

# 基于混合逻辑的非线性系统多模型预测控制

邹涛<sup>1</sup> 王昕<sup>2</sup> 李少远<sup>1</sup>

**摘要** 针对已有的多模型预测控制算法在模型预测过程中采用局部线性模型进行预测而产生的预测误差较大这一问题, 本文将非线性过程的多模型描述与输出预测之间的因果关系以约束条件的形式引入到模型预测控制的设计中, 将非线性过程描述成为一个混合逻辑动态系统模型, 模型切换规则以先验知识的形式引入到多模型预测过程中, 该模型可以全局地表征非线性过程的特性, 从而解决了多模型约束非线性预测控制的模型预测与模型切换问题。

**关键词** 非线性预测控制, 多模型, 混合逻辑, 混合整数二次规划 (MIQP)  
**中图分类号** TP273

## Multi-Model Predictive Control for Nonlinear Systems Based on Mixed Logic

ZOU Tao<sup>1</sup> WANG Xin<sup>2</sup> LI Shao-Yuan<sup>1</sup>

**Abstract** Big prediction errors are brought into being as the local linear model is used to predict the future output in the model prediction process for the existent multi-model predictive control algorithms. To solve this problem, this paper introduces causality relationship between multi-model of nonlinear process and output prediction into model predictive control framework in the term of constraint conditions, so that the nonlinear process can be described by a mixed-logic dynamic model. This paper also introduces switch rules into the multi-model predictive controller as a kind of pre-experiential knowledge. This new mixed logic dynamic model can characterize the nonlinear process entirely, thus solving the problem of model prediction and model switch for multi-model constrained nonlinear predictive control.

**Key words** Nonlinear predictive control, multiple models, mixed logic, mixed integer quadratic program

## 1 引言

线性有约束系统是工业过程中最常见也是研究最广泛的一类过程描述形式, 模型预测控制 (MPC) 已经成为解决这类系统控制问题的标准方法. 但对于某些批次生产过程或具有较大的负荷变化的连续生产过程, 系统运行的工况范围大, 呈现出显著的非线性动态特性, 这时基于线性模型的 MPC 通常不能适用于这种情况. 采用非线性模型设计的模型预测控制 (NMPC), 可适应这种复杂的工况变化, 但由于 NMPC 的优化问题是非凸的, 计算量很大, 求解非常困难, 通常难以满足实时性要求<sup>[1]</sup>, 而且非线性系统的建模与辨识十分复杂<sup>[2]</sup>, 对于实际的工业过程, 难以得到精确的全局模型. 而基于多模型策略

的 MPC, 方法简单有效, 已经成为解决这类复杂非线性系统的主要控制方法. 文 [3, 4] 分别针对系统的多个线性模型设计 MPC, 实际的控制输出由多个 MPC 计算的控制序列加权组成, 这种方法虽然取得了很好的控制效果, 但是其物理意义并不明确. 文 [5] 则将系统的多个线性模型进行加权, 得到系统当前时刻的局部模型, 并根据该模型设计 MPC. 模型加权方法的物理意义较之控制器输出加权的方法明确得多, 但是由于模型是局部的, 应用该模型进行输出预测, 无法体现出系统未来时刻的非线性变化特性. 如果将输出预测与多模型策略直接结合, 则系统未来时刻的输出与模型选用之间存在相关性, 就会产生多种可能的变化情况, 使问题变得更加复杂. 到目前为止, 尚没有出现多模型多步预测 MPC 算法. 本文采用混合逻辑方法<sup>[6~8]</sup>, 将非线性过程的多模型描述与输出预测之间的因果关系以约束条件的形式引入到 MPC 的设计中, 从而有效地解决了多模型预测控制的多步预测问题.

## 2 非线性系统的混合逻辑多模型描述

考虑离散非线性系统  $\Sigma$

收稿日期 2005-9-12 收修改稿日期 2006-3-31  
Received September 12, 2005; in revised form March 31, 2006  
国家自然科学基金 (60474051, 60504010, 60604017), 上海市科委重大技术攻关项目 (04DZ11008), 教育部新世纪优秀人才计划项目资助  
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60474051, 60504010, 60604017), Development Program of Shanghai Science and Technology Department under Grant 04DZ11008, and the Program for New Century Excellent Talents in University of China (NCET)  
1. 上海交通大学自动化研究所 上海 200240 2. 上海交通大学电工与电子技术中心 上海 200240  
1. Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240 2. Center of Electrical and Electronics Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240  
DOI: 10.1360/aas-007-0188

$$\Sigma = \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{y}(k+1) = g(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $k$  为离散时间的序号,  $\mathbf{x}(k) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(k) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\mathbf{y}(k) \in \mathfrak{R}^l$  分别为系统状态、控制输入和输出向量, 且受到约束  $\mathbf{x}(k) \in X$ ,  $\mathbf{u}(k) \in U$ ,  $\mathbf{y}(k) \in Y$ . 对于选定的输出状态  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ , 假定方程

$$\Sigma = \begin{cases} \mathbf{x} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (2)$$

有解, 则求解该方程可得到系统的一个平衡点  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0)$ . 若选取  $S$  个输出值  $\mathbf{y}_0 \leq \dots \leq \mathbf{y}_{S-1}$ , 且相应的平衡点  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$  存在, 则可通过雅可比线性化的方法得到原非线性系统的  $S$  个线性化模型 [9], 其中  $\Sigma_i$

$$\Sigma_i = \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{b}_i \\ \mathbf{y}(k) = C_i \mathbf{x}(k) + D_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{d}_i \end{cases} \quad (3)$$

式 (3) 中的参数  $A_i, B_i, C_i, D_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{d}_i$  的定义见文献 [9]. 在平衡点  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i)$  附近, 非线性系统可以近似用  $\Sigma_i$  表示, 假设  $\Sigma_i$  的适用范围为  $\mathbf{y}_i \pm \alpha_i$ . 这样, 原过程可以用  $S$  个线性化模型表示, 即

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{b}_i \\ \mathbf{y}(k) = C_i \mathbf{x}(k) + D_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{d}_i \end{cases} \\ \iff \mathbf{y}_i - \alpha_i \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_i + \alpha_i \quad (4)$$

一般地, 对于非线性系统, 其输入输出特性在一定的范围内可以认为是线性或弱非线性的, 但超出了一定范围, 过程的特性将发生显著变化, 必须使用新的线性模型来描述. 这种由连续量变化而引起的从量变到质变的变化过程, 可以使用逻辑变量将过程的定性与定量信息有机地关联起来 [6]. 考虑到许多过程控制对象的非线性特性具有与运行工况密切相关的实际特点, 多模型的模型切换条件的边缘可直接由生产工艺条件确定 [10].

定义逻辑变量  $\delta'_i \in (0, 1)$ , ( $i = 1, \dots, S-1$ ), 当  $\delta'_i = 1$  时表示系统使用第  $i$  个模型来表示系统的输入输出动态关系, 并以输出  $\mathbf{y}_i$  的区间作为模型切换的规则, 则模型切换规则可以描述为

$$\begin{cases} \delta'_0 = 1 \iff \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_0 + \alpha_0 \\ (\delta'_0 = 0 \wedge \delta'_1 = 1) \iff \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_1 + \alpha_1 \\ \vdots \\ (\delta'_0 = 0 \wedge \delta'_1 = 0 \wedge \dots \wedge \delta'_{S-1} = 1) \iff \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_{S-1} + \alpha_{S-1} \end{cases} \quad (5)$$

定义 1.  $M_{y_i} = \max(\mathbf{y} - \mathbf{y}_i - \alpha_i)$ ,  $m_{y_i} = \min(\mathbf{y} - \mathbf{y}_i - \alpha_i)$ ,  $\varepsilon$  是容许误差, 一般地, 设  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

这里, 我们再引入  $S$  个辅助逻辑变量  $\delta_i$  来表示模型切换的内在逻辑关系

$$\begin{cases} \delta'_0 = 1 \iff \delta_0 = 1 \\ (\delta'_0 = 0 \wedge \delta'_1 = 1) \iff \delta_1 = 1 \\ \vdots \\ (\delta'_0 = 0 \wedge \delta'_1 = 0 \wedge \dots \wedge \delta'_{S-1} = 1) \iff \delta_{S-1} = 1 \end{cases} \quad (6)$$

公式 (5) 则可重新写作

$$\begin{cases} \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 - \alpha_0 \leq M_{y_0}(1 - \delta_0) \\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 - \alpha_0 \geq \varepsilon + (m_{y_0} - \varepsilon)\delta_0 \\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_1 - \alpha_1 \leq M_{y_1}(1 - \delta_1) \\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_1 - \alpha_1 \geq \varepsilon + (m_{y_1} - \varepsilon)\delta_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_{S-1} - \alpha_{S-1} \leq M_{y_{S-1}}(1 - \delta_{S-1}) \\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_{S-1} - \alpha_{S-1} \geq \varepsilon + (m_{y_{S-1}} - \varepsilon)\delta_{S-1} \end{cases} \quad (7)$$

因为本文研究的系统是单值的, 所以  $\delta_i$  之间存在“异或”关系, 即

$$\sum_{i=0}^{S-1} \delta_i = 1 \quad (8)$$

这样, 非线性系统的多个线性模型与模型切换规则之间存在着如下的逻辑关系

$$[\delta_i = 1] \iff \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{b}_i \\ \mathbf{y}(k) = C_i \mathbf{x}(k) + D_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{d}_i \end{cases} \quad (9)$$

经过变换 [6], 可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=0}^{S-1} [A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{b}_i] \delta_i(k) \\ \mathbf{y}(k) = \sum_{i=0}^{S-1} [C_i \mathbf{x}(k) + D_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{d}_i] \delta_i(k) \end{cases} \quad (10)$$

由于公式 (10) 是非线性方程, 需要使用辅助变量  $\mathbf{z}_{ix}(k)$  和  $\mathbf{z}_{iy}(k)$  将之转变为线性方程.

定义 2.  $\mathbf{z}_{ix}(k) = [A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{b}_i] \delta_i(k)$ ,  $\mathbf{z}_{iy}(k) = [C_i \mathbf{x}(k) + D_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{d}_i] \delta_i(k)$ .  $M_x = [M_{x1}, \dots, M_{xn}]$ ,  $m_x = [m_{x1}, \dots, m_{xn}]$ ,  $M_y = [M_{y1}, \dots, M_{yl}]$ ,  $m_y = [m_{y1}, \dots, m_{yl}]$ .  $M_{xp} = \max\{\max A_i^p \mathbf{x} + B_i^p \mathbf{u} - \mathbf{b}_i^p\}$ ,  $m_{xp} = \min\{\max A_i^p \mathbf{x} + B_i^p \mathbf{u} - \mathbf{b}_i^p\}$ ,  $p = 1, \dots, n$ ;  $M_{yq} = \max\{\max C_i^q \mathbf{x} + D_i^q \mathbf{u} - \mathbf{d}_i^q\}$ ,  $m_{yq} = \min\{\max C_i^q \mathbf{x} + D_i^q \mathbf{u} - \mathbf{d}_i^q\}$ ,  $q = 1, \dots, l$ .

进而形成如下的线性逻辑约束条件

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{ix}(k) \leq M_x \delta_i(k) \\ \mathbf{z}_{ix}(k) \geq m_x \delta_i(k) \\ \mathbf{z}_{ix}(k) \leq A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{b}_i - m_x(1 - \delta_i(k)) \\ \mathbf{z}_{ix}(k) \geq A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{b}_i - M_x(1 - \delta_i(k)) \\ \mathbf{z}_{iy}(k) \leq M_y \delta_i(k) \\ \mathbf{z}_{iy}(k) \geq m_y \delta_i(k) \\ \mathbf{z}_{iy}(k) \leq C_i \mathbf{x}(k) + D_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{d}_i - m_y(1 - \delta_i(k)) \\ \mathbf{z}_{iy}(k) \geq C_i \mathbf{x}(k) + D_i \mathbf{u}(k) - \mathbf{d}_i - M_y(1 - \delta_i(k)) \end{cases} \quad (11)$$

从而非线性系统方程 (1) 可转化为一个线性混合逻辑动态模型

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_1\mathbf{u}(k) + B_2\delta(k) + \\ B_3\mathbf{z}(k) + B_4 \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D_1\mathbf{u}(k) + D_2\delta(k) + \\ D_3\mathbf{z}(k) + D_4 \\ E_2\delta(k) + E_3\mathbf{z}(k) \leq E_1\mathbf{u}(k) + E_4\mathbf{x}(k) + E_5 \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $\delta(k)$  是由  $\delta'_i$  和  $\delta_i$  组成的列向量, 式 (12) 中参数  $A, B_1, \dots, B_4, C, D_1, \dots, D_4, E_1, \dots, E_5$  可直接由式 (3)、(6)~(8) 和 (11) 推导而来. 需要说明, 在一般情况下, 模型 (12) 是非线性系统 (1) 的一个近似模型, 但如果非线性系统是一个严格意义上的分段线性系统 (PWA), 则模型 (12) 是 PWA 系统的精确全局模型.

### 3 基于混合逻辑的非线性预测控制器设计

通过已得到的混合逻辑动态系统模型 (12) 设计非线性过程的 MPC, 该控制器由模型预测、滚动优化、间接的状态反馈三部分组成, 将非线性过程的多模型描述与输出预测之间的因果关系以约束条件的形式引入到 MPC 的设计中, 从而实现了模型预测过程中的多模型切换.

#### 3.1 模型预测过程

因为混合逻辑动态系统是一种基于状态的全局线性模型, 因此可以通过该模型迭代获得系统的未来状态与输出. 为了简化参数的个数, 这里将预测时域和控制时域都用参数  $T$  表示. 预测过程如下

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1/k) = A\mathbf{x}(k/k) + B_1\mathbf{u}(k/k) + B_2\delta(k/k) + \\ B_3\mathbf{z}(k/k) + B_4 \\ \mathbf{x}(k+2/k) = A\mathbf{x}(k+1/k) + B_1\mathbf{u}(k+1/k) + \\ B_2\delta(k+1/k) + B_3\mathbf{z}(k+1/k) + B_4 \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+T-1/k) = A\mathbf{x}(k+T-2/k) + \\ B_1\mathbf{u}(k+T-2/k) + B_2\delta(k+T-2/k) + \\ B_3\mathbf{z}(k+T-2/k) + B_4 \\ \mathbf{x}(k+T/k) = \mathbf{x}_f \end{cases} \quad (13)$$

同样,  $\mathbf{y}(k+i/k)$  也可按照上述方式进行展开.

令系统在末来  $T$  时刻后的状态等于期望的终端状态, 是 MPC 中为保证闭环系统稳定性而常使用的终端等式约束方法. 但是由于终端等式约束条件

与预测时域  $T$  直接相关, 尤其是当控制增量约束存在的情况下, 如果  $T$  选的较小, 优化问题很可能出现不可行的情况, 需要通过增加  $T$  来解决, 但这也将导致决策变量数目的增多以及优化计算量的大幅提高.

#### 3.2 滚动优化

对于给定的系统, MPC 在每个时刻优化一个性能指标, 目的是寻找一个最优的控制序列  $\mathbf{u}_0^{T-1} = \{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(T-1)\}$ , 将系统由  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  转移到  $(\mathbf{x}_f, \mathbf{y}_f)$ , 但 MPC 只实施当前时刻的控制作用向量; 在下一个采样时刻, 重新进行优化. 假设当前状态为  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ , 最小化下面的性能指标函数

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}_0^{T-1}, \mathbf{x}(k)) = & \sum_{i=0}^{T-1} \|\mathbf{u}(k+i) - \mathbf{u}_f\|_{Q_1} + \\ & \|\delta(k+i/k) - \delta_f\|_{Q_2} + \|\mathbf{z}(k+i/k) - \mathbf{z}_f\|_{Q_3} + \\ & \|\mathbf{x}(k+i/k) - \mathbf{x}_f\|_{Q_4} + \|\mathbf{y}(k+i/k) - \mathbf{y}_f\|_{Q_5} \end{aligned} \quad (14)$$

这里  $\|\mathbf{x}\|_{Q_i} = \mathbf{x}'Q_i\mathbf{x}$ ,  $Q_i = Q'_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, 5$  是给定的矩阵. 系统受到的等式约束条件为  $\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0^{T-1}) = \mathbf{x}_f$ , 及 (12) 优化问题 (14) 是一个混合整数二次规划 (MIQP) 问题, 可以使用通用的 MIQP 软件包进行求解<sup>[11]</sup>. 假设  $k$  时刻的最优控制序列为  $\{\mathbf{u}_k^*(i)\}_{i=0, \dots, T-1}$ , 则系统的控制作用为

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_k^*(0) \quad (15)$$

需要指出: 早期的无约束 MPC (如 DMC<sup>[9]</sup>), 是以系统输出测量值与输出预测值之间的误差对模型预测过程进行反馈校正的方法构成控制系统的闭环. 目前, 被广泛研究的状态空间有约束 MPC 方法则是通过将系统当前时刻的状态测量值作为 MPC 优化问题的初始状态 (这是一种非直接的状态反馈方法), 从而形成了控制系统的闭环. 虽然上述两种 MPC 构成系统闭环的形式不同, 但本质上是一致的. 本文使用混合逻辑多模型方法来描述非线性系统, 并根据该模型设计 MPC, 使用间接状态反馈方法将系统的扩展状态引入到 MPC, 所以该算法也是一种闭环算法.

#### 3.3 控制算法的稳定性

**定理.** 假设非线性系统为 PWA 系统,  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$  为系统的一个平衡对,  $(\delta_e, \mathbf{z}_e)$  为引入的逻辑变量和辅助变量的平衡状态对,  $\mathbf{x}(0)$  为系统在  $k=0$  时刻的初始状态, 并将  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \delta_e, \mathbf{z}_e, \mathbf{y}_e)$  作为被控系统的终端状态, 且优化问题 (14) 存在可行解, 则当系统不存在扰动的前提下, 满足  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 \geq 0$ ,  $Q_3 \geq 0$ ,  $Q_4 > 0$ ,  $Q_5 \geq 0$ , 模型预测控制律 (14, 15) 能够使系统稳定.

**证明.**

我们首先定义代价函数

$$V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}, k, k + T - 1)$$

$$V^*(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}, k + 1, k + T - 1)$$

对于优化问题 (14), 令  $\kappa_k^*$  表示最优控制序列  $\{\mathbf{u}_k^*(0), \dots, \mathbf{u}_k^*(T-1)\}$ , 取  $V(k) = J(\kappa_k^*, \mathbf{x}(k))$ .

当  $\mathbf{x}(k) = \xi$  时, 最优值的目标代价函数为  $V(\xi, k, k + T - 1)$ , 对于闭环系统 (1), 我们设  $f_c(\xi) = f(\xi, \mathbf{u}_k^*(0))$ , 由目标函数的定义式 (14) 可知

$$V(\xi) = \|\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_e\|_{Q_1}^2 + \|\delta(k) - \delta_e\|_{Q_2}^2 + \|\mathbf{z}(k) - \mathbf{z}_e\|_{Q_3}^2 + \|\xi(k) - x_e\|_{Q_4}^2 + \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{y}_e\|_{Q_5}^2 + V^*(f_c(\xi))$$

显然,  $V(\xi) > V^*(f_c(\xi))$ .

假设  $k+1$  时刻, 控制序列  $\mathbf{u}(\tau) (k+1 \leq \tau \leq k+T-1)$  为目标函数在预测时域  $[k+1, k+T-1]$  内的最优解, 因为系统不存在扰动, 所以该时刻代价函数为  $V^*(f_c(\xi))$ , 即  $\mathbf{u}(\tau) = \{\mathbf{u}_k^*(1), \dots, \mathbf{u}_k^*(T-1)\}$ . 因为  $\{\mathbf{u}_k^*(1), \dots, \mathbf{u}_k^*(T-1)\}$  是优化问题 (14) 的最优解, 因而该序列能够使得  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_e$ , 且  $(\delta_e, \mathbf{z}_e)$  为引入的逻辑变量和辅助变量的平衡状态对, 所以有  $\delta(T) = \delta_e$ ,  $\mathbf{z}(T) = \mathbf{z}_e$ ,  $\mathbf{y}(T) = \mathbf{y}_e$ . 又因为  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$  是系统的平衡对, 即  $\mathbf{x}_e = f(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$ , 则控制序列  $\{\mathbf{u}_k^*(1), \dots, \mathbf{u}_k^*(T-1), \mathbf{u}_e\}$  是极小化目标函数在预测时域  $[k+1, k+T]$  的一个可行解, 相应的代价函数为  $V^*(f_c(\xi))$ . 针对  $V(f_c(\xi))$  的极小化问题, 它的某个可行解的代价函数为  $V^*(f_c(\xi))$ , 所以  $V^*(f_c(\xi)) \geq V(f_c(\xi))$  必成立.

因为我们已经证明了  $V(\xi) \geq V^*(f_c(\xi))$ , 所以  $V(\xi) \geq V(f_c(\xi))$ , 即  $V(\mathbf{x}(k)) \geq V(\mathbf{x}(k+1))$ . 可见,  $V(\mathbf{x}(k))$  是一个具有递减特性的 Lyapunov 函数, 根据 Lyapunov 稳定性定理, 该控制律能够使闭环系统渐近地稳定在平衡点上.  $\square$

### 3.4 控制算法性能评价

#### 控制算法性能评价

1) 因为逻辑变量是二进制的, 而且各逻辑变量之间存在着一定的联系, 因而可以进行简化<sup>[6]</sup>, 这就导致了逻辑命题转化为不等式约束条件的不唯一性<sup>[7]</sup>. 但对于某一具体问题, 由不同的不等式组所形成的约束空间却是等价的<sup>[12]</sup>. 另一方面, 对  $M, m$  进行估计时, 它们的估计值也是不唯一的, 估计值的大小将对计算过程产生影响, 但不会影响优化问题的最优解<sup>[11,12]</sup>.

2) 本文将非线性过程在多个操作平衡点处进行线性化, 由于所得到的线性化模型都是在平衡点处展开的, 它虽然只是在局部范围内对非线性过程的近似, 但模型切换条件的选择正好限定在平衡点的邻域内, 因而它对于非线性过程具有较好的近似性, 另一方面, 可以采用间接的状态反馈来克服线性模型与非线性过程之间存在的误差以及系统存在的不确定性.

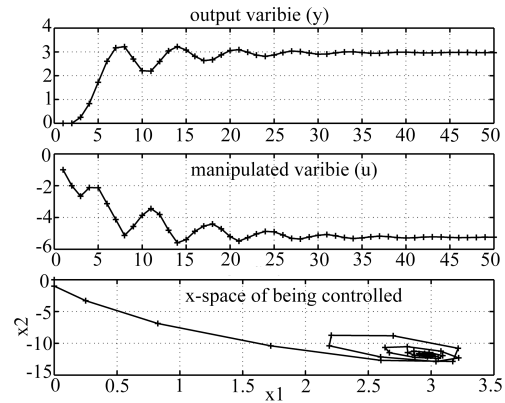


图 1 系统输出、控制输入、状态曲线

Fig. 1 Trajectories of system output, control input and state

3) 从优化的角度看, 随着模型数量的增多, 使用分支定界方法求解 MIQP, 可以使优化接近全局最优解<sup>[12]</sup>, 但 MIQP 的计算量将随着模型数和预测时域 (模型数  $\times$  预测时域) 的增加而增加, 所以应根据实际的需要来选择模型的个数, 在控制效果与计算量之间进行权衡与折衷. 另一方面, 本文在算法提出的过程中, 为了推导的方便, 使用了相同的预测时域和控制时域, 但对于具体的问题, 可灵活设置预测时域和控制时域, 以取得良好的控制性能.

## 4 仿真研究

以文 [9] 提出的例子进行仿真, 非线性系统模型为

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0.25x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1^2(k) + 1.3x_2(k) + u(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

系统的初始状态为  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $u = 0$ , 设定值为  $y_r = 3$ , 约束条件为  $x(k) \in [-4, 4] \times [-16, 16]$ ,  $u \in [-8, 0]$ ,  $y \in [-4, 4]$ .

在  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 2$  处可得到 3 个线性化模型, 应用本文方法定义模型切换规则如下, 模型 0:  $y < 0.5$ , 模型 1:  $0.5 \leq y < 1.5$ , 模型 2:  $y \geq 1.5$ .

由本文算法可知, 需要定义三个逻辑变量  $\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2$  和三个辅助逻辑变量  $\delta_0, \delta_1, \delta_2$  来表示模型的所在状态, 因为  $y = x_1(k)$ , 所以省去了相关  $y$  的辅助变量定义, 现定义状态的辅助变量  $z_0, z_1, z_2$ . 经计算,  $M_1 = [4, 20.8]$ ,  $m_1 = [4, 16.8]$ .

由于本文应用分支定界算法求解混合整数二次规划, 预测时域  $T$  的选取对求解过程影响很大, 为了平衡控制器的性能与在线优化计算量, 这里选择  $T = 3$ , 控制效果如图 1 所示.

从图 1 中可以看出,应用基于混合逻辑的非线性系统多模型约束预测控制算法可以有效地控制非线性过程,系统输出稳定在设定点,且系统状态与输入均满足系统的约束要求。

## 5 结论

本文针对具有大范围工况变化特点的工业过程,提出了基于混合逻辑方法的多模型预测控制算法。该算法使用混合逻辑动态系统模型来描述系统的非线性动态特性,考虑了模型预测过程中多模型与输出预测之间的因果关系,并以线性不等式约束条件的形式将之融合在 MPC 的框架下,模型切换规则以先验知识的形式引入到多模型预测过程,提高了多模型 MPC 在大范围工况条件下模型预测过程的精度。但预测精度的提高是以在线优化计算量的增加作为代价的,因为随着因果约束条件的引入, MPC 的优化问题也相应转变为 MIQP,求解该问题所需的计算量将随逻辑变量的增加而指数增长,因而需要在控制性能与实时性之间进行折衷。

## References

- 1 Sokaert P O M, Mayne D Q, Rawlings J B. Suboptimal model predictive control (Feasibility implies stability). *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(3): 648~654
- 2 Qin S J, Badgwell T A. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 2003, **11**(7): 733~764
- 3 Townsend S, Irwin G W. Nonlinear model based predictive control using multiple local models. *IEE Control Engineering Book Series*, 2001, **61**(11): 223~243
- 4 Danielle D, Doug C. A practical multiple model adaptive strategy for single-loop MPC. *Control Engineering Practice*, 2003, **11**(2): 141~159
- 5 Li Ning, Li Shao-Yuan, Xi Yu-Geng. Multiple model predictive control for MIMO Systems. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(4): 516~523  
(李柠, 李少远, 席裕庚. MIMO 系统的多模型预测控制. *自动化学报*, 2003, **29**(4): 516~523)
- 6 Bemporad A, Morari M. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, 1999, **35**(3): 407~427
- 7 Mo Yi-Wei, Xiao De-Yun. Overview of hybrid dynamic system and its application. *Control Theory and Applications*, 2002, **19**(1): 1~8  
(莫以为, 萧德云. 混合动态系统及其应用综述. *控制理论与应用*, 2002, **19**(1): 1~8)
- 8 Li Xiu-Gai, Gao Dong-Jie, Wang Yu-Hong. Predictive control for hybrid system based on mixed logic dynamic model. *Control and Decision*, 2002, **17**(3): 315~319

(李秀改, 高东杰, 王宇红. 基于混合逻辑动态模型的混杂系统预测控制. *控制与决策*, 2002, **17**(3): 315~319)

- 9 Xi Yu-Geng, Wang Fan. Nonlinear multi-model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 1996, **22**(4): 456~461  
(席裕庚, 王凡. 非线性系统预测控制的多模型方法. *自动化学报*, 1996, **22**(4): 456~461)
- 10 Liu Hong-Bo, Li Shao-Yuan, Chai Tian-You. Regime-decomposing-oriented modeling approach to nonlinear thermal processes and its application. *Control Theory and Applications*, 2004, **21**(5): 785~790  
(刘红波, 李少远, 柴天佑. 一种基于工况分解的热工过程非线性控制模型建立方法及应用. *控制理论与应用*, 2004, **21**(5): 785~790)
- 11 Floudas C A. *Nonlinear and Mixed-Integer Optimization*. Oxford: University Press, 1995
- 12 Williams H P. *Model Building in Mathematical Programming, Third Edition*. New York: Wiley, 1993



**邹涛** 于 2005 年 2 月在上海交通大学获控制理论与控制工程专业博士学位,现为上海交通大学博士后,主要研究方向为先进过程控制。

(**ZOU Tao** Received his Ph.D. degree from Shanghai Jiaotong University in 2005, and now he is a post-doctor in the same university. His research interests include advanced process control, etc.)



**王昕** 于 2002 年在东北大学获控制理论与控制工程专业博士学位,现为上海交通大学讲师,主要研究方向为多模型自适应控制和多变量解耦控制。

(**WANG Xin** Received his Ph. D. degree from Northeastern University in 2002, and now he is a lecturer in Shanghai Jiaotong University. His research interests include multiple models adaptive control and multivariable decoupling control.)



**李少远** 上海交通大学自动化系教授,主要研究方向为模型预测控制、模糊系统和智能系统。本文通信作者。E-mail: syli@sytu.edu.cn

(**LI Shao-Yuan** Professor of Department of Automation, Shanghai Jiaotong University. His research interests include model predictive control, fuzzy systems, and intelligent systems. Corresponding author of this paper.)