

# 约束时变不确定离散系统的输出反馈预测控制综合

丁宝苍<sup>1</sup> 邹涛<sup>2</sup>

**摘要** 研究多包描述系统的离线型输出反馈预测控制. 已有一方法首先综合状态反馈预测控制, 满足输入 / 状态约束; 而在设计观测器时, 不再考虑输入 / 状态约束. 本文则首先给出观测器, 并给出一组不等式条件使得真实状态、观测状态和观测误差都保持在同一个椭圆内部, 以便采用线性矩阵不等式处理输入 / 状态约束. 基此, 本文离线计算一椭圆序列, 每个椭圆对应一控制律和一观测器, 而在线的实时控制律和观测器则从该序列中选择, 使得闭环系统具有稳定性保证. 仿真例子说明了本文方法的有效性.

**关键词** 输出反馈, 鲁棒预测控制, 矩阵不等式, 稳定性

**中图分类号** TP273.13

## Synthesizing Output Feedback Predictive Control for Constrained Uncertain Time-Varying Discrete Systems

DING Bao-Cang<sup>1</sup> ZOU Tao<sup>2</sup>

**Abstract** This paper addresses the off-line output feedback predictive control for systems with polytopic description. An existing method first synthesizes state feedback predictive control satisfying input/state (I/S) constraints. However, in designing the state observer, the I/S constraints have not been reconsidered. This paper, on the contrary, gives the state observer *a priori*, and presents a set of inequalities to keep the true state, observer state and observation error within the same ellipsoid, such that I/S constraints can be dealt with by linear matrix inequalities. Based-on this idea, it off-line calculates a sequence of ellipsoids, each corresponding to a control law and an observer. The on-line real-time control law and observer are selected from the sequence, such that stability is guaranteed for the closed-loop system. The simulation example shows the effectiveness of the new technique.

**Key words** Output feedback, robust predictive control, matrix inequality, stability

## 1 引言

对状态空间模型表示的多包描述系统, 其鲁棒预测控制 (Robust predictive control, RPC) 综合方法已经得到了广泛的研究<sup>[1~6]</sup>. 多数现有方法假设状态是可测的. 对无穷控制时域的情况, 需要采用一个状态反馈律将优化问题转化为有限维优化. 文献 [7] 考虑状态和输入约束, 在每个采样时刻都优化唯一的一个线性状态反馈律. 为保证稳定性, 强制代价函数在每个时刻降低的数值至少等于该时刻的状态和输入的加权和, 这样代价函数可作为 Lyapunov

函数. 在 [8] 中, [7] 的优化问题被离线求解, 从而得到一离线的线性状态反馈律序列, 对应一椭圆型吸引域序列; 在线地, 实时控制律从该序列中适当选择.

对输出反馈情形, [9] 采用了分离设计方法, 即先象 [7]、[8] 那样综合状态反馈律, 然后再单独设计状态观测器. 闭环系统的稳定性分析直接针对控制器和观测器组成的扩展系统, 故可能需要多次调整设计参数 (代价函数加权、观测器增益矩阵等) 才能获得稳定性. 由于在处理输入和状态约束时并没有考虑观测器, 因此 [9] 的方法不能保证状态和输入约束一定可以得到满足. 同时, 由于在优化反馈律时没有考虑观测器, 故相对于整个扩展系统而言, [9] 也没有给出真正得到优化的那个代价函数.

实际上, 未来的输入和状态受到观测误差的影响, 这一点必须要考虑. 在本文中, 为了克服这一问题, 直接采用观测状态综合 RPC. 我们推导出一组矩阵不等式: 当它们满足时, 真实状态、观测状态和误差将保持在同一个椭圆内部. 这样, 可以采用 [7] 给出的手段处理约束. 基此, 采用 [8] 的控制器切换的思路, 我们综合了离线型输出反馈预测控制器.

收稿日期 2005-3-22 收修改稿日期 2006-6-15  
Received March 22, 2005; in revised form June 15, 2006  
国家自然科学基金 (60504013), 河北省教育厅自然科学基金重点基金 (ZH2006008), 河北省科学技术研究与发展指导计划 (06213545) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60504013), Foundation from Educational Office of Hebei Province (ZH2006008), and Foundation from Science and Technological Office of Hebei Province (06213545)  
1. 河北工业大学电气与自动化学院 天津 300130 2. 上海交通大学自动化研究所 上海 200240  
1. School of Electricity and Automation, Hebei University of Technology, Tianjin 300130 2. Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240  
DOI: 10.1360/aas-007-0078

符号:  $\mathfrak{R}^n$  为  $n$  维实空间. 对向量  $\mathbf{x}$  和正定矩阵  $\mathcal{W}$ ,  $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{W}}^2 = \mathbf{x}^T \mathcal{W} \mathbf{x}$ .  $\mathbf{x}(k+i|k)$  为在  $k$  时刻对未来  $k+i$  时刻的变量  $\mathbf{x}$  的预测值.  $I$  为具有适当维数的单位矩阵. 矩阵中的  $*$  表示位于对称位置的分块.

## 2 状态反馈鲁棒预测控制算法回顾

考虑下面的时变不确定离散系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= C(k)\mathbf{x}(k), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  和  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^r$  分别为输入、状态和输出. 约束为

$$-\bar{\mathbf{u}} \leq \mathbf{u}(k+i) \leq \bar{\mathbf{u}}, \quad -\bar{\boldsymbol{\psi}} \leq \boldsymbol{\Psi} \mathbf{y}(k+i+1) \leq \bar{\boldsymbol{\psi}} \quad (2)$$

其中向量的比较为逐元素比较;  $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m]^T, \bar{u}_j > 0, j \in \{1, \dots, m\}$ ;  $\bar{\boldsymbol{\psi}} = [\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_q]^T, \bar{\psi}_s > 0, s \in \{1, \dots, q\}$ ;  $\boldsymbol{\Psi} \in \mathfrak{R}^{q \times r}$ . 假设  $[A(k)|B(k)|C(k)] \in \Omega$ ,  $\Omega = Co\{A_1|B_1|C_1, \dots, A_L|B_L|C_L\}$ , 也就是说, 存在系数  $\omega_l(k), l \in \{1, \dots, L\}$ , 使得

$$\begin{aligned} \omega_l(k) &\geq 0, \quad \sum_{l=1}^L \omega_l(k) = 1 \\ [A(k)|B(k)|C(k)] &= \sum_{l=1}^L \omega_l(k) [A_l|B_l|C_l] \end{aligned} \quad (3)$$

令  $[A_0|B_0|C_0] \subseteq \Omega$  表示标称模型, 也就是“最接近”实际系统的模型.

假设状态  $\mathbf{x}$  可测量. 目标是综合 RPC, 使得系统 (1) 和 (2) 最终被驱动到原点  $(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , 同时每个时刻  $k$  实现

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(k+i|k)} \max_{[A(k+i)|B(k+i)|C(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_{\infty}(k), \\ J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \|\mathbf{x}(k+i|k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|\mathbf{u}(k+i|k)\|_{\mathcal{R}}^2 \right] \end{aligned}$$

s.t.  $-\bar{\mathbf{u}} \leq \mathbf{u}(k+i|k) \leq \bar{\mathbf{u}}$ ,

$$-\bar{\boldsymbol{\psi}} \leq \boldsymbol{\Psi} C(k+i+1)\mathbf{x}(k+i+1|k) \leq \bar{\boldsymbol{\psi}}, \quad \forall i \geq 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{x}(k+i+1|k) = A(k+i)\mathbf{x}(k+i|k) +$$

$$B(k+i)\mathbf{u}(k+i|k), \quad \mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}(k), \quad \forall i \geq 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(k+i|k) = F(k)\mathbf{x}(k+i|k), \quad \forall i \geq 0 \quad (6)$$

其中,  $\mathcal{Q} > 0$  和  $\mathcal{R} > 0$  为加权矩阵,  $F(k)$  为线性状态反馈矩阵.

定义二次型函数  $V(i, k) = \|\mathbf{x}(k+i|k)\|_{P(k)}^2$ ,  $P(k) > 0$ , 并定义标量  $\gamma$ 、矩阵  $Q = \gamma P(k)^{-1}$ 、 $Y = F(k)Q$ 、 $Z$  和  $\Gamma$  为线性矩阵不等式 (LMI) 变量. 为求解问题 (4)~(6), [7] 推导出如下代表稳定性和最优性的 LMI

$$\begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ A_l Q + B_l Y & Q & * & * \\ Q^{1/2} Q & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad l \in \{1, \dots, L\} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ \mathbf{x}(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8)$$

进一步, 如果如下的 LMI 满足, 则 (4) 也满足

$$\begin{bmatrix} Q & * \\ Y & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z_{jj} \leq \bar{u}_j^2, \quad j \in \{1, \dots, m\} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * \\ \boldsymbol{\Psi} C_h(A_l Q + B_l Y) & \Gamma \end{bmatrix} \geq 0, \quad h, l \in \{1, \dots, L\}$$

$$\Gamma_{ss} \leq \bar{\psi}_s^2, \quad s \in \{1, \dots, q\} \quad (10)$$

其中  $Z_{jj}(\Gamma_{ss})$  是  $Z(\Gamma)$  的第  $j(s)$  个对角元<sup>[10]</sup>. 这样, RPC 问题 (4)~(6) 被近似地转变为在每个时刻  $k$  求解如下 LMI 优化问题

$$\min_{\gamma, Q, Y, Z, \Gamma} \gamma, \quad \text{s.t. (7)~(10)} \quad (11)$$

并实施  $\mathbf{u}(k) = YQ^{-1}\mathbf{x}(k)$ . 显然, 这种 RPC 的在线计算量很大, 对高维系统尤甚.

在 [7] 的基础上, [8] 给出离线 RPC, 主要优势是具有非常低的在线计算量.

## 3 输出反馈鲁棒预测控制算法

### 3.1 状态观测器和扩展状态的收敛条件

假设状态不可测. 我们采用如下形式的状态观测器

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = A_0 \hat{\mathbf{x}}(k) + B_0 \mathbf{u}(k) + L_o(\mathbf{y}(k) - C_0 \hat{\mathbf{x}}(k))$$

$$\forall k \geq 0 \quad (12)$$

其中  $L_o$  为观测器增益. 定义  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$  为观测误差, 则可推知: 采用控制律  $\mathbf{u}(k) = F\hat{\mathbf{x}}(k)$  和观测器 (12) 的扩展系统为 (13). (13) 等价于 (14)(该两式见下页页首). 假设存在  $Q$  使得

$$\mathbf{x}(0)^T Q^{-1} \mathbf{x}(0) \leq 1, \quad \hat{\mathbf{x}}(0)^T Q^{-1} \hat{\mathbf{x}}(0) \leq 1$$

$$\mathbf{e}(0)^T Q^{-1} \mathbf{e}(0) \leq 1 \quad (15)$$

据此, 我们推导一些条件使得扩展状态  $[\mathbf{x}^T \quad \mathbf{e}^T]$  指数收敛,  $\hat{\mathbf{x}}$  保持在一个椭圆内部, 即

$$\mathbf{x}(k)^T Q^{-1} \mathbf{x}(k) \leq (1 - \vartheta)^{2k}, \quad \hat{\mathbf{x}}(k)^T Q^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k) \leq 1$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(k) + B(k)F & -B(k)F \\ (A(k) - A_0) + (B(k) - B_0)F - L_o(C(k) - C_0) & A_0 - L_oC_0 - (B(k) - B_0)F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0F + L_o(C(k) - C_0) & L_oC(k) \\ (A(k) - A_0) + (B(k) - B_0)F - L_o(C(k) - C_0) & A(k) - L_oC(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{e}(k)^T Q^{-1} \mathbf{e}(k) \leq (1 - \vartheta)^{2k}, \forall k \geq 0 \quad (16)$$

其中  $\vartheta$  是满足  $0 < \vartheta < 1$  的标量.

**引理 1.** 考虑形为 (13) 或 (14) 的闭环系统, 但不考虑输入和状态约束. 假设存在标量  $\vartheta, \eta, \rho, \mu$ ,  $0 < \vartheta < 1$ ,  $0 < \eta, \rho, \mu < 1 - \vartheta$  和适当维数的矩阵  $Y, L_o$  以及对称正定矩阵  $Q$  使得初始条件 (15) 和下面的不等式满足

$$\begin{bmatrix} (1 - \vartheta - \eta)^2 Q & * \\ B_l Y & Q \end{bmatrix} \geq 0, l \in \{1, \dots, L\} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \eta^2 Q & * \\ A_l Q + B_l Y & Q \end{bmatrix} \geq 0, l \in \{1, \dots, L\} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} (1 - \rho)^2 Q & * \\ L_o C_l Q & Q \end{bmatrix} \geq 0, l \in \{1, \dots, L\} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \rho^2 Q & * \\ A_0 Q + B_0 Y + L_o(C_l - C_0) Q & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\ l \in \{1, \dots, L\} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} (1 - \vartheta - \mu)^2 Q & * \\ (A_l - A_0) Q + (B_l - B_0) Y - L_o(C_l - C_0) Q & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\ l \in \{1, \dots, L\} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \mu^2 Q & * \\ A_0 Q - L_o C_0 Q - (B_l - B_0) Y & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\ l \in \{1, \dots, L\} \quad (22)$$

则采用  $F = YQ^{-1}$  后 (16) 成立.

**证明.** 对  $k = 0$ , (16) 等价于 (15). 对  $k > 0$ , 令

$$\|B(k)F\mathbf{e}(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq (1 - \vartheta - \eta)^2 \mathbf{e}(k)^T Q^{-1} \mathbf{e}(k) \leq (1 - \vartheta - \eta)^2 (1 - \vartheta)^{2k} \quad (23)$$

$$\|[A(k) + B(k)F]\mathbf{x}(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq \eta^2 \mathbf{x}(k)^T Q^{-1} \mathbf{x}(k) \leq \eta^2 (1 - \vartheta)^{2k} \quad (24)$$

则应用 (13) 得到:  $\mathbf{x}(k+1)^T Q^{-1} \mathbf{x}(k+1) = \|[A(k) + B(k)F]\mathbf{x}(k) - B(k)F\mathbf{e}(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq \{ \|[A(k) + B(k)F]\mathbf{x}(k)\|_{Q^{-1}} + \|B(k)F\mathbf{e}(k)\|_{Q^{-1}} \}^2 \leq (1 -$

$\vartheta)^{2k+2}$ . 考虑 (16), (23) 和 (24) 满足的充分条件是

$$F^T B(k)^T Q^{-1} B(k) F \leq (1 - \vartheta - \eta)^2 Q^{-1} \quad (25)$$

$$[A(k) + B(k)F]^T Q^{-1} [A(k) + B(k)F] \leq \eta^2 Q^{-1} \quad (26)$$

类似地, 令

$$\|L_o C(k)\mathbf{e}(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq (1 - \rho)^2 \mathbf{e}(k)^T Q^{-1} \mathbf{e}(k) \leq (1 - \rho)^2 \quad (27)$$

$$\|[A_0 + B_0F + L_o(C(k) - C_0)]\hat{\mathbf{x}}(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq \rho^2 \hat{\mathbf{x}}(k)^T Q^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k) \leq \rho^2 \quad (28)$$

则应用 (14) 得到:  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)^T Q^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \|[A_0 + B_0F + L_o(C(k) - C_0)]\hat{\mathbf{x}}(k) + L_o C(k)\mathbf{e}(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq \{ \|[A_0 + B_0F + L_o(C(k) - C_0)]\hat{\mathbf{x}}(k)\|_{Q^{-1}} + \|L_o C(k)\mathbf{e}(k)\|_{Q^{-1}} \}^2 \leq 1$ . 考虑 (16), (27) 和 (28) 满足的充分条件是

$$C(k)^T L_o^T Q^{-1} L_o C(k) \leq (1 - \rho)^2 Q^{-1} \quad (29)$$

$$[A_0 + B_0F + L_o(C(k) - C_0)]^T Q^{-1} \cdot$$

$$[A_0 + B_0F + L_o(C(k) - C_0)] \leq \rho^2 Q^{-1} \quad (30)$$

类似地, 令

$$\|[(A(k) - A_0) + (B(k) - B_0)F - L_o(C(k) - C_0)] \cdot$$

$$\mathbf{x}(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq (1 - \vartheta - \mu)^2 \mathbf{x}(k)^T Q^{-1} \mathbf{x}(k) \leq (1 - \vartheta - \mu)^2 (1 - \vartheta)^{2k} \quad (31)$$

$$\|[A_0 - L_o C_0 - (B(k) - B_0)F]\mathbf{e}(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq \mu^2 \mathbf{e}(k)^T Q^{-1} \mathbf{e}(k) \leq \mu^2 (1 - \vartheta)^{2k} \quad (32)$$

则应用 (13) 得到:  $\mathbf{e}(k+1)^T Q^{-1} \mathbf{e}(k+1) \leq \{ \|[A_0 - L_o C_0 - (B(k) - B_0)F]\mathbf{e}(k)\|_{Q^{-1}} + \|[A(k) - A_0) + (B(k) - B_0)F - L_o(C(k) - C_0)]\mathbf{x}(k)\|_{Q^{-1}} \}^2 \leq (1 - \vartheta)^{2k+2}$ . 考虑 (16), (31) 和 (32) 满足的充分条件是

$$[(A(k) - A_0) + (B(k) - B_0)F - L_o(C(k) - C_0)]^T Q^{-1} \cdot$$

$$[(A(k) - A_0) + (B(k) - B_0)F - L_o(C(k) - C_0)] \leq$$

$$(1 - \vartheta - \mu)^2 Q^{-1} \quad (33)$$

$$[A_0 - L_o C_0 - (B(k) - B_0)F]^T Q^{-1}.$$

$$[A_0 - L_o C_0 - (B(k) - B_0)F] \leq \mu^2 Q^{-1} \quad (34)$$

最后, 在六式 (25), (26), (29), (30), (33) 和 (34) 的两边同时乘  $Q$ , 运用 Schur 补引理并考虑多包描述的凸性, 即可知上述六式等价于 (17)~(22), 故结论成立.  $\square$

### 3.2 基于观测器的控制律综合

由于真实状态  $\mathbf{x}(k)$  不是精确可知的, 在代价指标中我们采用观测状态. 因此, 我们转为求解如下的最小化问题

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}(k+i|k)} \max_{[A(k+i)|B(k+i)|C(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k) \\ J_\infty(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \|\hat{\mathbf{x}}(k+i|k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|\mathbf{u}(k+i|k)\|_{\mathcal{R}}^2 \right] \\ \text{s.t. } & (4), (5), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+i+1|k) &= (A_0 - L_o C_0)\hat{\mathbf{x}}(k+i|k) + \\ & B_0 \mathbf{u}(k+i|k) + L_o C(k+i)\mathbf{x}(k+i|k), \\ \hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k), \quad \forall i \geq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\mathbf{u}(k+i|k) = F(k)\hat{\mathbf{x}}(k+i|k), \quad \forall i \geq 0 \quad (37)$$

注 1. 问题 (35)~(37) 与 [9] 截然不同, [9] 只是求解了问题 (4)~(6). 在问题 (35)~(37) 中, 很明显输入约束与观测状态直接相关, 而状态约束是相对于真实状态的约束. 文献 [9] 采用控制器与观测器分离设计的方法, 只能保证在无观测误差的情况下输入和状态约束得到满足. 由于观测器是后设计的, 设计时又没有考虑约束, 所以 [9] 并没有给出如何确保满足约束的方法.

定义二次型函数  $\hat{V}(i, k) = \|\hat{\mathbf{x}}(k+i|k)\|_{P(k)}^2$ , 并(同状态反馈情形)定义标量  $\gamma$ 、矩阵  $Q = \gamma P(k)^{-1}$ 、 $Y = F(k)Q$ 、 $Z$  和  $\Gamma$  为线性矩阵不等式 (LMI) 变量. 强加如下的约束:

$$\begin{aligned} \hat{V}(i+1, k) - \hat{V}(i, k) &\leq -\|\hat{\mathbf{x}}(k+i|k)\|_{\mathcal{Q}}^2 \\ &- \|\mathbf{u}(k+i|k)\|_{\mathcal{R}}^2, \quad \forall k, i \geq 0 \end{aligned} \quad (38)$$

闭环系统稳定时,  $\hat{\mathbf{x}}(\infty|k) = 0$ ,  $\hat{V}(\infty, k) = 0$ . 故, 将 (38) 从  $i = 0$  到  $i = \infty$  进行累加得到  $J_\infty(k) \leq \hat{V}(0, k)$ . 令

$$\hat{V}(0, k) \leq \gamma \quad (39)$$

应用 (36), 约束 (38) 等价于

$$\|[A_0 + B_0 F(k) + L_o(C(k+i) - C_0)]\hat{\mathbf{x}}(k+i|k) +$$

$$\begin{aligned} & L_o C(k+i)\mathbf{e}(k+i|k)\|_{P(k)}^2 - \|\hat{\mathbf{x}}(k+i|k)\|_{P(k)}^2 \leq \\ & -\|\hat{\mathbf{x}}(k+i|k)\|_{\mathcal{Q}}^2 - \|F(k)\hat{\mathbf{x}}(k+i|k)\|_{\mathcal{R}}^2 \end{aligned} \quad (40)$$

简便起见, 在 (40) 中省略  $\mathbf{e}(k+i|k)$  (等价于仅在考虑最优性时, 做无误差观测状态的假设). 则 (40) 等价于

$$\begin{aligned} & [A_0 + B_0 F(k) + L_o(C(k+i) - C_0)]^T P(k) \cdot \\ & [A_0 + B_0 F(k) + L_o(C(k+i) - C_0)] - P(k) \leq \\ & -Q - F(k)^T \mathcal{R} F(k) \end{aligned} \quad (41)$$

运用 Schur 补引理, (39) 和 (41) 可转化为如下的 LMI

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ \hat{\mathbf{x}}(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ A_0 Q + B_0 Y + L_o(C_l - C_0)Q & Q & * & * \\ Q^{1/2}Q & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{1/2}Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (43)$$

$l \in \{1, \dots, L\}$

引理 2. 假设在  $k$  时刻, 存在标量  $\vartheta, \eta, \rho, \mu$ ,  $0 < \vartheta < 1$ ,  $0 < \eta, \rho, \mu < 1 - \vartheta$  和适当维数的矩阵  $Y, L_o$  以及对称正定矩阵  $Q$  使得 (17)~(22) 和下面的条件满足

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k)^T Q^{-1} \mathbf{x}(k) &\leq 1, \quad \hat{\mathbf{x}}(k)^T Q^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k) \leq 1 \\ \mathbf{e}(k)^T Q^{-1} \mathbf{e}(k) &\leq 1 \end{aligned} \quad (44)$$

则采用控制律  $\mathbf{u}(k+i|k) = YQ^{-1}\hat{\mathbf{x}}(k+i|k)$  后

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+i|k)^T Q^{-1} \mathbf{x}(k+i|k) &\leq (1 - \vartheta)^{2i} \\ \hat{\mathbf{x}}(k+i|k)^T Q^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k+i|k) &\leq 1, \quad \forall i \geq 0 \end{aligned} \quad (45)$$

进一步, (35) 中输入 / 状态约束满足的充分条件是 (9) 和下式满足

$$\begin{bmatrix} Q & * & * \\ 0 & Q & * \\ \sqrt{2}\Psi C_h(A_l Q + B_l Y) & -\sqrt{2}\Psi C_h B_l Y & \Gamma \end{bmatrix} \geq 0 \quad (46)$$

$h, l \in \{1, \dots, L\}; \Gamma_{ss} \leq \bar{\psi}_s^2, s \in \{1, \dots, q\}$

证明. 结论 (45) 可以直接由引理 1 得到. (35) 中输入约束的处理方法同状态反馈情形, 即 (9) 可以保证输入约束满足. 对状态约束, 假设  $\xi_s$  为  $q$  维单位矩阵的第  $s$  行, 则利用 (13) 得 (47). 因此, 如果存在对称矩阵  $\Gamma$  使得 (48) 满足(式(47), (48) 见下页页首), 则  $|\xi_s \Psi C(k+i+1)\mathbf{x}(k+i+1|k)| \leq \bar{\psi}_s$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \xi_s \Psi C(k+i+1) \mathbf{x}(k+i+1|k) \right| = \\ & \left| \xi_s \Psi C(k+i+1) \begin{bmatrix} A(k) + B(k)F & -B(k)F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & Q^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1/2} & 0 \\ 0 & Q^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+i|k) \\ \mathbf{e}(k+i|k) \end{bmatrix} \right| \leq \\ & \left\| \xi_s \Psi C(k+i+1) \begin{bmatrix} A(k) + B(k)F & -B(k)F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & Q^{1/2} \end{bmatrix} \right\| \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma - 2\Psi C(k+i+1) \begin{bmatrix} A(k) + B(k)F & -B(k)F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^T B(k)^T + A(k)^T \\ -F^T B(k)^T \end{bmatrix} C(k+i+1)^T \Psi^T \geq 0 \\ & \Gamma_{ss} \leq \bar{\psi}_s^2, s \in \{1, \dots, q\} \end{aligned} \quad (48)$$

$\forall i \geq 0, \forall s \in \{1, \dots, q\}$ . 运用 Schur 补引理并考虑多包描述的凸性, 即可知 (48) 等价于 (46).  $\square$

这样, RPC 问题 (35)~(37) 被近似地转变为如下的 LMI 优化问题

$$\min_{\gamma, Q, Y, Z, \Gamma} \quad \text{s.t. (42), (43), (17)~(22), (9), (46)} \quad (49)$$

**定理 1.** 对系统 (1)~(3), 选择合适的标量  $\vartheta, \eta, \rho, \mu, 0 < \vartheta < 1, 0 < \eta, \rho, \mu < 1 - \vartheta$  和矩阵  $L_o$  并构造优化问题 (49). 假设在时刻  $k$ , (44) 满足且 (49) 是可行的, 则采用  $F(k) = YQ^{-1}(Y, Q$  由求解 (49) 得到) 和  $L_o$  后, 状态和输入约束始终满足且闭环系统的平衡点  $\{\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{e} = \mathbf{0}\}$  是指数稳定的.

### 3.3 离线输出反馈鲁棒预测控制

**算法 1.** 1) 离线地, 选择状态点  $\hat{\mathbf{x}}_i, i \in \{1, \dots, N\}$  和  $\vartheta, \eta, \rho, \mu, L_o^i$ . 用  $\hat{\mathbf{x}}_i$  替换 (42) 中的  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ , 并求解 (49) (其中  $L_o$  应替换为  $L_o^i$ ), 得到相应的矩阵  $Q_i, Y_i$ , 椭圆集  $\varepsilon_i = \{\xi \in \mathcal{R}^n | \xi^T Q_i^{-1} \xi \leq 1\}$  和反馈控制增益  $F_i = Y_i Q_i^{-1}$ . 注意  $\hat{\mathbf{x}}_i$  的选择应该使得  $\varepsilon_j \subset \varepsilon_{j-1}, \forall j \in \{2, \dots, N\}$ ; 2) 在线地, 在初始时刻  $k = 0$ , 确定  $\hat{\mathbf{x}}(0)$  和  $i = i_0$  满足

$$\mathbf{x}(0) \in \varepsilon_{i_0}, \hat{\mathbf{x}}(0) \in \varepsilon_{i_0}, \mathbf{e}(0) \in \varepsilon_{i_0}$$

然后首先采用  $\{F_{i_0}, L_o^{i_0}\}$ ; 3) 在线地, 在每个时刻  $k > 0$ , 计算  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ . 如果下面的条件满足, 则控制器和观测器增益矩阵需要从  $\{F_{i_\tau}, L_o^{i_\tau}\}$  切换到  $\{F_{i_{\tau+1}}, L_o^{i_{\tau+1}}\} (i_{\tau+1} < N)$

$$\begin{aligned} & (1-\vartheta)^{2n_\tau} Q_{i_\tau} \leq Q_{i_{\tau+1}}, \hat{\mathbf{x}}(k)^T Q_{i_{\tau+1}}^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k) \leq 1, i_{\tau+1} = \\ & \max \{i \in \{i_\tau + 1, \dots, N\} | (1-\vartheta)^{2n_\tau} Q_{i_\tau} \leq Q_i\} \end{aligned} \quad (50)$$

其中  $n_\tau$  是  $\{F_{i_\tau}, L_o^{i_\tau}\}$  已经使用的次数.

**定理 2.** 对系统 (1)~(3), 采用算法 1 中的离线

输出反馈 RPC. 则闭环系统指数稳定的充分条件是  $\mathbf{x}(0) \in \varepsilon_1, \hat{\mathbf{x}}(0) \in \varepsilon_1$ , 且  $\mathbf{e}(0) \in \varepsilon_1$ .

**证明.** 据引理 1, 当  $\{F_{i_0}, L_o^{i_0}\}$  已经应用了  $n_0$  次后,  $\mathbf{x}(n_0)^T Q_{i_0}^{-1} \mathbf{x}(n_0) \leq (1-\vartheta)^{2n_0}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}(n_0)^T Q_{i_0}^{-1} \hat{\mathbf{x}}(n_0) \leq 1, \mathbf{e}(n_0)^T Q_{i_0}^{-1} \mathbf{e}(n_0) \leq (1-\vartheta)^{2n_0}$ . 若 (50) 对  $\tau = 0$  和  $i_1 \geq N$  满足, 则  $\mathbf{x}(n_0) \in \varepsilon_{i_1}, \hat{\mathbf{x}}(n_0) \in \varepsilon_{i_1}, \mathbf{e}(n_0) \in \varepsilon_{i_1}$ ; 但对  $i_1 < N$ , 有可能  $\mathbf{x}(n_0)$  (或者  $\hat{\mathbf{x}}(n_0)$ , 或者  $\mathbf{e}(n_0)$ ) 不属于  $\varepsilon_{i_1+1}$ . 故, 若 (50) 满足, 则  $\{F_{i_1}, L_o^{i_1}\}$  应该取代  $\{F_{i_0}, L_o^{i_0}\}$ . 类似地, 在适当的时候  $\{F_{i_2}, L_o^{i_2}\}$  应该取代  $\{F_{i_1}, L_o^{i_1}\}$ , 等等. 最后, 扩展状态  $\{\mathbf{x}, \mathbf{e}\}$  将被驱动到原点  $\{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}$ .  $\square$

## 4 仿真例子

考虑一个顶点数为  $L = 2$  的系统:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.86 & 0 \\ 1 - \alpha(k) & 0.86 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.86 & 0 \\ 1 + \alpha(k) & 0.86 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1 - \alpha(k) \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 + \alpha(k) \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 - \alpha(k) \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \alpha(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中  $\alpha(k) \in [-0.5, 0.5]$  为时变不确定参数. 输入约束为  $|u| \leq 0.1$ . 取  $Q = I$  和  $\mathcal{R} = 1$ . 选择  $\eta, \rho, \mu = 0.9, \vartheta = 0.05, L_o = [0.003 \quad -0.04]$ .

选择  $\hat{\mathbf{x}}_i = [\zeta_i \quad 0]^T, \zeta_i = 50, 40, 30, 20, 10, 5, 3, 2$  得到反馈控制增益  $F_1 \sim F_8$ . 然后, 选择初始状态为  $\hat{\mathbf{x}}(0) = [-50 \quad 0]^T$  和  $\mathbf{x}(0) = [-35 \quad 0]^T$  并采用算法 1. 当  $\alpha(k) = 0.5 \sin(40k)$  时, 闭环系统的观测状态 (实线) 和真实状态 (虚线) 如图 1 所示. 图 2 显示了相应的控制输入信号.

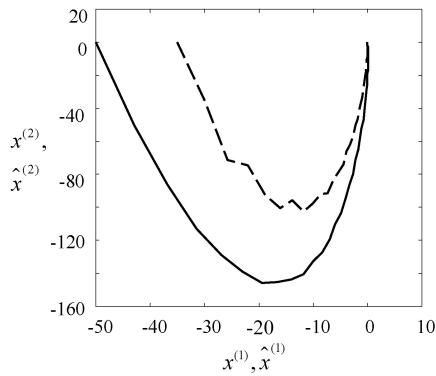


图 1 闭环系统的状态轨迹图

Fig. 1 State trajectories of the closed-loop system

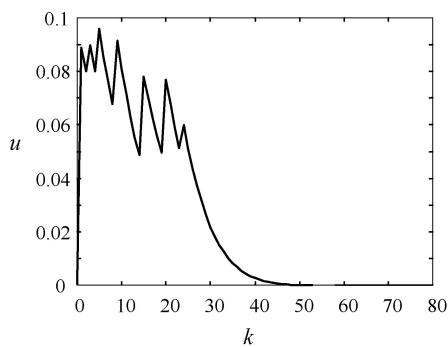


图 2 控制输入信号

Fig. 2 Control input signal

## 5 结论

针对多包描述系统, 综合了输出反馈鲁棒预测控制. 本文不是将控制器和观测器分离设计, 而是直接利用观测状态构造代价函数; 并且推导了一组矩阵不等式, 使得满足这些不等式时, 系统的真实、观测状态和观测误差都保持在同一个椭圆内部. 这样, 状态和输入约束都可方便地由 LMI 技术处理. 从查阅文献的情况看, 本文给出的控制方案首次解决了多包描述、含状态和输入约束的不确定系统的输出反馈预测控制的稳定性综合问题. 该问题的主要难度在于要满足输入和状态的硬约束, 同时要具有稳定性保证, 因此采用控制器与观测器的分离设计方法<sup>[9]</sup> 很难同时兼顾这两点.

## References

1 Kouvaritakis B, Rossiter J A, Schuurmans J. Efficient robust predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(8): 1545~1549

- 2 Lee Y I, Kouvaritakis B. Superposition in efficient robust constrained predictive control. *Automatica*, 2002, **38**(5): 875~878
- 3 Ding Bao-Cang, Yang Peng. Synthesizing off-line robust model predictive controller based on nominal performance cost. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(2): 304~310 (丁宝苍, 杨鹏. 基于标称性能指标的离线鲁棒预测控制器综合. *自动化学报*, 2006, **32**(2): 304~310)
- 4 Ding Bao-Cang, Xi Yu-Geng, Li Shao-Yuan. A synthesis approach of on-line constrained robust model predictive control. *Automatica*, 2004, **40**(1): 163~167
- 5 Park P, Jeong S C. Constrained RHC for LPV systems with bounded rates of parameter variations. *Automatica*, 2004, **40**(5): 856~872
- 6 Wang Y J, Rawlings J B. A new robust model predictive control method. *Journal of Process Control*, 2004, **14**(2): 231~247
- 7 Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 1996, **32**(10): 1361~1379
- 8 Wan Z, Kothare M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 2003, **39**(5): 837~846
- 9 Wan Z, Kothare M V. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 2002, **12**(7): 763~774
- 10 Lee J W. Exponential stability of constrained receding horizon control with terminal ellipsoid constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(1): 83~88



丁宝苍 2000年5月和2003年7月分别在石油大学(北京)和上海交通大学获得硕士、博士学位. 2005年9月至2006年8月间为加拿大阿尔伯塔大学博士后. 现为河北工业大学副教授, 主要研究方向为预测控制、模糊控制及其在过程系统中的应用. 本文通信作者. E-mail: baocang.ding@gmail.com

(DING Bao-Cang Received his master degree from University of Petroleum in China (Beijing) in May 2000 and Ph.D. degree from Shanghai Jiaotong University in July 2003. From September 2005 to August 2006, he was a post-doctoral research fellow in University of Alberta, Canada. Now, he is an associate professor in Hebei University of Technology. His research interests include predictive control, fuzzy control and their applications in process industry. Corresponding author of this paper.)



邹涛 2005年在上海交通大学获得博士学位. 现为上海交通大学博士后, 研究兴趣为先进过程控制等. E-mail: yk-zoutao@sjtu.edu.cn

(ZOU Tao Received his Ph.D. degree from Shanghai Jiaotong University in 2005 and now he is a post-doctor in the same university. His research interests include advanced process control, etc.)