

# 基于一维标定物的多摄像机标定

王亮<sup>1</sup> 吴福朝<sup>1</sup>

**摘要** 一维标定物是由三个或三个以上彼此距离已知的共线点构成的. 现有文献指出只有当一维标定物做平面运动或者绕固定点转动时, 才能实现摄像机的标定. 本文的研究结果表明, 当多个摄像机同时观察任意刚体运动的一维标定物时, 则该摄像机组能被线性地标定. 本文给出一种线性标定算法, 并使用最大似然准则对线性算法结果进行精化. 模拟实验和真实图像实验都表明本文的算法是有效可行的.

**关键词** 一维标定物, 多摄像机标定, 任意刚体运动  
**中图分类号** TP391.4

## Multi-Camera Calibration Based on 1D Calibration Object

WANG Liang<sup>1</sup> WU Fu-Chao<sup>1</sup>

**Abstract** A one-dimensional calibration object consists of three or more collinear points with known relative positions. It is generally believed that a camera can be calibrated only when a 1D calibration object is in planar motion or rotates around a fixed point. In this paper, it is proved that when a multi-camera is observing a 1D object undergoing general rigid motions synchronously, the camera set can be linearly calibrated. A linear algorithm for the camera set calibration is proposed, and then the linear estimation is further refined using the maximum likelihood criteria. The simulated and real image experiments show that the proposed algorithm is valid and robust.

**Key words** 1D calibration object, multiple cameras calibration, general rigid motion

## 1 引言

摄像机标定, 即确定摄像机内参数, 是计算机视觉研究中由图像进行三维重建不可或缺的重要步骤. 摄像机标定最初源于摄影测量学<sup>[1]</sup>, 近年来计算机视觉界的研究者在这个问题上开展了大量的研究<sup>[2~15]</sup>. 根据所使用标定物的维数可以将文献中报道的标定方法大致分为如下四类:

基于三维 (Three-dimensional, 3D) 标定物体的标定方法<sup>[1~4]</sup>. 这类标定方法要求摄像机对三维几何信息精确已知的标定物体进行拍摄, 根据标定物体的三维点和图像点的对应建立约束方程, 进行摄像机的标定. 这种方法标定精度较高. 缺点是标定装置造价昂贵.

基于二维 (Two-dimensional, 2D) 标定物体的标定方法<sup>[5~7]</sup>. 用 2D 平面模板代替 3D 标定块, 从不同方位拍摄平面模板的多幅图像, 利用平面模板的空间点和图像点间的对应建立约束方程实现摄像

机的标定. 这类方法也可以获得较高的精度, 并且不需要平面模板的运动信息. 该方法简便易用.

基于一维 (One-dimensional, 1D) 标定物体的标定方法<sup>[8~10]</sup>. 1D 标定物是由多个彼此距离已知的共线点构成, 拍摄不同位姿下的 1D 标定物的多幅图像, 利用 1D 标定物的图像点之间的对应以及 1D 标定物蕴含的几何信息建立约束方程实现摄像机的标定. 这种方法是张<sup>[8]</sup>最早提出的.

基于零维 (Zero-dimensional, 0D) 标定物体的标定方法, 即自标定<sup>[11~15]</sup>. 自标定方法仅通过图像间的点对应而不依靠任何标定物来标定摄像机内参数, 因而称为 0D 标定. 多数自标定方法都是利用绝对二次曲线 (The absolute conic) 或其对偶绝对二次曲面 (The absolute quadric) 的像仅与摄像机的内参数有关而与摄像机运动无关的性质来标定的. 自标定方法较其他标定方法灵活, 但如果没有场景的几何知识与摄像机的运动信息等先验知识, 所有的自标定算法都是非线性的, 需要非常复杂的计算, 并且标定结果通常不鲁棒.

研究者对基于 3D、2D 和 0D 标定物的标定方法已开展了大量深入的研究. 而基于 1D 标定物体的标定方法是最近由张<sup>[8]</sup>提出的, 张的基于 1D 物体的标定方法是: 1D 标定物体是由三个或三个以上的彼此之间距离已知的共线点构成, 固定其中一个点让 1D 标定物绕该点旋转, 拍摄 6 幅以上 1D 标定物不同位姿下的图像可以实现摄像机标定. P. Hammar

收稿日期 2006-3-29 收修改稿日期 2006-6-13  
Received March 29, 2006; in revised form June 13, 2006  
国家自然科学基金 (60575019), 国家“863”计划 (2006AA01Z116, 2005AA118020) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60575019) and National Hi-Tech Research and Development Plan of P. R. China (2006AA01Z116, 2005AA118020)  
1. 中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室 北京 100080  
1. National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080  
DOI: 10.1360/aas-007-0225

stedt<sup>[9]</sup> 等讨论了基于 1D 标定物的标定方法的退化情况, 给出了 1D 标定物的临界运动. 吴在文 [10] 中给出了基于 1D 标定物的标定方法的几何本质, 并将基于 1D 标定物的标定方法进行推广, 提出基于平面运动的 1D 标定物的标定算法.

基于 1D 标定物的标定方法的优势在于: 1) 构造 1D 标定物体十分简便. 在实际应用中可以利用一根杆上的三个以上的标志点构造 1D 标定物. 2) 在多摄像机环境下, 所有摄像机可以同时观察到整个标定物. 这是进行多摄像机标定必需的, 但 3D 和 2D 标定物由于自身存在遮挡无法满足. 现有的 1D 标定方法的不足之处在于需要控制 1D 标定物作一些特殊的运动, 比如绕其上的一个固定点转动或者作平面运动. 当 1D 标定物体在空间中作任意刚体运动时, 还可以用来进行摄像机标定吗? 本文探讨了这个问题. 对于单摄像机, 无法通过任意刚体运动的 1D 标定物来实现标定<sup>[8,10]</sup>. 对于多摄像机, 本文研究表明: 当同时观察作任意刚体运动的 1D 标定物时, 多个摄像机是可以实现标定的.

本文组织结构如下: 第 2 节介绍了摄像机模型和 1D 标定物等预备知识. 第 3 节是本文的主体, 详细介绍摄像机组的标定算法. 第 4 节是实验结果. 第 5 节是本文的结束语.

## 2 预备知识

### 2.1 摄像机模型

在本文中, 2D 点用  $\tilde{\mathbf{m}} = [u, v]^T$  表示, 3D 点用  $\tilde{\mathbf{M}} = [x, y, z]^T$  表示, 对应的齐次向量分别记为:  $\mathbf{m} = [u, v, 1]^T$ ,  $\mathbf{M} = [x, y, z, 1]^T$ . 摄像机为五参数的针孔模型, 3D 点  $\mathbf{M}$  与其图像点  $\mathbf{m}$  之间有如下关系

$$s\mathbf{m} = K[R, \mathbf{t}]\mathbf{M}, \quad \left( K = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

其中  $s$  为尺度因子,  $P = K[R, \mathbf{t}]$  为摄像机矩阵,  $[R, \mathbf{t}]$  表示世界坐标系到摄像机坐标系的旋转和平移,  $K$  为摄像机的内参数矩阵, 其中  $\alpha$ 、 $\beta$  为图像  $u$ 、 $v$  轴上的尺度因子,  $[u_0, v_0]$  为图像的主点,  $\gamma$  为倾斜因子. 摄像机标定就是确定上述五个内参数.

### 2.2 1D 标定物

如果线段  $AC$  包含点  $B, D, E, F$ , 并且任意两点之间的距离已知, 则可以称线段  $AC$  为 1D 标定物. 文 [8] 表明 1D 标定物至少应包含 3 个彼此距离已知的共线点. 包含更多共线点并不能提供新的关于摄像机内参数的独立约束, 但考虑到数据冗余

性可抑制噪声的影响, 因而在实际应用中更多的点能提高标定精度. 本文只考虑由 3 个点构成 1D 标定物这一最小配置, 但结论可以扩展到包含更多共线点的情况. 假定 1D 标定物由 3 个点  $A, B$  和  $C$  构成, 并且  $\|A - C\| = d_1$ ,  $\|B - C\| = d_2$ . 为陈述方便, 1D 标定物也称为线段  $(ABC)$ . 并且由线段  $(ABC)$  定义的直线记为  $L_{ABC}$ .

## 3 标定算法

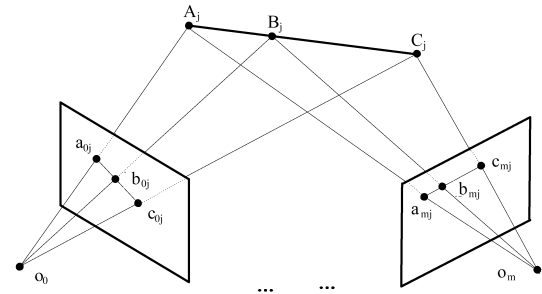


图 1 用于多摄像机标定的 1D 标定物

Fig. 1 1D calibration object for multi-camera calibration

如图 1 所示, 线段  $(ABC)$  在第  $j$  次运动后的位置记为  $(A_j B_j C_j)$ , 其在第  $i$  个摄像机下的图像为:  $\{a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} | j = 1, 2, \dots, n, i = 0, 1, 2, \dots, m\}$ . 本文的目标是根据  $(m+1)$  个摄像机之间的图像点对应  $\{a_{0j} \leftrightarrow a_{1j} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow a_{mj}, b_{0j} \leftrightarrow b_{1j} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow b_{mj}, c_{0j} \leftrightarrow c_{1j} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow c_{mj} | j = 1, 2, \dots, n\}$  计算  $(m+1)$  个摄像机在第 0 个摄像机坐标系下的摄像机矩阵

$$\begin{cases} P_0^{(e)} = K_0[I|0] \\ P_1^{(e)} = K_1[R_1|\mathbf{t}_1] \\ \dots \\ P_m^{(e)} = K_m[R_m|\mathbf{t}_m] \end{cases}$$

从而求解摄像机的内参数  $K_i (i = 0, 1, \dots, m)$ .

本文提出的算法是线性的, 类似于分层重建. 首先计算射影意义下的摄像机矩阵, 然后依次求解仿射意义下的摄像机矩阵和欧氏摄像机矩阵. 不同于传统的分层重建标定, 本文提出的算法不需要摄像机的任何先验知识.

### 3.1 确定射影意义下的摄像机矩阵

以第 0 个摄像机坐标系为世界坐标系, 则射影意义下的摄像机矩阵可以表示为<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} P_0 = [I|0] \\ P_1 = [H_1|\mathbf{e}_1] \\ \dots \\ P_m = [H_m|\mathbf{e}_m] \end{cases}$$

上述摄像机矩阵可以由图像之间的点对应计算得到.

对于两个摄像机, 计算射影意义下的摄像机矩阵非常简单. 首先根据图像之间的点对应  $\{\mathbf{a}_{0j} \leftrightarrow \mathbf{a}_{1j}, \mathbf{b}_{0j} \leftrightarrow \mathbf{b}_{1j}, \mathbf{c}_{0j} \leftrightarrow \mathbf{c}_{1j} | j = 1, 2, \dots, n\}$  计算两幅图像之间的基本矩阵  $F$ . 则射影意义下的摄像机矩阵为

$$\begin{cases} P_0 = [I|\mathbf{0}] \\ P_1 = [[\mathbf{e}_1]_{\times} F^T | \mathbf{e}_1] \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{e}_1$  为第 1 个摄像机的极点 (Epipole).

对于三个摄像机情况, 首先根据图像之间的点对应  $\{\mathbf{a}_{0j} \leftrightarrow \mathbf{a}_{1j} \leftrightarrow \mathbf{a}_{2j}, \mathbf{b}_{0j} \leftrightarrow \mathbf{b}_{1j} \leftrightarrow \mathbf{b}_{2j}, \mathbf{c}_{0j} \leftrightarrow \mathbf{c}_{1j} \leftrightarrow \mathbf{c}_{2j} | j = 1, 2, \dots, n\}$  计算三焦张量  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3\}$ , 利用三焦张量  $\mathcal{T}$  计算第 1、2 个摄像机相对第 0 个摄像机的极点  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , 且  $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1$ . 则射影意义下的摄像机矩阵为<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} P_0 = [I|\mathbf{0}] \\ P_1 = [[T_1\mathbf{e}_2, T_2\mathbf{e}_2, T_3\mathbf{e}_2]|\mathbf{e}_1] \\ P_2 = [[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T - I][T_1^T\mathbf{e}_1, T_2^T\mathbf{e}_1, T_3^T\mathbf{e}_1]|\mathbf{e}_2] \end{cases} \quad (2)$$

对于  $m+1 (m \geq 3)$  个摄像机的情况, 不存在如同两个和三个摄像机时统一的数学表达式. 常用算法是矩阵分解算法 (Matrix-factorization algorithm, MFA). MFA 算法根据图像对应点  $\{\mathbf{a}_{0j} \leftrightarrow \mathbf{a}_{1j} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \mathbf{a}_{mj}, \mathbf{b}_{0j} \leftrightarrow \mathbf{b}_{1j} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \mathbf{b}_{mj}, \mathbf{c}_{0j} \leftrightarrow \mathbf{c}_{1j} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \mathbf{c}_{mj} | j = 1, 2, \dots, n\}$  计算测量矩阵  $W(s)$ . 随后求解未知的射影深度  $s$ , 然后根据  $W(s)$  的秩为 4, 对其进行奇异值分解可以得到射影意义下的摄像机矩阵和重建的空间点. MFA 的细节可见文献 [17]. MFA 的最大缺点是无法解决数据丢失问题. 而采用 1D 标定物可以保证各个摄像机同时拍摄到 1D 标定物, 不存在数据丢失的问题.

### 3.2 确定仿射意义下的摄像机矩阵

得到射影意义下摄像机矩阵后, 仿射意义下的摄像机矩阵具有如下形式<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} P_0^{(a)} = [I|\mathbf{0}] \\ P_1^{(a)} = [H_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{a}^T | \mathbf{e}_1] \\ \dots \\ P_m^{(a)} = [H_m - \mathbf{e}_m\mathbf{a}^T | \mathbf{e}_m] \end{cases}$$

其中向量  $[\mathbf{a}^T, 1]^T$  为射影坐标系下无穷远平面  $\pi_{\infty}$  的法方向, 而矩阵  $H_i - \mathbf{e}_i\mathbf{a}^T = H_{i\infty}$  是由无穷远平面  $\pi_{\infty}$  诱导的第  $i$  个摄像机和第 0 个摄像机之间的无穷远单应.

计算无穷远平面  $\pi_{\infty}$  的法向量  $\mathbf{a}$  确定仿射意义下的摄像机矩阵. 首先确定在第  $i$  个摄像

机图像中直线  $L_{A_j B_j C_j}$  的消失点  $\mathbf{v}_{ij}$ . 由于共线点  $\{A_j, B_j, C_j\}$  的简比为  $Simple(A_j, B_j; C_j) = d_1/d_2$ , 而共线点  $\{A_j, B_j, C_j, V_{j\infty}\}$  的交比也为  $d_1/d_2$ , 即  $Cross(A_j, B_j; C_j, V_{j\infty}) = d_1/d_2$ , 其中  $V_{j\infty}$  为直线  $L_{A_j B_j C_j}$  的无穷远点. 根据射影变换保持交比不变可以得到如下关于  $\mathbf{v}_{ij}$  的线性约束

$$Cross(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}; \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}) = d_1/d_2 \quad (3)$$

由此可以计算消失点  $\mathbf{v}_{ij}$ .

消失点是无穷远平面上的点的图像, 则第 0 个和第  $i$  个摄像机之间的对应消失点有:  $(H_i - \mathbf{e}_i\mathbf{a}^T)\mathbf{v}_{0j} = s_{ij}\mathbf{v}_{ij}, (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ . 消去未知的尺度因子  $s_{ij}$ , 可以得到向量  $\mathbf{a}$  的线性约束方程

$$[\mathbf{v}_{ij}]_{\times} \mathbf{e}_i \mathbf{v}_{0j}^T \mathbf{a} = [\mathbf{v}_{ij}]_{\times} H_i \mathbf{v}_{0j} \quad (4)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ . 求解线性方程组 (4) 可以得到解向量  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ . 从而有仿射意义下的摄像机矩阵

$$\begin{cases} P_0^{(a)} = [I|\mathbf{0}] \\ P_1^{(a)} = [H_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{a}^{*T} | \mathbf{e}_1] \\ \dots \\ P_m^{(a)} = [H_m - \mathbf{e}_m\mathbf{a}^{*T} | \mathbf{e}_m] \end{cases} \quad (5)$$

为确定欧氏摄像机矩阵, 需要计算对应上述仿射摄像机矩阵的空间点  $\{A_j, B_j, C_j\}$  的仿射重建. 令  $\{A_j^{(a)}, B_j^{(a)}, C_j^{(a)}\}$  为空间点  $\{A_j, B_j, C_j\}$  的仿射重建, 则有

$$\begin{cases} P_i^{(a)} A_j^{(a)} = s'_{ij} \mathbf{a}_{ij} \\ P_i^{(a)} B_j^{(a)} = s''_{ij} \mathbf{b}_{ij} \\ P_i^{(a)} C_j^{(a)} = s'''_{ij} \mathbf{c}_{ij} \end{cases}$$

其中  $i = 0, 1, \dots, m$ . 消去尺度因子  $s'_{ij}, s''_{ij}$  和  $s'''_{ij}$ , 求解关于  $\{A_j^{(a)}, B_j^{(a)}, C_j^{(a)}\}$  线性方程组, 在相差尺度因子的意义下得到  $\{A_j^{(a)}, B_j^{(a)}, C_j^{(a)}\}$ , 通过归一化可以得到空间点的仿射重建.

### 3.3 确定欧氏意义下的摄像机矩阵

由仿射意义下的摄像机矩阵可得到欧氏意义下的摄像机矩阵为<sup>[16]</sup>:  $P_i^{(e)} = P_i^{(a)} \text{diag}(K_0, 1), (i = 0, 1, \dots, m)$ , 及空间点的欧氏重建  $\{A_j^{(e)}, B_j^{(e)}, C_j^{(e)}\}$

$$\begin{cases} A_j^{(e)} = \text{diag}(K_0^{-1}, 1) A_j^{(a)} \\ B_j^{(e)} = \text{diag}(K_0^{-1}, 1) B_j^{(a)} \\ C_j^{(e)} = \text{diag}(K_0^{-1}, 1) C_j^{(a)} \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $j = 1, 2, \dots, n, K_0$  为第 0 个摄像机的内参数矩阵.

令

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j^{(e)} &= [(\tilde{\mathbf{A}}_j^{(e)})^T, 1]^T, & \mathbf{A}_j^{(a)} &= [(\tilde{\mathbf{A}}_j^{(a)})^T, 1]^T \\ \mathbf{B}_j^{(e)} &= [(\tilde{\mathbf{B}}_j^{(e)})^T, 1]^T, & \mathbf{B}_j^{(a)} &= [(\tilde{\mathbf{B}}_j^{(a)})^T, 1]^T \\ \mathbf{C}_j^{(e)} &= [(\tilde{\mathbf{C}}_j^{(e)})^T, 1]^T, & \mathbf{C}_j^{(a)} &= [(\tilde{\mathbf{C}}_j^{(a)})^T, 1]^T \end{aligned}$$

则根据式 (6), 可以得到:  $\tilde{\mathbf{A}}_j^{(e)} = K_0^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_j^{(a)}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_j^{(e)} = K_0^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_j^{(a)}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_j^{(e)} = K_0^{-1}\tilde{\mathbf{C}}_j^{(a)}$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). 由于  $\|\mathbf{A}_j^{(e)} - \mathbf{C}_j^{(e)}\| = d_1$ ,  $\|\mathbf{B}_j^{(e)} - \mathbf{C}_j^{(e)}\| = d_2$ , 由此可以得到关于  $K_0$  的线性方程

$$\begin{cases} (\tilde{\mathbf{C}}_j^{(a)} - \tilde{\mathbf{A}}_j^{(a)})^T \varpi_0 (\tilde{\mathbf{C}}_j^{(a)} - \tilde{\mathbf{A}}_j^{(a)}) = d_1^2 \\ (\tilde{\mathbf{C}}_j^{(a)} - \tilde{\mathbf{B}}_j^{(a)})^T \varpi_0 (\tilde{\mathbf{C}}_j^{(a)} - \tilde{\mathbf{B}}_j^{(a)}) = d_2^2 \end{cases} \quad (7)$$

其中  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\varpi_0 = K_0^{-T}K_0^{-1}$ . 根据方程组 (7) 可以得到  $\varpi_0$  的线性解, 对  $\varpi_0^{-1}$  进行乔里斯基 (Cholesky) 分解可以得到摄像机内参数矩阵  $K_0 = K_0^*$ . 则欧氏意义下的摄像机矩阵为

$$\begin{cases} P_0^{(e)} = [K_0^* | \mathbf{0}] \\ P_1^{(e)} = [H_{1\infty} K_0^* | \mathbf{e}_1] \\ \dots \\ P_m^{(e)} = [H_{m\infty} K_0^* | \mathbf{e}_m] \end{cases} \quad (8)$$

空间点  $\{\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j\}$  的欧氏重建结果为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j^{(e)} &= \text{diag}(K_0^{*-1}, 1)\mathbf{A}_j^{(a)} \\ \mathbf{B}_j^{(e)} &= \text{diag}(K_0^{*-1}, 1)\mathbf{B}_j^{(a)} \\ \mathbf{C}_j^{(e)} &= \text{diag}(K_0^{*-1}, 1)\mathbf{C}_j^{(a)} \end{aligned}$$

根据恢复的欧氏意义下的摄像机矩阵  $P_i^{(e)} = [H_{i\infty} K_0^* | \mathbf{e}_i]$ , 利用三角正交 (RQ) 分解可以得到第  $i$  个摄像机内参数矩阵  $K_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, m$ ).

**注 1.** 对于每个  $j$ , 方程组 (7) 中的两个方程不是相互独立的. 由于仿射变换保持共线点的简比不变, 即  $(\tilde{\mathbf{C}}_j^{(a)} - \tilde{\mathbf{B}}_j^{(a)}) = (d_2/d_1)(\tilde{\mathbf{C}}_j^{(a)} - \tilde{\mathbf{A}}_j^{(a)})$ , 则方程组 (7) 中每个  $j$  对应的两个方程是等价的. 因此如同绕一个固定点转动的 1D 标定方法一样, 本文方法也需要 1D 标定物至少运动 6 次才可以实现摄像机组的标定.

**注 2.** 从方程组 (7) 不难看出, 摄像机组 1D 标定的退化情况与张的单个摄像机的 1D 标定方法<sup>[8]</sup>

的退化情况相同, 即当由运动的 1D 标定物确定的 3D 点  $\{\tilde{\mathbf{V}}_j = \tilde{\mathbf{C}}_j - \tilde{\mathbf{A}}_j | j = 1, 2, \dots, n\}$  在一条二次曲线上时, 对应的运动是退化情况.

### 3.4 捆绑调整

上述线性标定算法的结果是最小化代数距离意义下的解, 利用最大似然准则可以对线性算法的结果进行优化. 计算机视觉研究中常用的优化算法是捆绑调整 (Bundle adjustment)<sup>[16]</sup>. 捆绑调整是一个以摄像机矩阵和空间点为优化变量以最小化重投影误差为优化目标的非线性优化过程. 当图像点测量噪声服从各向同性零均值的高斯分布且独立同分布时, 捆绑调整可得到最大似然意义下的优化结果. 本文中捆绑调整是求解式 (9) 所示的非线性最小化问题 (式 (9) 见本页底部).

这里  $\mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{B}_j$  和  $\mathbf{C}_j$  是共线的, 因此它们不是相互独立的. 利用球面坐标  $\phi_j$  和  $\theta_j$  表示线段的方向, 则有:  $\mathbf{B}_j = \mathbf{A}_j + (d_1 - d_2) \cdot [\sin \phi_j \cos \theta_j, \sin \phi_j \sin \theta_j, \cos \phi_j]^T$  和  $\mathbf{C}_j = \mathbf{A}_j + d_1 \cdot [\sin \phi_j \cos \theta_j, \sin \phi_j \sin \theta_j, \cos \phi_j]^T$ . 因此式 (9) 可以改写为式 (10) (式 (10) 见本页底部),

其中  $f_B(\mathbf{A}_j, \phi_j, \theta_j) = \mathbf{A}_j + (d_1 - d_2) \cdot [\sin \phi_j \cos \theta_j, \sin \phi_j \sin \theta_j, \cos \phi_j]^T$ ,  $f_C(\mathbf{A}_j, \phi_j, \theta_j) = \mathbf{A}_j + d_1 \cdot [\sin \phi_j \cos \theta_j, \sin \phi_j \sin \theta_j, \cos \phi_j]^T$ .

以 3.3 节得到的欧氏重构结果作为初始值, 利用 Levenberg-Marquardt 算法<sup>[18]</sup> 求解最小化问题 (10) (见本页底部). 另外, 在实际应用中考虑到摄像机的畸变, 还可以引入畸变系数进行捆绑调整.

## 4 模拟实验与真实图像实验

### 4.1 模拟实验

我们进行了大量的模拟实验, 下面报告其中一组对三个摄像机进行 1D 标定的实验. 1D 标定物  $\mathbf{AC}$  长 60, 点  $\mathbf{B}$  为线段  $\mathbf{AC}$  的三等分点, 且  $d_1 = 60$ ,  $d_2 = 40$ . 三个摄像机的内参数  $[\alpha, \beta, \gamma, u_0, v_0]$  分别为:  $[1100, 1000, 0, 512, 384]$ ,  $[1000, 1100, 1, 512, 384]$ ,  $[1050, 1050, 2, 512, 384]$ . 图像的分辨率为  $1024 \times 768$ . 第一个摄像机的光心固定在边长为 400 的等边三角形  $\triangle \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3$  的一个顶点上, 光轴与  $\triangle \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3$  过该顶点的垂线重合; 另两个摄像机的光心分别在以  $\triangle \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3$  的另

$$\min \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n (\|\mathbf{a}_{ij} - P_i \mathbf{A}_j\|^2 + \|\mathbf{b}_{ij} - P_i \mathbf{B}_j\|^2 + \|\mathbf{c}_{ij} - P_i \mathbf{C}_j\|^2) \quad (9)$$

$$\min_{\{P_i, \mathbf{A}_j, \phi_j, \theta_j\}} \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n (\|\mathbf{a}_{ij} - P_i \mathbf{A}_j\|^2 + \|\mathbf{b}_{ij} - P_i f_B(\mathbf{A}_j, \phi_j, \theta_j)\|^2 + \|\mathbf{c}_{ij} - P_i f_C(\mathbf{A}_j, \phi_j, \theta_j)\|^2) \quad (10)$$

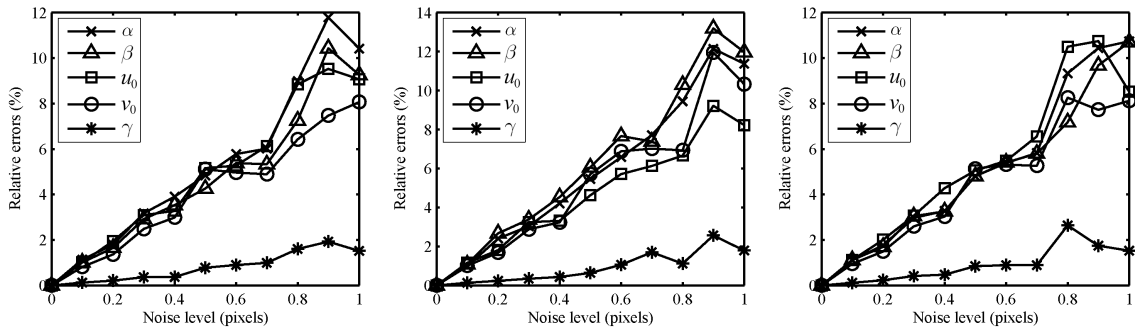


图 2 线性标定结果的误差随噪声变化曲线 (三幅图依次对应第 1、2、3 个摄像机的标定结果)

Fig. 2 Linear 1D calibration errors with respect to noise level (Three figures correspond to the 1st, 2nd and 3rd camera's calibration results orderly)

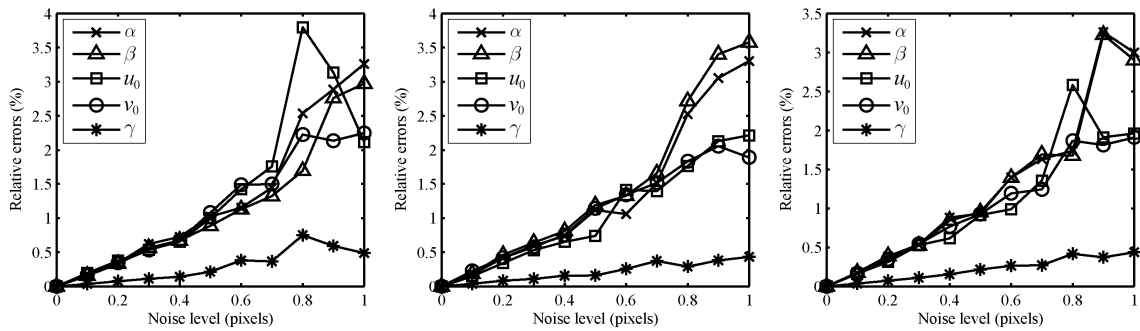


图 3 非线性优化标定结果的相对误差随噪声变化曲线 (三幅图依次对应第 1、2、3 个摄像机的标定结果)

Fig. 3 Nonlinear 1D calibration errors with respect to noise level (Three figures correspond to the 1st, 2nd and 3rd camera's calibration results orderly)



图 4 用于多摄像机标定的 1D 标定物的图像 (三幅图依次对应第 1、2、3 个摄像机)

Fig. 4 Sample images of a 1D calibration object used for multi-camera calibration (Three images correspond to the 1st, 2nd and 3rd camera respectively)

表 1 第一个摄像机内参数标定结果

Table 1 The calibration results of the first camera

	$\alpha$	$\beta$	$u_0$	$v_0$	$\gamma$
线性 1D 标定	1156.88	1197.70	558.10	274.72	-29.99(91.48°)
捆绑调整	1141.79	1156.44	510.18	412.47	-3.10(90.16°)
2D 标定	1140.85	1141.02	510.73	396.11	-0.001(90.00°)
相对误差	0.08%	1.35%	0.05%	1.43%	0.27%(0.16°)

表 2 第二个摄像机内参数标定结果

Table 2 The calibration results of the second camera

	$\alpha$	$\beta$	$u_0$	$v_0$	$\gamma$
线性 1D 标定	1009.82	1049.93	474.04	285.32	18.83(88.93°)
捆绑调整	1071.85	1085.65	489.76	420.10	-0.23(90.01°)
2D 标定	1063.30	1061.77	495.56	395.70	0.002(90.00°)
相对误差	0.80%	2.25%	0.55%	2.29%	0.02%(0.01°)

表 3 第三个摄像机内参数标定结果

Table 3 The calibration results of the third camera

	$\alpha$	$\beta$	$u_0$	$v_0$	$\gamma$
线性 1D 标定	1158.97	1196.68	548.36	246.23	16.98(89.16°)
捆绑调整	1194.61	1201.04	457.05	413.33	1.50(89.93°)
2D 标定	1178.57	1177.41	503.49	405.39	-0.001(90.00°)
相对误差	1.36%	2.00%	3.94%	0.67%	0.13%(0.07°)

外两个顶点为中心边长为 20 的立方体内随机取值, 光轴与  $\Delta O_1 O_2 O_3$  过对应顶点的垂线之间夹角在  $[-\pi/8, \pi/8]$  间随机取值, 每次标定令线段  $AC$  在  $\Delta O_1 O_2 O_3$  的垂心附近做 30 次任意刚体运动, 且保证线段  $AC$  的图像都落在三个摄像机的图像平面内. 在得到的图像点上叠加标准差为  $\sigma$  的零均值高斯噪声, 按照本文提出的方法估计摄像机的内参数, 并与真实值进行比较. 实验中噪声等级  $\sigma$  从 0 增加到 1.0 个像素. 在每个噪声等级下, 进行 100 次独立实验.

如同文 [8] 一样, 这里也采用内参数估计值与真实值之差的绝对值与焦距  $\alpha$  的相对误差来度量估计结果. 图 2 给出了线性算法的结果, 图 3 给出了经过捆绑调整后的标定结果. 从图中可以看出误差曲线随噪声等级的变化基本上呈线性变化, 捆绑调整算法能改进线性算法的结果, 得到更好的估计结果, 在 1.0 个像素的噪声等级下, 线性算法的相对误差约为 10%, 而经过捆绑调整后相对误差约为 3%.

#### 4.2 真实图像实验

利用 3 个塑料圆珠串在钢棍上制作了一个简易的 1D 标定物. 第 1、2 和第 2、3 个珠子间的距离依次为 30cm 和 60cm. 实验中利用 3 个摄像机拍摄了做任意刚体运动的 1D 标定物的 18 组图像进行标定, 图 4 给出了其中的一组图像.

从图像中检测出 1D 标定物上的标志点, 按照本文提出的算法对三个摄像机进行标定. 实验结果如

表 1、2 和 3 所示. 表 1、2 和 3 分别对应第 1、2 和 3 个摄像机的内参数. 表中第 1 行为线性算法标定结果, 第 2 行为以线性算法结果为初始值进行捆绑调整后的标定结果. 对于摄像机的倾斜因子  $\gamma$ , 我们也给出了其对应的两个轴间的夹角.

为进行比较, 对三个摄像机进行了 2D 标定<sup>[5]</sup>. 对于三个摄像机由于 2D 平面模板存在遮挡无法同时完成标定, 实际操作中对三个摄像机分别进行标定. 表 1、2 和 3 的第 3 行为基于 2D 平面模板标定结果, 第 4 行给出了捆绑调整结果和 2D 标定结果的相对误差 (以 2D 标定结果的  $\alpha$  为基准). 从表中可以看出, 两种标定方法的相对误差在 2% 左右.

在真实图像实验中 1D 标定的误差来源主要有如下几个方面: 在自己加工的 1D 标定物中, 塑料珠子的孔是手工钻出来的, 存在偏心现象; 珠子间的距离是用尺子大致确定的; 按动快门拍摄图像时摄像机存在轻微抖动; 在图像中检测标志点时存在一定的误差. 尽管存在上述误差, 但所给出的标定结果和使用精确测定的 2D 模板的标定结果仍是可比较的, 这表明本文的标定算法能够在实际中得到应用.

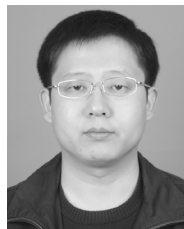
## 5 结论

本文研究了利用做任意刚体运动的 1D 标定物标定摄像机组的可行性, 给出了利用 1D 标定物对摄

像机组进行标定的线性算法, 并且使用基于最大似然准则的捆绑调整算法对线性算法的标定结果进行精化. 模拟实验和真实图像实验都表明当 1D 标定物做任意刚体运动时可以实现摄像机组的标定, 并且能得到较高的标定精度. 对于多个摄像机构成的摄像机组, 利用传统的 3D 或 2D 标定方法进行标定时, 由于标定物自身存在遮挡, 通常无法同时完成标定; 而利用 1D 标定物可以很好的解决这一难题. 同时, 1D 标定物的任意刚体运动使得实际操作更方便.

## References

- 1 Abdel-Aziz Y I, Karara H M. Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates. In: Proceedings of Symposium on Colse-Range Photogrammetry. Virginia, USA: American Society of Photogrammetry, 1971. 1~18
- 2 Tsai R, Lenz R K. A new technique for fully autonomous and efficient 3D robotics hand/eye calibration. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1989, **5**(3): 345~358
- 3 Tsai R. An efficient and accurate camera calibration technique for 3D machine vision. In: Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Miami, USA, 1986. 364~374
- 4 Weng J Y, Cohen P, Herniou M. Camera calibration with distortion models and accuracy evaluation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, **14**(10): 965~980
- 5 Zhang Z Y. Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations. In: Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision. Kerkyra, Greece, 1999. 666~673
- 6 Meng X Q, Li H, Hu Z Y. A new easy camera calibration technique based on circular points. In: Proceedings of the British Machine Vision Conference, Bristol, UK, 2000. 496~505
- 7 Sturm P F, Maybank S J. On plane-based camera calibration: a general algorithm, singularities, applications. In: Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Colorado, USA, 1999. 1: 432~437
- 8 Zhang Z Y. Camera calibration with one-dimensional objects. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, **26**(7): 892~899
- 9 Hammarstedt P, Sturm P, Heyden A. Degenerate cases and closed-form solutions for camera calibration with one-dimensional objects. In: Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision. Beijing, China, 2005. 1: 317~324
- 10 Wu F C, Hu Z Y, Zhu H J. Camera calibration with moving one-dimensional objects. *Pattern Recognition*, 2005, **38**(5): 755~765
- 11 Maybank S J, Faugeras O D. A theory of self-calibration of a moving camera. *International Journal of Computer Vision*, 1992, **8**(2): 123~151
- 12 Hartley R. Estimation of relative camera positions for uncalibrated cameras. In: Proceedings of European Conference on Computer Vision. Genova, Italy, Springer-Verlag, 1992. 579~587
- 13 Pollefeys M, Van Gool L, Osterlinck A. The modulus constraint: a new constraint for self-calibration. In: Proceedings of IEEE 13th International Conference on Pattern Recognition, Vienna, Austria, 1996. 1: 349~353
- 14 Luong Q T, Faugeras O D. Self-calibration of a moving camera from point correspondences and fundamental matrices. *International Journal of Computer Vision*, 1997, **22**(3): 261~289
- 15 Triggs B. Auto-calibration and the absolute quadric. In: Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Puerto Rico, 1997. 609~614
- 16 Hartley R, Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 17 Sturm P, Triggs B. A factorization based algorithm for multi-image projective structure and motion. In: Proceedings of 4th European Conference on Computer Vision. Cambridge, England, Springer-Verlag, 1996. 709~720
- 18 More J. J. The levenberg-marquardt algorithm, implementation and theory, In: Proceedings of Dundee Conference on Numerical Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 105~116



**王 亮** 中国科学院自动化研究所博士研究生. 分别于 2001、2004 年在哈尔滨工程大学获得学士和硕士学位, 主要研究方向为摄像机标定、三维重建、移动机器人. E-mail: wangliang@nlpr.ia.ac.cn (WANG Liang Ph.D. candidate at Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his B. S. degree and M. S. degree from Harbin Engineering University in 2001 and 2004 respectively. His research interest covers camera calibration, 3D reconstruction, and mobile robot.)



**吴福朝** 中国科学院自动化所研究员, 博士生导师, 主要研究领域为计算机视觉、人工智能、模式识别. 本文通信作者. E-mail: fcwu@nlpr.ia.ac.cn (WU Fu-Chao Professor at Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers computer vision, artificial intelligence, and pattern recognition. Corresponding author of this paper.)