动的优化控制算法：在每一时刻以系统的当前状态为初始状态，通过在线求解一个有限时域的优化问题而得到一个控制序列，并将该序列的第一项作为输入应用到系统当中，在下一个采样时刻，重复上述过程. 由于该算法需要在线求解一个有限时域的优化问题，所以计算效率问题是它在实际应用中的主要问题之一. 为了提高预测控制的在线计算效率，很多学者对此进行了研究. Zheng[5] 提出了一种近似算法，通过采用饱和函数来近似处理优化问题. Ricker 等人[6] 针对预测控制的优化时域提出一种 Blocking 策略，对优化时域进行分块，在块内采用相同的控制量，从而减少优化变量的个数. 在文 [7] 中，杜晓宁等人提出优化变量的集结策略，对在线优化变量进行一定结构的集结，以减少在线优化的变量个数，从而达到减少在线计算量的目的. 文 [7] 同时表明文 [6] 中的 Blocking 策略是一种分段集结策略. 在文 [8] 中，刘斌等应用衰减集结结构提出了一种鲁棒预测控制器. 文 [9] 研究了一种分段集结的预测控制器.

以上这些关于集结策略的研究[6~9]，大都建立在启发式的基础上，其集结结构固定或基本固定，并不能根据不同系统对象而进行结构上的改变. 同时，采用近似算法或以往的集结策略后的预测控制器的控制质量难以保持和原预测控制器相同. 针对上述问题，本文提出了等效集结的概念，证明了在无约束和有终端零约束条件下，只要适当选取集结矩阵，就可以得到一个与集结前完全等效的集结预测控制

收稿日期 2006-7-5 收修改稿日期 2006-10-16
Received July 5, 2006; in revised form October 16, 2006
国家自然科学基金 (60474002, 60674041), 国家 "863" 计划 (2006AA04Z173) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(60674002, 60674041) and National Hi-Tech Research and Development Plan of P. R. China(2006AA04Z173)
1. 上海交通大学自动化系 上海 200240
1. Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong Unversity, Shanghai 200240
DOI: 10.1360/aas-007-0302

器，并给出了等效集结的集结矩阵的计算方法. 该计算方法根据具体的控制对象进行计算，以此方法所得到的集结矩阵可以保证系统的控制质量不变.

2 优化变量的集结策略

考虑一个线性的控制对象

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{1}$$

其中 $A \in R^{n\times n}$，$B \in R^{n\times m}$. 其预测控制器在 k 时刻的优化问题可以表示为

$$\begin{aligned} &\min_{U(k)} J(k) = X(k)^{\mathrm{T}}QX(k) + U(k)^{\mathrm{T}}RU(k) \\ &\text{s.t.}\quad X(k) = Sx(k|k) + GU(k) \\ &\qquad X(k) = [x(k+1|k)^{\mathrm{T}}, x(k+2|k)^{\mathrm{T}}, \dots, \\ &\qquad\qquad x(k+N|k)]^{\mathrm{T}} \\ &\qquad U(k) = [u(k|k)^{\mathrm{T}}, u(k+1|k)^{\mathrm{T}}, \dots, \\ &\qquad\qquad u(k+N-1|k)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{2}$$

这里 $S = \begin{pmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{pmatrix}$,

$$G = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ A^{N-1}B & \cdots & \cdots & AB & B \end{pmatrix},$$

N 为系统控制时域长度，且 $Q > 0$，$R > 0$.

式 (2) 优化问题的优化变量个数为 Nm. 对于实际系统，该优化问题还需加入控制输入和系统状态约束，同时为了保证系统的稳定性通常还要加入终端状态约束. 这个非线性优化问题的计算复杂性随着优化变量数目的增多而迅速增大. 这个矛盾给实际在线实施带来了较大困难.

文 [7] 提出对预测控制器的在线优化问题的优化变量按某种结构进行集结，将原高维的优化变量用一组低维的集结变量来代替，从而减少在线优化变量的个数. 集结策略可以表示成一般的线性变换，即

$$U(k) = HV(k) \tag{3}$$

这里 $V(k) = \begin{pmatrix} v_1^{\mathrm{T}}(k) & v_2^{\mathrm{T}}(k) & \dots & v_s^{\mathrm{T}}(k) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，($s < N$) 为集结优化变量，$v_i(k) \in R^m$，$H$ 为 $Nm \times sm$ 维集结矩阵，可表示为：

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \cdots & H_{Ns} \end{pmatrix}$$

其中 $H_i = \begin{pmatrix} H_{i1}^{\mathrm{T}} & \cdots & H_{is}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为 $m \times sm$ 维矩阵.

则优化问题 (2) 转化为

$$\begin{aligned} &\min_{V(k)} J(k) = X(k)^{\mathrm{T}}QX(k) + U(k)^{\mathrm{T}}RU(k) \\ &\text{s.t.}\quad X(k) = Sx(k|k) + GU(k) \\ &\qquad U(k) = HV(k) \end{aligned} \tag{4}$$

其中 S，G，$X(k)$，$U(k)$ 和式 (2) 中定义相同.

文 [7] 中指出振幅衰减集结策略、分段集结策略、预测函数控制等都可以表示成为一般的集结策略描述. 但在集结策略和集结变量的定义中，文 [7] 将集结变量 $V(k)$ 中的每个分量 v_i 的维数设定为系统输入变量的维数. 这种集结变量的选取方法，增加了集结变量的结构约束，造成结果较为保守. 因此本文从集结的数学表达出发，采用更为一般的方法，将集结变量的分量 v_i 取为标量，不再受到输入维数的限制，则 s 为在线优化变量个数. 这样覆盖了文 [7] 中的情况.

集结优化策略的本质是一种高维的优化变量空间到低维空间的映射. 这种映射关系对应着相应的预测控制策略，因此集结矩阵的选取对于控制器的性能有重要影响. 以往的研究都没有深入探讨采用集结策略前后的预测控制系统的性能变化，这正是本文所要研究的问题.

3 问题描述

考虑标称系统对象 (1)，作以下假设：

假设 1. 系统完全可控，可控指数为 l 且 $N > l$.

假设 2. 集结矩阵 H 是一个列满秩，且不存在全零行的矩阵.

对于该对象，其预测控制器在 k 时刻的在线优化问题由式 (2) 表示. 本文所要研究的问题是：可否寻找一种集结策略 (3)，将优化问题 (2) 转化为集结优化问题 (4)，在有效减少在线计算量的同时，能够保证系统的控制质量不变. 由于预测控制器在每一时刻求解优化问题得到的控制量只有第一个控制量 (m 维) 实施到系统对象，所以这个问题的本质就是要使集结前后的预测控制器的优化结果的第一个控制量 (m 维) 相等，即等效集结.

定义 1. 等效集结：指预测控制器在集结前后的实际输出控制量保持不变.

为了讨论方便，这里给出本文所使用的主要引理.

引理 1. 齐次线性方程组 $\varGamma x = 0$，$\varGamma \in R^{k\times d}$ 且 $k < d$，$\varGamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_d \end{pmatrix}$，如果 a_i 与其他列向量线性无关，则方程组的解的第 i 个元素 x_i 恒等于 0.

证明. 由 $\varGamma x = 0$ 可得，$a_1x_1 + \cdots + a_dx_d = 0$. 若 $x_i \neq 0$，则

$$a_i = -\frac{1}{x_i}(a_1x_1+\cdots+a_{i-1}x_{i-1}+a_{i+1}x_{i+1}+\cdots+a_dx_d)$$

这和 a_i 与其他列向量线性无关矛盾，所以 x_i 恒等于零. □

对于一个矩阵 $\varGamma \in R^{k\times d}$，$k < d$，如果 $\mathrm{rank}(\varGamma) = k$，可以将 $\varGamma$ 按列的方式分块成 $[\varGamma_1 \vdots \varGamma_2]$，$\varGamma_1 \in R^{k\times k}$，$\varGamma_2 \in R^{k\times(d-k)}$，$\mathrm{rank}(\varGamma_1) = k$，这里可以对 $\varGamma$ 作适当的列变换得到这样的分块. 我们记 $\varGamma_0 = [\varGamma_1 \vdots 0]$.

另外，取 $\varPsi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \varPsi_1 \end{pmatrix}$，$\varPsi \in R^{d\times g}$，其中 $I \in R^{k\times k}$，$\varPsi_1 \in R^{(d-k)\times(g-k)}$，$d > g > k$，且 $\mathrm{rank}(\varPsi) = g$. 则 $\varGamma_0\varPsi = [\varGamma_1 \vdots 0]$.

针对上面的 $\varGamma$，$\varGamma_0$，$\varPsi$，$\varPsi_1$，有下面的引理：

引理 2. 对于上面提到的矩阵 $\varGamma$，存在 $\varGamma x = 0$ 的解空间的基的表示 X，以及 $\varGamma\varPsi y = 0$ 的解空间的基 Y，使 $X\varPsi_1 = \varPsi Y$ 成立.

证明. 方程组 $\varGamma x = 0$ 的解空间可以取得以下的一个基 $X = \begin{pmatrix} -\varGamma_1^{-1}\varGamma_2 \\ I \end{pmatrix}$，$I$ 为适当维数的单位矩阵.

方程组 $\varGamma\varPsi y = 0$ 有一个解空间的基 $Y = \begin{pmatrix} -\varGamma_1^{-1}\varGamma_2\varPsi_1 \\ I \end{pmatrix}$.

所以可得 $X\varPsi_1 = \varPsi Y$. □

引理 3. 矩阵 $W \in R^{Nm\times Nm}$，$H \in R^{Nm\times s}$ 且 $\mathrm{rank}(W) = Nm$，$\mathrm{rank}(H) = s$，将 W 按列分成两块 $[W_1 \vdots W_2]$，$W_1 \in R^{Nm\times m}$，$W_2 \in R^{Nm\times(Nm-m)}$，如果 $\mathrm{rank}(H^{\mathrm{T}}W_2) = s - m$，则 $H^{\mathrm{T}}W_1$ 中的列向量和 $H^{\mathrm{T}}W$ 中的其他列向量线性无关.

证明. 因为 W 满秩，H 为列满秩，所以 $\mathrm{rank}(H^{\mathrm{T}}W) = s$.

将 W 按列分成两块 $[W_1 \vdots W_2]$，$W_1 \in R^{Nm\times m}$，$W_2 \in R^{Nm\times(Nm-m)}$.

由 $\mathrm{rank}(H^{\mathrm{T}}W_2) = s - m$，即 $H^{\mathrm{T}}W_2$ 中有 $s - m$ 个列向量线性无关，且其他列向量可以由这些列向量线性表出. 设 $H^{\mathrm{T}}W_2 = [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{s-m}\beta_1\cdots\beta_{Nm-s}]$，其中 α_i 是 $s - m$ 个线性无关的列向量，β_i 为其他列向量，且 $\beta_i = \lambda_{1i}\alpha_1 + \lambda_{2i}\alpha_2 + \cdots + \lambda_{(s-m)i}\alpha_{s-m}$.

将 $H^{\mathrm{T}}W_1$ 写成列向量形式 $[\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m]$，如果当中有列向量 γ_1 和 $H^{\mathrm{T}}W$ 当中的其他列向量线性相关，则

$$\gamma_1 = \lambda_1\gamma_2 + \cdots + \lambda_{m-1}\gamma_m + \lambda_m\alpha_1 + \cdots + \lambda_{s-1}\alpha_{s-m}$$

所以 γ_1 可以由 $s - 1$ 个列向量表出，而 β_i 可以由 α_i 线性表出，所以 $\mathrm{rank}(H^{\mathrm{T}}W) = s - 1$，这和 $\mathrm{rank}(H^{\mathrm{T}}W) = s$ 矛盾，所以 $H^{\mathrm{T}}W_1$ 的列向量线性无关，且和 $H^{\mathrm{T}}W_2$ 中的列向量也线性无关. □

4 无约束预测控制等效集结优化策略

无约束预测控制是预测控制器的基本形式，对它的研究有利于找到等效集结的结构.

如第 2 节所述，一般的传统的无约束预测控制器在 k 时刻的优化问题可以由式 (2) 表示. 采用集结优化策略后，即 $U(k) = HV(k)$，优化变量变成 $V(k)$，式 (2) 改写为式 (4). 这里 H 为待求的集结矩阵，$H \in R^{Nm\times s}$，s 为集结后优化变量的个数，$s < Nm$.

因为式 (2) 和 (4) 都是无约束的优化问题，所以可以直接求解其解析解.

对于式 (2) 的问题：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J(k)}{\partial U(k)} = 0 \\ &(G^{\mathrm{T}}QG + R)U(k) = -G^{\mathrm{T}}QSx(k) \end{aligned} \tag{5}$$

对于式 (4) 的问题：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J(k)}{\partial V(k)} = 0 \\ &(GH)^{\mathrm{T}}Q(Sx(k) + GHV(k)) = -H^{\mathrm{T}}RHV(k) \\ &((GH)^{\mathrm{T}}Q(GH) + H^{\mathrm{T}}RH)V(k) = -(GH)^{\mathrm{T}}QSx(k) \end{aligned} \tag{6}$$

分析式 (5) 和式 (6) 可以得到以下定理：

定理 1. 对于系统对象的输入维数为 m，控制时域为 N 的无约束预测控制器，总存在一个集结变量数 $s > m$ 的等效集结矩阵.

证明. 由式 (5) 和式 (6) 可以得到以下等式：

$$\begin{aligned} ((GH)^{\mathrm{T}}Q(GH) + H^{\mathrm{T}}RH)V(k) &= H^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}QSx(k) \\ &= H^{\mathrm{T}}(G^{\mathrm{T}}QG + R)U(k) \end{aligned}$$

$$H^{\mathrm{T}}(G^{\mathrm{T}}QG + R)(HV(k) - U(k)) = 0 \tag{7}$$

式 (7) 也可以写成 $H^{\mathrm{T}}(G^{\mathrm{T}}QG + R)\xi = 0$.

所以，等效集结就是要使 ξ 的前 m 个元素恒为零. 由于 Q 和 R 为正定矩阵，所以 $(G^{\rm T}QG+R)$ 是一个满秩矩阵. 将 $(G^{\rm T}QG+R)$ 按列分成两块 $[W_1 \vdots W_2]$. 由引理 1 和引理 3 可知，要达到等效集结就是要使 $\mathrm{rank}(H^{\rm T}W_2)=s-m$.

由于 $W_2=[v_1v_2\cdots v_{Nm}]^{\rm T}$ 是一个 $Nm\times(Nm-m)$ 的矩阵, 其列满秩. 所以 W_2 中一定存在 $Nm-m$ 个行向量线性无关, 不妨设为 $v_1^{\rm T}$, $v_2^{\rm T}$, $\cdots$, $v_{Nm-m}^{\rm T}$, 其余行 v_i 可以由它们线性表出, 即 $v_i^{\rm T}=\lambda_{i,1}v_1^{\rm T}+\cdots+\lambda_{i,Nm-m}v_{Nm-m}^{\rm T}$. 这样, 只需取 H 中的一列 ω_j 为 $[\lambda_{i,1}\lambda_{i,2}\cdots\lambda_{i,Nm-m}\,0\cdots\ 0\ -1\ 0\cdots0]^{\rm T}$, 其中 $j=1,\cdots m$, $[0\cdots0\ -1\ 0\cdots0]^{\rm T}$ 为 $m\times1$ 维, 则 $H^{\rm T}W_2$ 的第 j 行为 $\lambda_{i,1}v_1^{\rm T}+\cdots+\lambda_{i,Nm-m}v_{Nm-m}^{\rm T}-v_i^{\rm T}=0$, $i=Nm-m+1,\cdots,Nm$. 由 $H^{\rm T}W_2\in R^{s\times(Nm-m)}$，且 $Nm-m>>s$，所以按上述的选取方法，总可以得到一个 H 矩阵，使 $\mathrm{rank}(H^{\rm T}W_2)=s-m$. □

定理 2. 对于系统对象的输入维数为 m，控制时域为 N 的无约束预测控制器，当上述矩阵 W_2 的各行均能由其他各行线性表出，则其等效集结矩阵的集结变量个数的最小值为 m，否则为 $m+1$.

证明. 定理 1 说明了无约束预测控制器等效集结的存在性. 对于定理 1 中的情况，当矩阵 W_2 的各行均能由其他各行线性表出，则 $v_i^{\rm T}=\lambda_{i,1}v_1^{\rm T}+\cdots+\lambda_{i,Nm-m}v_{Nm-m}^{\rm T}$，$i=Nm-m+1,\cdots,Nm$ 中没有一个系数恒为零，此时可以取集结变量数 $s=m$，此时按定理 1 中的选取方法总存在一个 H 使 $\mathrm{rank}(H^{\rm T}W_2)=s-m=0$；否则为了保证集结矩阵 H 无全零行，可以取 $s=m+1$，集结矩阵 H 中的第 $m+1$ 列中对应恒为零系数的元素取为 1，其余取为零，则 $\mathrm{rank}(H^{\rm T}W_2)=s-m=1$. 所以集结矩阵的集结变量个数为 m 或 $m+1$ 就可以达到等效集结的目的.

当集结变量个数少于 m，$\mathrm{rank}(H^{\rm T}(G^{\rm T}QG+R))<m$，则 $H^{\rm T}(G^{\rm T}QG+R)\xi=0$ 的解空间的维数大于 $Nm-m$，也就是说不能保证这个方程的解的前 m 个分量为固定值零，也就不能保证等效，所以等效集结矩阵的集结变量个数最少为 m.

对于矩阵 W_2 存在某些行不能由其他各行线性表出，由于前面关于集结矩阵的定义 (无全零行)，则等效集结变量最小值为 $m+1$. 定理得证. □

说明. 从定理 2 可以得到，由具体系统决定等效集结的最少集结变量个数为 m 或 $m+1$. 也就是说，当集结变量的个数超过 m 或 $m+1$ 时，一定存在等效集结矩阵. 但等效集结矩阵的形式是不唯一的. 同样集结变量个数的条件下，只要保证 $H^{\rm T}(G^{\rm T}QG+R)$ 的前 m 列与其他列线性无关即可.

下面给出计算无约束预测控制器等效集结矩阵的算法.

算法 1.

1) 计算 $W=(G^{\rm T}QG+R)$，并且去掉 W 的前 m 个列向量，得到 $W_2=[a_{m+1}\cdots a_i\cdots a_{Nm}]$.

2) 把 W_2 写成 $W_2=\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_{Nm}\end{pmatrix}$，并找到 W_2 中 m 个行向量 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$，使剩下的 $(Nm-m)$ 个行向量组成的矩阵 W_3 满秩.

3) 依次求出 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 每个行向量由 W_3 的线性表示的系数，并构造列向量 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1&0&-a_{1i}&\cdots&-a_{(Nm-m)i}\end{pmatrix}^{\rm T}$，这里 1，0，和 $-a_{ij}$ 的位置和 W_3 以及 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 在 W_2 中的行位置对应，i 代表 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 中第 i 个向量.

4) 由 3) 中构造的列向量组成集结矩阵 H. 如果这个 H 中存在全零行，则增加一列，该列中对应原 H 中全零行的元素取为 1，其余取 0.

5 有终端零约束预测控制等效集结优化策略

终端零约束是为了理论上保证预测控制器的稳定性而引入的约束. 加入终端零约束后，原无约束预测控制器 (2) 可以写成

$$\begin{aligned}\min_U\ & J(k)=X^{\rm T}QX+U^{\rm T}RU\\ \text{s.t.}\ \ & X=Sx(k|k)+GU\\ & x(k|k)=x(k)\\ & x(k+N|k)=0\end{aligned}\tag{8}$$

这里 $U=[u(k|k)^{\rm T},\dots,u(k+N-1|k)^{\rm T}]^{\rm T}$.

考察以上优化问题的可行解可知，所有的可行解必须满足终端零约束，即

$$\begin{aligned}x(k+N|k)=&A^Nx(k|k)+A^{N-1}Bu(k|k)+\\&\cdots+Bu(k+N-1|k)\\=&0\end{aligned}$$

由上式可得

$$-A^Nx(k|k)=\begin{pmatrix}A^{N-1}B & A^{N-2}B & \cdots & B\end{pmatrix}U\tag{9}$$

由假设 1 可知：$\mathrm{rank}([A^{l-1}B,A^{l-2}B,\cdots,B])=n$，且在 $A^{l-1}B,A^{l-2}B,\cdots,B$ 中有 n 个不相关的列向

量组成 $[A^{l-1}B, A^{l-2}B, \cdots, B]$ 的基，这里将这些不相关的列向量记为 $\Theta = [h_1, h_2, \cdots, h_n]$. 由线性方程组理论可知，线性方程组 (9) 的解可以由 $[A^{N-1}B, A^{N-2}B, \cdots, B]$ 的零解空间和特解表示，即可以表示成形式

$$U = U_0K + U^* \tag{10}$$

其中 U^* 为特解，$[A^{N-1}B, A^{N-2}B, \cdots, B]U^* = -A^N x(k)$，且 $U^* = [(-\Theta^{-1}A^N x(k|k))^{\mathrm{T}}, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$ 为该方程组的一个特解，为了表示方便这里将 U^* 中非零项写在一起表示；U_0 为零解空间的基，$[A^{N-1}B, A^{N-2}B, \cdots, B]U_0 = 0$，采用引理 2 中线性方程组的通解的类似方式求取，K 为不受约束的组合系数.

注意：对于一个确定的系统，$[A^{N-1}B, A^{N-2}B, \cdots, B]$ 是确定的，所以 U_0 是确定的，而 U^* 是由系统 k 时刻的状态决定的.

将式 (10) 代入式 (8)，可得

$$\begin{aligned}
&\min_K J(k) = X^{\mathrm{T}}QX + U^{\mathrm{T}}RU\\
&\text{s.t.}\quad X = Sx(k|k) + G(U_0K + U^*)\\
&\qquad\quad\ = Sx(k|k) + GU^* + GU_0K\\
&\qquad\quad x(k|k) = x(k)
\end{aligned} \tag{11}$$

记 $G_1 = GU_0$. 这是个无约束的优化问题.

求解优化问题 (11)，可以得到

$$-(G_1^{\mathrm{T}}QG_1 + U_0^{\mathrm{T}}RU_0)K = G_1^{\mathrm{T}}QSx(k|k) + G_1^{\mathrm{T}}QGU^* + U_0^{\mathrm{T}}RU^* \tag{12}$$

当采用集结优化策略后，首先应保证系统仍然可控，由第 4 节中引理 2 所述可知，如果集结矩阵 H 采用该引理中矩阵 Ψ 的结构，即 $H = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & H_1\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{rank}([A^{N-1}B, A^{N-2}B, \cdots, B]H) = n$，且 $[A^{N-1}B, A^{N-2}B, \cdots, B]H$ 中仍然包含 $\Theta = [h_1, h_2, \cdots, h_n]$. 同时为了保证集结后系统具有优化的自由度，取 $s > n$.

采用集结优化策略后，优化问题 (8) 可以写成

$$\begin{aligned}
&\min_{V(k)} J(k) = X^{\mathrm{T}}QX + U^{\mathrm{T}}RU\\
&\text{s.t.}\quad X = Sx(k|k) + GU\\
&\qquad\quad x(k|k) = x(k)\\
&\qquad\quad x(K+N|k) = 0\\
&\qquad\quad U = HV(k)
\end{aligned} \tag{13}$$

同式 (8) 的情况相同，集结后仍然要满足终端零约束，即

$$\begin{aligned}
x(k+N|k) = A^N x(k|k) + [A^{N-1}B, A^{N-2}B,\\
\cdots, B]HV = 0\\
-A^N x(k|k) = [A^{N-1}B, A^{N-2}B, \cdots, B]HV
\end{aligned}$$

由于 $s > n$，这个方程组的解也可以表示为 $V = V_0K' + V^*$，V^* 为特解，V_0 为零解空间的基，K' 为不受约束的组合系数. 由于集结矩阵要保证系统可控性，所以按上面所述的 H 的结构，可以得到一个特解 $V^* = [(-\Theta^{-1}A^N x(k|k))^{\mathrm{T}}, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$，$V^*$ 是一个 s 维的列向量，且 $U^* = HV^*$. 由引理 2，又可以得到 $HV_0 = U_0H_1$，所以 $HV = U_0H_1K' + U^*$. 优化问题 (13) 又可以表示成

$$\begin{aligned}
&\min_{K'} J(k) = X^{\mathrm{T}}QX + U^{\mathrm{T}}RU\\
&\text{s.t.}\quad X = Sx(k|k) + (G_1H_1K' + GHV^*)\\
&\qquad\quad x(k|k) = x(k)
\end{aligned} \tag{14}$$

这样原有约束的优化问题转化为一个无约束的优化问题，求解该问题可得

$$\begin{aligned}
&-H_1^{\mathrm{T}}(G_1^{\mathrm{T}}QG_1 + U_0^{\mathrm{T}}RU_0)H_1K'\\
&= H_1^{\mathrm{T}}(G_1^{\mathrm{T}}QSx(k|k) + G_1^{\mathrm{T}}QGU^* + U_0^{\mathrm{T}}RU^*)
\end{aligned} \tag{15}$$

分析式 (15) 和 (12)，可以得到以下定理.

定理 3. 对于系统对象的输入维数为 m，系统维数为 n，控制时域为 N 的有终端零约束的预测控制器，当集结变量个数 $s \geq n + m$ 或 $s \geq n + m + 1$ 时一定存在等效集结矩阵.

证明. 由式 (15) 和 (12) 可以得到

$$\begin{aligned}
&H_1^{\mathrm{T}}(G_1^{\mathrm{T}}QG_1 + U_0^{\mathrm{T}}RU_0)K\\
&\quad = H_1^{\mathrm{T}}(G_1^{\mathrm{T}}QG_1 + U_0^{\mathrm{T}}RU_0)H_1K'
\end{aligned}$$

即

$$H_1^{\mathrm{T}}(G_1^{\mathrm{T}}QG_1 + U_0^{\mathrm{T}}RU_0)(H_1K' - K) = 0 \tag{16}$$

$(G_1^{\mathrm{T}}QG_1 + U_0^{\mathrm{T}}RU_0)$ 是一个方阵，其中 $U_0^{\mathrm{T}}RU_0$ 是一个正定的方阵 (由 U_0 的结构可知)，所以 $(G_1^{\mathrm{T}}QG_1 + U_0^{\mathrm{T}}RU_0)$ 是一个满秩的方阵. 所以问题转化为一个无约束的预测控制等效集结问题，由定理 2 可以得到，H_1 的列数 (即 H_1 对应的集结变量个数) 的最小值为 m 或 $m + 1$，再加上已经确定的 n 个变量，所以总共的集结后优化变量为 $n + m$ 或 $n + m + 1$. 当集结变量 s 多于 m 或 $m + 1$ 时，只要保证 $H_1^{\mathrm{T}}(G_1^{\mathrm{T}}QG_1 + U_0^{\mathrm{T}}RU_0)$ 的前 m 列与其他列线性无关，则该矩阵也为等效集结矩阵. □

说明. 和定理 2 类似，由具体系统决定终端零约束的等效集结的集结变量个数为 $n + m + 1$ 或 $n + m$，等效集结矩阵的形式也是不唯一的.

由定理 3，我们可以得到有终端零约束的等效集结矩阵的算法.

算法 2.

1) 使用算法 1 计算 H_1.

2) 在 H_1 中将对应于 h_1，h_2，$\cdots$，h_n 的 1 元素所在的行列插入，即可得到 H，具体方法如下：

$$H_1 = \begin{pmatrix} * & & * \\ \vdots & & \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ * & & * \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H = \begin{pmatrix} * & & * & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ * & & * & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ * & & * & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ * & & * & 0 & \end{pmatrix} \leftarrow \text{插入行}$$

6　仿真算例

本节通过一个仿真实例，比较未集结系统、等效集结 (本文提出的算法) 系统的控制性能，以验证本文方法的有效性.

考虑一个双输入双输出的对象

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 0.99 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} u(k)$$

这是一个不稳定的对象，其中输入矩阵 B 的秩为 2，是一个完全可控系统.

考虑一个第 5 节中式 (13) 有终端零约束的预测控制器，取 Q, R 为适当维数的单位矩阵，控制时域 $N = 20$. 使用第 5 节中算法 2 可以计算得到集结矩阵的结构如下 (因篇幅原因，只写出结构，具体参数可由算法 2 计算得到)：

$$H = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & * & \cdots & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & I_{2\times 2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

这里, $* \cdots * \cdots *$ 表示 2×36 的矩阵.

采用以上的集结矩阵将原有的 40 个优化变量集结成 4 个，大大减少了优化变量个数，降低了在线计算量.

设系统初值为 $[2, 2]$，仿真时间为 100 个采样周期. 通过仿真得到集结后的系统运行轨迹见图 1，未采用集结策略的系统运行轨迹见图 2，集结前后的控制量变化的比较见表 1.

从图 1 和图 2 可以看到集结前后系统的运行轨迹完全相同. 从表 1 中的控制量的比较可以看出，集结前的控制量和等效集结的控制量是相等的，所存在的差值只是由于不同的数值计算引起的.

仿真中控制量的比较和系统运行轨迹的比较都证实了本文中的集结策略的等效性，同时证明本文给出的求取等效集结矩阵算法的有效性.

图 1　集结后的系统轨迹
Fig. 1　The state trajectory with aggregation

图 2　未集结的系统轨迹
Fig. 2　The state trajectory with no aggregation

7　结论

预测控制算法的在线计算量问题一直是预测控制在实际应用中的一个重要问题. 本文应用优化变量集结的思想，提出等效集结的概念，目的在于减少计算量的同时，保证系统的控制质量不变. 文中讨

表 1 控制量比较
Table 1 Comparing the control pulses

时刻	未集结控制量 $u1$	等效集结控制量 $u1$	差值	未集结控制量 $u2$	等效集结控制量 $u2$	差值
1	-1.883	-1.886	0.003	-1.293	-1.295	0.002
5	0.613	0.615	-0.002	-0.263	-0.261	-0.002
10	-0.057	-0.059	0.002	-0.188	-0.188	0.000
15	0.037	0.037	0.000	-0.062	-0.062	0.000
20	0.005	0.005	0.000	-0.027	-0.027	0.000
25	0.004	0.003	0.001	-0.011	-0.011	0.000
30	0.001	0.002	-0.001	-0.004	-0.004	0.000
35	0.000	0.000	0.000	-0.003	-0.002	-0.001
40	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.001	0.000
45	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
50	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

说明：因为 50 个采样周期后系统状态已经到达原点，控制量变为零，所以这里就不再列出后 50 个控制量.

论了两种情况下的等效集结问题，给出了求解等效集结矩阵的算法. 通过该算法求解得到的集结矩阵，在较大地减少优化变量个数的同时，保证了集结后系统的控制质量和未集结时的相同. 第 6 节的仿真算例证明了该算法的有效性.

References

1 Xi Yu-Geng. *Model Predictive Control*. Beijing: National Defense Publishing House, 1993
(席裕庚. 预测控制. 北京：国防科技出版社, 1993)

2 Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, Scokaert P O M. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 2000, **36**(6): 789∼814

3 Ohshima M, Hashimoto I, Takamatsu T, Ohno H. Robust stability of model predictive control. *International Chemical Engineering*, 1991, **31**(1): 119∼127

4 Camacho E F. Constrained generalized predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, **38**(2): 327∼332

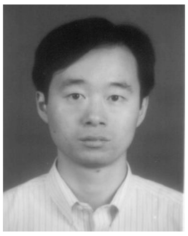
5 Zheng Alex. Reducing on-line computational demands in model predictive control by approximating QP constraints. *Journal of Process Control*, 1999, **9**: 279∼290

6 Ricker N L. Use of quadratic programming for constrained internal model control. *Industrial and Engineering Chemisty Process Design and Development*, 1985, **24**(4): 925∼938

7 Du Xiao-Ning. The Study and Analysis of New Optimization Strategies in Model Predictive Control [Ph.D. dissertation], Shanghai Jiao Tong University, 2001
(杜晓宁. 预测控制新型优化策略的研究与分析 [博士学位论文], 上海交通大学, 2001)

8 Liu Bin, Xi Yu-Geng. An aggregation based robust model predictive controller. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(6): 801∼808
(刘斌，席裕庚. 一种基于集结的鲁棒 MPC 控制器. 自动化学报，2003，**29**(6): 801∼808)

9 Zhang Qun-Liang. Study on Design Method for Constraint Model Predictive Control [Ph.D. dissertation], Shanghai Jiao Tong University, 2006
(张群亮. 约束预测控制的设计方法研究 [博士学位论文], 上海交通大学, 2006)



李德伟 上海交通大学自动化系博士研究生, 1993 年获得上海交通大学自动化系学士学位, 主要研究方向为预测控制理论及方法. 本文通讯作者. E-mail: dwli@sjtu.edu.cn
(**LI De-Wei** Ph. D. candidate in Automation Institute, Shanghai Jiao Tong University. He received his B. S. degree from Shanghai Jiao Tong University in 1993. His research interest covers the theory and algorithm of model predictive control, *etc.* Corresponding author of this paper.)

席裕庚 上海交通大学自动化系教授, 主要研究领域包括预测控制理论与应用、智能机器人等. E-mail: ygxi@sjtu.edu.cn
(**XI Yu-Geng** Professor in Automation Institute, Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers the optimization control in the complex industry process, intelligent robot control, and rolling scheduling.)

秦 辉 上海交通大学自动化系硕士研究生, 主要研究方向为预测控制、大系统优化策略等. E-mail: huiqin@sjtu.edu.cn
(**QIN Hui** Master student in Automation Institute, Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers model predictive control and large scale system theory.)