第 33 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 33, No. 1
2007 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA January, 2007

不确定广义系统的降阶 H_∞ 控制器设计

徐大波[1] 张庆灵[1] 胡跃冰[1]

摘 要 研究基于函数观测器的不确定广义系统的降阶 H_∞ 控制器设计问题. 首先提出了基于严格线性矩阵不等式的不确定广义系统 H_∞ 控制的充分条件, 并用于状态反馈 H_∞ 控制设计. 然后对所得控制增益进行降阶观测, 基于广义 Sylvester 矩阵方程的显式通解, 考虑系统的 H_∞ 性能约束, 提出了降阶输出反馈控制器的参数化设计方法.

关键词 不确定广义系统, H_∞ 控制, 函数观测器, 广义二次稳定, 降阶控制

中图分类号 TP13

Reduced-order H_∞ Controller Design for Uncertain Descriptor Systems

XU Da-Bo[1] ZHANG Qing-Ling[1] HU Yue-Bing[1]

Abstract In this paper robust reduced-order observer-based H_∞ controller design for uncertain descriptor systems is investigated. Firstly, based on strict linear matrix inequalities, a sufficient condition for H_∞ control of uncertain descriptor systems is proposed to design the state feedback H_∞ control law. Then the control gain is used to design the reduced-order observer. Based on an explicit general solution to a class of generalized Sylvester equations, a parameterized design method is presented with the constraint of H_∞ performance.

Key words Uncertain descriptor systems, H_∞ control, functional observer, generalized quadratic stability, reduced-order control

1 引言

反馈控制是一种常用且有效的系统控制方法, 通过反馈控制可以使系统满足预定的性能指标, 其中状态反馈已经充分显示出了在反馈控制中的重要性和优越性[1]. 但实际情况表明, 对于一个确定的系统, 很多情况下不可能实际获得系统的状态, 这就使得系统很难实现状态反馈, 基于观测器进行控制设计就成为一个必要的手段和有效的方法. 近年来, 应用 Luenberger 函数观测器设计反馈控制器问题, 已经得到了广泛的研究, 并取得一些重要的结果[2~4].

相比全阶控制器, 降阶控制器的阶数较低, 在实际应用中成本也较低, 因此深受工程师们的偏爱[1]. 基于降阶观测器进行降阶控制器设计是一种可行的方法, 通过这种方法, 我们可以首先设计降阶观测器, 参数化观测器系数, 然后通过反馈 H_∞ 优化控制来确定各参数, 实现 H_∞ 降阶控制. 由于实际被控对象的不确定性的存在, 以及观测器设计中遇到的带约束的广义 Sylvester 方程的求解问题[5,6] 以及解的表达形式的限制, 使得通常的方法很难实现不确定广义系统的降阶控制. 文献 [7] 研究了广义系统的干扰解耦观测器设计问题, 提出了基于 Sylvester 矩阵方程的显式通解的参数化设计算法, 该方法大大降低了计算的复杂性, 并且具有较高的设计自由度. 本文利用文献 [7] 的观测器设计方法, 首先对 H_∞ 状态反馈增益进行渐近降阶观测，然后设计降阶控制器, 基于广义 Sylvester 矩阵方程的显式通解[8] 和线性矩阵不等式优化方法, 实现广义系统的降阶 H_∞ 控制.

本文在第 3 节, 首先提出了一种基于严格线性矩阵不等式的状态反馈 H_∞ 控制的新的设计方法. 在第 4 节利用所得状态反馈增益矩阵, 提出了基于观测器的降阶 H_∞ 控制设计方法. 为了便于叙述, 文中作如下约定: 对于矩阵 A, $He\{A\} := A + A^{\mathrm{T}}$. $E \in R^{n\times n}$ 为奇异矩阵, $\mathrm{rank}(E) = r \le n$; $\Xi \in R^{n\times(n-r)}$, $\Theta \in R^{n\times(n-r)}$, 满足 $E^{\mathrm{T}}\Xi = 0$, $E\Theta = 0$, 且 $\mathrm{rank}(\Xi) = \mathrm{rank}(\Theta) = n - r$; $X \in R^{n\times n}$, $Q \in R^{n\times n}$, $Y \in R^{n\times(n-r)}$, $S \in R^{n\times(n-r)}$. I 表示适当维数的单位矩阵, 对 $\forall t \in R^+$, 时变不确定矩阵 $\Delta(t)$ 满足 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t) \le I$.

收稿日期 2005-12-20 收修改稿日期 2006-4-7
Received December 20, 2005; in revised form April 7, 2006
国家自然科学基金 (60574011) 资助, 辽宁省普通高校学科带头人基金 (124210) 资助, 辽宁省自然科学基金 (20052022) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60574011), Education Ministry Foundation for University Key Teacher of Liaoning Province, P. R. China (124210), and Natural Science Foundation of Liaoning Province, P. R. China (20052022)
1. 东北大学系统科学研究所 沈阳 110004
1. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang 110004
DOI: 10.1360/aas-007-0044

2　问题描述和准备工作

2.1　问题描述

考虑如下形式的不确定线性连续广义系统

$$
\begin{aligned}
E\dot{x}(t) &= (A+\Delta_A)\boldsymbol{x}(t) + (B_1+\Delta_{B_1})\boldsymbol{w}(t) + B\boldsymbol{u}(t)\\
\boldsymbol{z}(t) &= C_1\boldsymbol{x}(t) + D_{11}\boldsymbol{\omega}(t) + D_{12}\boldsymbol{u}(t)\\
\boldsymbol{y}(t) &= (C_2+\Delta_{C_2})\boldsymbol{x}(t) + (D_{21}+\Delta_{D_{21}})\boldsymbol{\omega}(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中

$$
\begin{bmatrix} \Delta_A & \Delta_{B_1}\\ \Delta_{C_2} & \Delta_{D_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x\\ M_y \end{bmatrix}\Delta(t)\begin{bmatrix} N_x & N_\omega \end{bmatrix} \tag{2}
$$

这里 $\boldsymbol{x}(t)\in R^{n\times n}$ 为系统状态向量, 初始状态满足 $E\boldsymbol{x}(0_-)=0$, $\boldsymbol{z}(t)\in R^q$ 为控制输出向量, $\boldsymbol{y}(t)\in R^p$ 为测量输出向量, $\boldsymbol{u}(t)\in R^l$ 为输入向量, $\boldsymbol{\omega}(t)\in R^{n\times n}$ 为扰动输入向量, 其它系数矩阵均有适当的维数.

本文的目的是设计如下降阶 H_∞ 控制器

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= H\boldsymbol{\theta} + TBu + Zy\\
u &= F_1\boldsymbol{\theta} + F_2y
\end{aligned}
\tag{3}
$$

其中 $\boldsymbol{\theta}\in R^m(m\le n)$ 为控制器状态向量, 参数矩阵 H, T, Z, F_1, F_2 均具有适当的维数, 并且满足

1) $\lim_{t\to\infty}(u-Kx)=0$ $(\omega\equiv 0)$. K 为系统 (1) 的 H_∞ 状态反馈增益矩阵;

2) 由系统 (1) 和控制器 (3) 构成的闭环系统是广义二次稳定的[9], 且对于给定的 $\gamma>0$, H_∞ 性能指标 $J_{z\omega}=\int_0^\infty(z^{\mathrm T}z-r^2\omega^{\mathrm T}\omega)<0$.

2.2　预备结论

引理 1. 给定矩阵 E, $X>0$, Y, 若 $(E^{\mathrm T}X+Y\Xi^{\mathrm T})$ 可逆, 则必存在矩阵 $Q>0$, S, 使得 $EQ+S\Theta^{\mathrm T}=(E^{\mathrm T}X+Y\Xi^{\mathrm T})^{-1}$.

引理 2. 如果存在矩阵 $X>0$, Y, 使得

$$
\mathrm{He}\left\{(E^{\mathrm T}X+Y\Theta^{\mathrm T})(A+\Delta_A)\right\}<0 \tag{4}
$$

对所有允许的不确定项 Δ_A 均成立, 则系统 $E\dot{x}(t)=(A+\Delta_A(t))\boldsymbol{x}(t)$ 是广义二次稳定的.

3　H_∞ 性能分析和状态反馈控制器设计

首先考虑如下形式的不确定线性连续广义系统

$$
\begin{aligned}
E\dot{x}(t) &= A_\Delta\boldsymbol{x}(t) + B_\Delta\boldsymbol{\omega}(t)\\
\boldsymbol{z}(t) &= C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{\omega}(t)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

这里 $A_\Delta=A+\Delta_A$, $B_\Delta=B+\Delta_B$, $\begin{bmatrix}\Delta_A & \Delta_B\end{bmatrix}=M\Delta(t)\begin{bmatrix}N_x & N_\omega\end{bmatrix}$, 系统的初始状态满足 $E\boldsymbol{x}(0)=0$, 各矩阵及向量均具有适当维数.

定理 1. 系统 (5) 是广义二次稳定的, 并且对于给定的 $\gamma>0$, H_∞ 性能指标 $J_{z\omega}<0$, 如果存在矩阵 $X>0$, Y, 及 $\mu>0$, 使得

$$
\begin{bmatrix}
\begin{array}{c}\mathrm{He}\{(E^{\mathrm T}X+\\ Y\Xi^{\mathrm T})A\}+\mu N_x^{\mathrm T}N_x\end{array} & * & * & *\\
\begin{array}{c}B^{\mathrm T}(E^{\mathrm T}X+Y\Xi^{\mathrm T})^{\mathrm T}+\\ \mu N_\omega^{\mathrm T}N_x\end{array} & \begin{array}{c}-\gamma I+\\ \mu N_\omega^{\mathrm T}N_\omega\end{array} & * & *\\
C & D & -\gamma I & *\\
M^{\mathrm T}(E^{\mathrm T}X+Y\Xi^{\mathrm T})^{\mathrm T} & 0 & 0 & -\mu I
\end{bmatrix}<0 \tag{6}
$$

上式中, $*$ 表示对称矩阵中对称位置元素的转置 (下同). 定理 1 的证明需要用到 Schur 补引理和文献 [10] 中的结论. 由引理 1, 我们可以得到类似定理 1 的另一形式的条件.

定理 2. 系统 (5) 是广义二次稳定的, 并且对于给定的 $\gamma>0$, H_∞ 性能指标 $J_{z\omega}<0$, 如果存在矩阵 $Q>0$, S, 及 $\mu>0$, 使得

$$
\begin{bmatrix}
\begin{array}{c}\mathrm{He}\{A(EQ+S\Theta^{\mathrm T})^{\mathrm T}\}+\\ \mu MM^{\mathrm T}\end{array} & * & * & *\\
B^{\mathrm T} & -\gamma I & * & *\\
C(EQ+S\Xi^{\mathrm T})^{\mathrm T} & D & -\gamma I & *\\
N_x(E^{\mathrm T}Q+S\Xi^{\mathrm T})^{\mathrm T} & N_\omega & 0 & -\mu I
\end{bmatrix}<0 \tag{7}
$$

根据条件 (7), 我们给出系统 (1) 的状态反馈 H_∞ 控制器设计方法.

定理 3. 对于系统 (1) 和给定正实数 $\gamma>0$, 如果存在适当维数的矩阵 $Q>0$, S, G, 及 $\mu>0$, 使得

$$
\begin{bmatrix}
\begin{array}{c}\mathrm{He}\{A(EQ+S\Theta^{\mathrm T})^{\mathrm T}+\\ BG\}+\mu MM^{\mathrm T}\end{array} & * & * & *\\
B^{\mathrm T} & -\gamma I & * & *\\
\begin{array}{c}C_1(EQ+S\Theta^{\mathrm T})^{\mathrm T}+\\ D_{12}G\end{array} & D_{11} & -\gamma I & *\\
N_x(EQ+S\Theta^{\mathrm T})^{\mathrm T} & N_\omega & 0 & -\mu I
\end{bmatrix}<0 \tag{8}
$$

则存在状态反馈控制器 $u=G(EQ+S\Theta^{\mathrm T})^{-\mathrm T}\boldsymbol{x}(t)$, 使得闭环系统广义二次稳定, 且具有 H_∞ 范数约束 γ.

不同于以往的设计方法和结论[1,11], 条件 (8) 为严格线性矩阵不等式, 可以利用 Matlab-LMI 工具

箱直接求解.

4 降阶 H_∞ 控制器设计

在上述工作的基础上, 我们考虑降阶控制器 (3) 的设计方法. 首先考虑观测误差, 由观测误差极限 $\lim_{t\to\infty}(u-Kx)$, 令

$$\begin{aligned} e &= u - Kx \\ &= F_1\theta + F_2 y - Kx \\ &= F_1\varepsilon + (F_1TE + F_2C_2 - K)x + F_2\Delta_{C_2}x + \\ &\quad F_2D_{21\Delta}\omega \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon = \theta - TEx$. 记 $B_{1\Delta} = B_1 + \Delta_{B_1}(t)$, $D_{21\Delta} = D_{21} + \Delta_{D_{21}}(t)$, 对 ε 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = &H\varepsilon + (HTE + ZC_2 - TA)x + \\ &(Z\Delta_{C_2} - T\Delta_A)x - (ZD_{21\Delta} + TB_{1\Delta})\omega \end{aligned} \tag{9}$$

可见, 如果误差系统 (9) ($\omega \equiv 0$) 是广义二次稳定的, 并且方程

$$\lambda(H) \subset C^- \tag{10}$$

$$HTE + ZC_2 - TA = 0 \tag{11}$$

$$F_1TE + F_2C_2 - K = 0 \tag{12}$$

$$F_2\begin{bmatrix} M_y & D_{21} \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

有解, 则有 $\lim_{t\to\infty} e = 0$.

下面我们首先考虑方程 (10) ~ (13) 的求解, 然后结合由系统 (1) 和控制器 (3) 构成的闭环系统的 H_∞ 范数约束, 确定控制器 (5) 的参数矩阵. 首先将方程 (12) 和 (13) 等价表示为

$$F_1\begin{bmatrix} TE & 0 & 0 \end{bmatrix} + F_2\begin{bmatrix} C_2 & M_y & D_{21} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{14}$$

方程 (11) 和 (14) 为广义 Sylvester 方程, 文献 [5], [6] 给出了一种含有矩阵广义逆形式的参数解, 但是考虑到系统的 H_∞ 性能约束, 需要找到解的适当参数化表示形式. 方程 (11) 和 (14) 有解, 当且仅当存在矩阵 T 使得

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}\begin{bmatrix} TE \\ C_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} TE \\ C_2 \\ TA \end{bmatrix} \\ &\operatorname{rank}\begin{bmatrix} TE & 0 & 0 \\ C_2 & M_y & D_{21} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} TE & 0 & 0 \\ C_2 & M_y & D_{21} \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

成立[7,8]. 若存在矩阵 T 满足 (15) 式, 则存在可逆矩阵 U_1, V_1, U_2, V_2, 使得矩阵 H, Z, F_1, F_2 参数化为

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} H & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0T_1^{-1} & L \end{bmatrix} U_1 = \\ &\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0T_1^{-1} & L \end{bmatrix} U_{11} & \begin{bmatrix} A_0T_1^{-1} & L \end{bmatrix} U_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0T_2^{-1} & N \end{bmatrix} U_2 = \\ &\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0T_2^{-1} & N \end{bmatrix} U_{21} & \begin{bmatrix} K_0T_2^{-1} & N \end{bmatrix} U_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

其中, 矩阵 T_1 与 A_0, T_2 与 K_0 分别具有相同的列数, 且T_1, T_2可逆. 矩阵 L, N 为自由参数, $U_1 = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$.

注 1. 对于满足 (15) 式的矩阵 T, 如果自由参数 L, N 都不存在, 即 H, Z, F_1, F_2 仅由参数 T 唯一确定, 此时可以直接验证条件 (10). 若满足, 则存在控制器 (3).

下面考虑 H_∞ 性能约束, 进一步的确定自由参数 L, N 的值, 并使得由系统 (1) 和降阶控制器 (3) 构成的闭环系统广义二次稳定.

定理 4. 系统 (30) 是广义二次稳定的, 且具有 H_∞ 范数约束 $\gamma > 0$, 如果存在适当维数的矩阵 $P > 0$, $Q > 0$, $S > 0$, G, N 及 $\mu > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{c}\mathrm{He}\left\{(A+BK)\Phi_1^{\mathrm{T}}\right\} + \\ \mu\Phi_1N_x^{\mathrm{T}}N_x\Phi_1\end{array} & * & * & * & * \\ F_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & \Phi_2 & * & * & * \\ B_1^{\mathrm{T}} + \mu N_\omega^{\mathrm{T}}N_x\Phi_1^{\mathrm{T}} & \Phi_3^{\mathrm{T}} & -\gamma I & * & * \\ (C_1 + D_{12}K)\Phi_1^{\mathrm{T}} & D_{12}F_1 & D_{11} & -\gamma I & * \\ M_x^{\mathrm{T}} & \Phi^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{18}$$

其中, $\Phi = \begin{bmatrix} PA_0T_1^{-1} & G \end{bmatrix} U_{12}M_y - PTM_x$, $F_1 = \begin{bmatrix} K_0T_2^{-1} & N \end{bmatrix} U_{21}$, $G = PL$, $\Phi_1 = EQ + S\Theta^{\mathrm{T}}$, $\Phi_2 = \mathrm{He}\left\{\begin{bmatrix} PA_0T_1^{-1} & G \end{bmatrix} U_{11}\right\}$, $\Phi_3 = \begin{bmatrix} PA_0T_1^{-1} & G \end{bmatrix} U_{12}D_{21} - PTB_1$.

由定理 4 可得 $L = P^{-1}G$, 再由 (16) 式和 (17) 式可以得到控制器 (3) 的各参数矩阵. 综合以上分析, 我们可以给出基于函数观测器的降阶 H_∞ 控制器设计算法.

算法 1.

1) 根据定理 3，求解 H_∞ 状态反馈增益矩阵 K.

2) 根据条件 (15)，对参数矩阵 T 赋值.

3) 求解方程 (11) 和 (14), 得到 H, Z, F_1, F_2 的参数表示式. 若 L, N 均不存在, 转入 4); 反之, 转入 5).

4) 若满足条件 (10), 利用 Matlab 中的函数 mincx 计算 H_∞ 性能上界 γ. 若不满足条件 (10), 返回 2).

5) 根据定理 4 和函数 mincx 确定 L, N 和 γ 的最优值. 若不可行, 返回 2).

注 2. 在算法过程中, 可以通过不断更新参数 T 的取值, 优化 H_∞ 性能上界 γ.

5 结论

通过降阶观测器的参数化, 进一步考虑系统的 H_∞ 控制器设计问题. 该方法避免了传统观测器设计中解的表达形式的约束, 基于广义 Sylvester 方程显式通解, 考虑了系统的 H_∞ 性能约束. 控制器的阶数可以自由调整, 能够实现较高的设计自由度. 在系统的状态无法直接获知的情况下, 可以采用降阶输出反馈控制器实现对系统的 H_∞ 控制.

References

1 Zhang Qing-Ling, Yang Dong-Mei. *Analysis & Synthesis for Uncertain Descriptor Systems*. Shenyang: Northeastern University Press, 2003, 132∼138
(张庆灵, 杨冬梅. 不确定广义系统的分析和综合. 沈阳: 东北大学出版社, 2003, 132∼138)

2 Stoorvogel A A, Saberi A, Chen B M. A reduced order observer based controller design for H_∞ optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(2): 355∼360

3 Iwasaki T, Skelton R E. All fixed order H_∞ controllers: Observer-based structure and covariance bounds. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(3): 512∼516

4 Lien C H. Robust observer-based control of systems with state perturbations *via* LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(8): 1365∼1370

5 Hou M, Muller P C. Design of a class of Luenberger observers for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(1): 133∼136

6 Castelan E B, Silva V G. On the solution of a Sylvester equation appearing in descriptor systems control theory. *Systems & Control Letters*, 2005, **54**: 109∼117

7 Duan Guang-Ren, Wu Ai-Guo. Design of observers with disturbance decoupling in descriptor systems. *Control Theory & Applications*, 2005, **22**(1): 123∼126.
(段广仁, 吴爱国. 广义线性系统的干扰解耦观测器设计. 控制理论与应用, 2005, **22**(1): 123∼126)

8 Duan G R. On the solution to the Sylvester matrix equation AX + BW = EVF. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(4): 612∼614

9 Xu S Y, Yang C W. An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems. *International Journal of Systems Science*, 2000, **31**(1): 55∼61

10 Wang Y, Xie L, De Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 1992, **19**(2): 139∼149

11 Masusbuchi I, Kamitane Y, Ohara A, Suda N. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach. *Automatica*, 1997, **33**(4): 669∼673

徐大波 硕士, 东北大学系统科学研究所. 研究兴趣有鲁棒控制, 模型降阶和控制器降阶等.
(**XU Da-Bo** M.S. at Institute of Systems Science, Northeastern University. His research interests include robust control, model reduction, and controller reduction.)

张庆灵 博士, 教授, 东北大学理学院院长, 系统科学研究所所长. 研究兴趣有复杂系统的分析与控制, 广义系统理论等. 本文通信作者. Email: qlzhang@mail.neu.edu.cn
(**ZHANG Qing-Ling** Ph.D., professor, dean of College of Sciences and chairman of Institute of Systems Science, Northeastern University. His research interests include analysis and control of complex systems and singular systems theory. Corresponding author of this paper.)

胡跃冰 硕士，东北大学系统科学研究所. 研究兴趣有模糊控制、鲁棒控制和广义系统理论等.
(**HU Yue-Bing** M.S. at Institute of Systems Science, Northeastern University. Her research interests include fuzzy control、robust control and singular systems theory.)