

# 考虑交流伺服电机动力学特性的并联机构 鲁棒轨迹跟踪控制方法研究

孔德庆<sup>1,2</sup> 黄田<sup>3</sup> 张洪波<sup>1</sup> 张巨勇<sup>1</sup>

**摘要** 以外移动副驱动,含平行四边形支链结构的 3 自由度平动并联机构为对象,提出一种鲁棒轨迹跟踪控制方法.在分别建立了机构和交流伺服电机动力学模型,及考虑了因模型简化和外部干扰造成的不确定性影响基础上设计了一种可有效抑制上述因素影响的鲁棒轨迹跟踪控制,并在理论上证明了系统的稳定收敛并具有抗干扰的能力.对不同轨迹跟踪仿真结果表明,该方法可保证跟踪误差的一致终值有界.

**关键词** 并联机床,鲁棒控制,交流伺服电机,轨迹跟踪

**中图分类号** TP242.2

## Dynamic Modeling and Robust Trail Tracking Control of 3-DOF Translational Parallel Kinematic Machine Driven by AC Servo Motors

KONG De-Qing<sup>1,2</sup> HUANG Tian<sup>3</sup> ZHANG Hong-Bo<sup>1</sup> ZHANG Ju-Yong<sup>1</sup>

**Abstract** This paper presents a method for the design of robust trail tracking control of a 3-DOF translational parallel kinematic machine with parallelogram struts. The method takes into account both the dynamics of rigid-body of mechanical systems and servo motor. A robust trail tracking controller is designed to suppress the negative effects due to the dynamic modeling errors and undesirable disturbances. The performance and the stability of the controller were verified by computer simulation and the results show that the uniform and ultimate bound of the tracking error is guaranteed.

**Key words** Parallel kinematic machine, robust control, AC servo motor, trajectory tracing

## 1 引言

工程实践表明,并联机构的运动精度不仅依赖于零部件的制造和装配精度,以及运动学标定效果,而且与运动控制模型参数的精确程度和外部干扰密切相关.事实上,在建立系统运动控制模型时,常常不得不忽略某些不确定性因素,如高频动态特性、运动部件间的摩擦、信号的检测噪声等,而它们往往成为影响运动位置精度的主要原因<sup>[1]</sup>.为此, Kim 等基于 Lyapunov 方法设计了一种自适应控制器,实现了 6 自由度并联机器人的高精度轨迹跟踪控制,取得较为理想的效果<sup>[2]</sup>.然而,自适应控制策略取决于对未知参数的准确估计,而外界干扰不确定且无法用定常参数表示未建模参数,故参数估计的误差往往不收敛于零. Park<sup>[3]</sup>以 6 自由度并联机构为

例,设计了一个带有摄动观测器的滑模控制器,其中观测器采用模糊自适应神经网络.该控制器原理上可通过控制输入来补偿动力学模型误差和随机干扰造成的跟踪误差问题,但结构复杂,且控制器频繁的切换易造成跟踪误差在零点附近出现抖动.文献 [4] 针对一种并联机床设计了鲁棒控制器,取得比较理想的跟踪效果,但并未考虑电机惯性对控制性能的影响,而这在机床高速运行时显然是不能忽略的.文献 [5] 针对串联机器人设计了一种基于直流电机的鲁棒控制器,但未考虑电机的模型误差及考核抑制干扰的能力,而这些误差与干扰可导致系统跟踪性能恶化,乃至影响系统的稳定性.

本文以天津大学研制的五坐标混联加工中心中的三平动自由度并联机构为对象,在建立系统刚体动力学逆解模型和交流伺服电机动态模型的基础上,提出一种考虑伺服电机模型误差和外部干扰的鲁棒轨迹跟踪控制方法.

## 2 总体布局方案

如图 1 所示,上述三自由度并联机构由动平台和三组滑鞍-支链组成.各支链含两根等长平行杆件,杆的两端分别通过滚动球铰链与滑鞍和动平台

收稿日期 2005-12-13 收修改稿日期 2006-7-9  
Received December 13, 2005; in revised form July 9, 2006  
国家自然科学基金 (50375106, 50328506) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (50375106, 50328506)  
1. 中国科学院国家天文台 北京 100012 2. 中国科学院研究生院 北京 100039 3. 天津大学机械学院 天津 300072  
1. The National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012 2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039 3. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072  
DOI: 10.1360/aas-007-0037

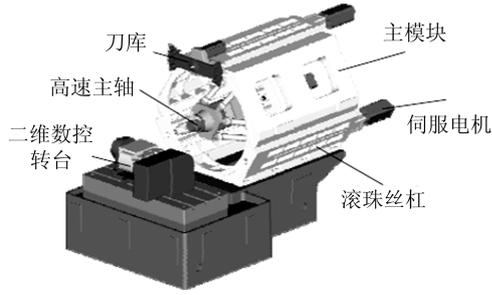


图 1 小型 5 坐标卧式混联型加工中心

Fig. 1 5-coordinates horizontal parallel kinematic machine

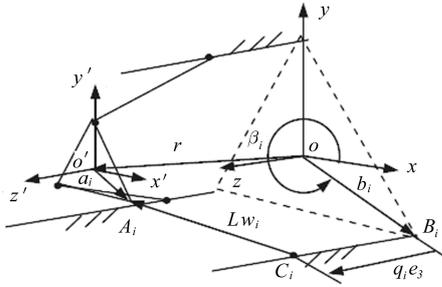


图 2 主模块运动学模型

Fig. 2 Kinematics model of main module

连接. 滑鞍在伺服电机-丝杠-螺母副的驱动下沿滚动导轨移动, 进而使动平台作三维平动. 动平台上安装有高速电主轴, 可用于高速切削加工.

### 3 动力学建模

#### 3.1 主模块动力学建模

考虑到采用平行四边形支链结构使得支链中各杆运动规律等同, 故可在运动学分析时, 将原机构抽象成如图 2 所示的等效模型. 等效机构的每个支链中仅含一根杆件, 两端通过 T 副(虎克铰)分别与动平台及滑鞍连接, 滑鞍亦由主动副 H (螺旋副)驱动, 该等效机构和原机构具有相同的自由度.

如图 2 所示, 在动静平台等边三角形形心分别建立固定参考系  $O - xyz$  和连体系  $O' - x'y'z'$ , 动平台参考点  $O'$  在系  $O - xyz$  中的位矢可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i + q_i \mathbf{e}_3 + L \mathbf{w}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{b}_i$ 、 $\mathbf{a}_i$  分别为铰点  $B_i$ 、 $A_i$  在系  $O - xyz$  和  $O' - x'y'z'$  中的位置矢量,  $\mathbf{w}_i$  为支链  $i$  的单位方向矢量,  $L$  为支链杆长,  $q_i$  为滑鞍  $i$  相对参考点  $B_i$  的位移,  $\mathbf{e}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$ . 由式(1), 同时考虑机构装配模式, 可解得主模块的运动学模型<sup>[6]</sup>.

在第  $i$  个支链的任一连杆上建立连体系  $O_{bi} -$

$x_{bi}y_{bi}z_{bi}$ , 并设其原点  $O_{bi}$  与滑鞍上的球铰中心  $C_{ij}$  重合,  $z_{bi}$  轴始终指向连杆轴线方向,  $x_{bi}$  轴可选为垂直于  $z_{bi}$  轴平面上的任意矢量,  $y_{bi}$  轴与  $x_{bi}$  及  $z_{bi}$  轴垂直, 且符合右手准则. 忽略各铰链摩擦引起的能量耗散, 用虚功率原理可得

$$\delta \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau}' = \sum_{i=1}^3 (\delta \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{m}_{Si} + \delta \mathbf{v}_i^T (\mathbf{f}_{Si} + \mathbf{g}_{Si})) + \delta \mathbf{v}^T (\mathbf{f}_P + \mathbf{f}_A + \mathbf{g}_P) + \delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_c \quad (2)$$

式中,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T$ ,  $\mathbf{v}$  为点  $O'$  的速度,  $\mathbf{v}_i$  和  $\boldsymbol{\omega}_i$  分别为第  $i$  个支链的质心速度和角速度,  $\mathbf{f}_P = -m_P \mathbf{a}$  为动平台的惯性负载,  $m_P$  为动平台的质量,  $\mathbf{f}_A$  为简化到动平台参考点的载荷,  $\mathbf{f}_{Si} = -2m_S \mathbf{a}_i$ ,  $\mathbf{m}_{Si} = -2I_{Si} \boldsymbol{\varepsilon}_i$  为支链的惯性负载,  $I_{Si} = R I_S R^T$ ,  $m_S$ 、 $I_S$  为连杆的质量和相对其主轴坐标系的惯性张量,  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  为第  $i$  个支链的角加速度,  $I_{Si}$  为支链  $i$  中的连杆相对系  $O - xyz$  的惯性张量,  $R$  为系  $O_{bi} - x_{bi}y_{bi}z_{bi}$  相对系  $O - xyz$  的方向余弦矩阵,  $\mathbf{f}_C = -m_C \ddot{\mathbf{q}}$  为滑枕-丝杠-联轴器-电机转子子系统的等效惯性负载,  $\ddot{\mathbf{q}}$  为滑鞍的加速度,  $m_C = m'_C + \left(\frac{2\pi}{p}\right) (I_C + I_M)$ ,  $m'_C$  为移动部件(滑鞍)的质量,  $p$  为丝杠导程,  $I_C$  为丝杠-联轴器的转动惯量,  $I_M$  为电机转子的转动惯量,  $\boldsymbol{\tau}' = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$  为伺服电机所提供的驱动力.

由式 (2) 可得, 作用在滑鞍上的驱动力为

$$\boldsymbol{\tau}' = \sum_{i=1}^3 J^{-T} (J_{\omega_i}^T \mathbf{m}_{Si} + J_{v_i}^T (\mathbf{f}_{Si} + \mathbf{g}_{Si})) + J^{-T} (\mathbf{f}_P + \mathbf{f}_A + \mathbf{g}_P) + \mathbf{f}_c \quad (3)$$

式中,  $J_{\omega_i}$  为偏角速度矩阵,  $J_{v_i}$  为偏速度矩阵,  $J$  为雅可比矩阵.

由式 (3) 可见, 各伺服轴所提供给的驱动力除了与刀具进给速度、机构尺度参数和位形有关, 还与切削负载、加速特性以及运动构件的惯性有关, 是它们的强非线性函数. 为了设计控制器, 忽略切削负载的影响, 将式 (3) 写成如下标准形式

$$\boldsymbol{\tau} = D(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) \quad (4)$$

式中

$$D(\mathbf{q}) = m_C E_3 + m_A (J J^T)^{-1} + \sum_{i=1}^3 J^{-T} \begin{pmatrix} 2J_{\omega_i}^T I_{Si} J_{\omega_i} + \\ 2J_{v_i}^T m_S \mathbf{e}_3 J_i^T - \\ L J_{v_i}^T m_S [\mathbf{w}_i \times] J_{\omega_i} \end{pmatrix} J^{-1}$$

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_A (JJ^T)^{-1} H_v J^{-1} + \sum_{i=1}^3 J^{-T} \begin{pmatrix} -\frac{2}{L} J_{\omega_i}^T I_{S_i} (\mathbf{w}_i \times \mathbf{e}_3) \mathbf{v}^T H_i \\ -2J_{\omega_i}^T I_{S_i} J_{\omega_i} J^{-1} H_v \\ + J_{v_i}^T m_S (E_3 + \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T) \mathbf{e}_3 \mathbf{v}^T H_i \\ + L J_{v_i}^T m_S J_{\omega_i} \mathbf{v} \mathbf{w}_i^T J_{\omega_i} \\ - L J_{v_i}^T m_S \mathbf{w}_i \mathbf{v}^T J_{\omega_i}^T J_{\omega_i} \\ - 2J_{v_i}^T m_S \mathbf{e}_3 J_i^T J^{-1} H_v \\ + L J_{v_i}^T m_S [\mathbf{w}_i \times] J_{\omega_i} J^{-1} H_v \end{pmatrix} J^{-1}$$

$$G(\mathbf{q}) = -J^{-T} \left( \sum_{i=1}^3 J_{v_i}^T \mathbf{g}_{S_i} + \mathbf{g}_P \right)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\tau}'$$

其中,  $H_i$  为对应第  $i$  个支链的海赛矩阵,  $H_v = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T H_1 & \mathbf{v}^T H_2 & \mathbf{v}^T H_3 \end{bmatrix}^T$ ,  $E_3$  表示三阶单位阵。

### 3.2 交流伺服电机动态模型

为了便于建立伺服电机的动力学模型, 忽略永磁同步伺服电动机铁芯饱和、涡流和磁滞损耗及转子和永磁体的阻尼作用, 并假设空间磁势及磁通分布呈正弦波状, 电机的电磁转矩可表示为<sup>[7]</sup>

$$T_m = K' p_n i_q \quad (5)$$

式中,  $p_n$  表示电机极对数,  $K' = K_m \psi_f$ ,  $K_m$  为转矩系数。

在交流伺服电机矢量控制中, 采用电流解耦控制, 电机动态模型可简化为<sup>[8]</sup>

$$L_{am} \dot{i}_q + R_{sm} i_q + K_{um} p_n \dot{\theta} = u_q \quad (6)$$

式中,  $K_{um}$  为感应电动势系数,  $\dot{\theta}$  为转子机械角速度,  $u_q$  为  $q$  轴的电压,  $i_q$  为  $q$  轴电流,  $L_{am}$  为  $q$  轴电感,  $R_{sm}$  为定子相电阻。

## 4 鲁棒轨迹跟踪控制律设计

考虑因系统简化建模所造成的不确定模型误差和外部随机干扰, 并将电机的转速  $\dot{\theta}$  换算为滑鞍速度, 而将电机驱动扭矩折算到滑鞍上, 则系统的动力学模型可改写为

$$\begin{cases} D(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) + \Delta_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{w}_1 = \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} = K\mathbf{I} \\ L_a \dot{\mathbf{I}} + R_s \mathbf{I} + K_u \dot{\mathbf{q}} + \Delta_2(\mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{w}_2 = \mathbf{U} \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $\Delta_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  表示系统模型误差,  $\Delta_2(\mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}})$  表示电机模型误差,  $L_a = L_{am} E_3$ ,  $R_s = R_{sm} E_3$ ,  $K_u = K_{um} p_n \frac{2\pi}{p} E_3$ ,  $K = K' p_n \frac{2\pi}{p} E_3$ ,  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_q & u_q & u_q \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_q & i_q & i_q \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{w}_1$  为干扰力矩向量,  $\mathbf{w}_2$  为电机的干扰电压向量, 并假设干扰向量有界, 即  $\|\mathbf{w}_1\| \leq \bar{w}_1$ ,  $\|\mathbf{w}_2\| \leq \bar{w}_2$ 。

### 4.1 控制律设计

考虑形如下式的逆向动力学补偿模型

$$\mathbf{I}_d K = \mathbf{u}_1 + D(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_d + H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_d + G(\mathbf{q})$$

而期望对电机提供如下电压补偿

$$\mathbf{U} = R_s \mathbf{I}_d + K_u \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{u}_2$$

式中,  $\mathbf{I}_d$  为电机的期望电流,  $\mathbf{q}_d(t)$ 、 $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$  为末端执行器的期望轨迹,  $\mathbf{u}_1$ 、 $\mathbf{u}_2$  为辅助控制输入信号, 定义辅助信号

$$\boldsymbol{\eta} = \dot{\mathbf{e}} + \alpha \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{I} - \mathbf{I}_d$$

其中, 误差变量  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d(t)$ ,  $\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{q}}_d(t)$ 。则系统的动态方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\eta} - \alpha \mathbf{e} \\ D\dot{\boldsymbol{\eta}} = (\alpha D - H)\dot{\mathbf{e}} + K\boldsymbol{\xi} - \Delta_1 - \mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_1 \\ L_a \dot{\boldsymbol{\xi}} = -R_s \boldsymbol{\xi} - K_u (\boldsymbol{\eta} - \alpha \mathbf{e}) - L_a \dot{\mathbf{I}}_d - \Delta_2 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{u}_2 \end{cases} \quad (8)$$

据此, 可首先构造正定函数

$$V_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}^T D \boldsymbol{\eta})$$

对  $V_0$  关于时间求导有

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= (-\alpha \|\mathbf{e}\|^2 + \mathbf{e}^T \boldsymbol{\eta}) + \\ &\quad \boldsymbol{\eta}^T (\alpha D \dot{\mathbf{e}} + \alpha H \mathbf{e} - \Delta_1 - \mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_1) + \\ &\quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T (\dot{D} - 2H) \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T K \boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

由动力学模型特性知,  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T (\dot{D} - 2H) \boldsymbol{\eta} = 0$ ,  $\forall \boldsymbol{\eta}$  成立<sup>[9]</sup>, 则

$$\dot{V}_0 = -\alpha \|\mathbf{e}\|^2 + \boldsymbol{\eta}^T (\alpha D \dot{\mathbf{e}} + \alpha H \mathbf{e} + \mathbf{e} - \Delta_1 + \mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{w}_1 + \boldsymbol{\eta}^T K \boldsymbol{\xi}$$

令

$$H_0 = \dot{V}_0 + \|\mathbf{z}\|^2 - \gamma_1^2 \|\mathbf{w}_1\|^2 \quad (9)$$

式中,  $\gamma_1$  为给定正数,  $\mathbf{z} = [r_1 \mathbf{e} \quad r_2 \dot{\mathbf{e}}]^T$  为评价信号,  $r_1$ 、 $r_2$  为加权正系数. 由柯西不等式, 得

$$H_0 \leq -(\alpha - r_1^2 - r_2^2 \alpha^2) \|\mathbf{e}\|^2 + \|\boldsymbol{\eta}\| \cdot \|\Delta_1\| + \boldsymbol{\eta}^T K \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}^T \left[ \begin{array}{c} \alpha D \dot{\mathbf{e}} + \alpha H \mathbf{e} + (1 - 2r_2^2 \alpha) \mathbf{e} + \\ \left( \frac{1}{4\gamma_1^2} + r_2^2 \right) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{u}_1 \end{array} \right]$$

令

$$\mathbf{u}_1 = -N_1(\mathbf{q}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) - N_2(\mathbf{q}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) - \alpha_1 D(\mathbf{q}) \boldsymbol{\eta} \quad (10)$$

其中

$$N_1(\mathbf{q}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \alpha D \dot{\mathbf{e}} + \alpha H \mathbf{e} + (1 - 2r_2^2 \alpha) \mathbf{e} + \left( \frac{1}{4\gamma_1^2} + r_2^2 \right) \boldsymbol{\eta}$$

$$N_2(\mathbf{q}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \frac{\rho_h^2(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})}{\|\boldsymbol{\eta}\| \rho_h(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) + \varepsilon_1 e^{-\beta_1 t}} \boldsymbol{\eta}$$

$\alpha_1$ 、 $\varepsilon_1$  和  $\beta_1$  是任意给定正常数,  $\rho_h(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$  是  $\Delta_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  的上界, 即  $\|\Delta_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq \rho_h(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$ . 则

$$H_0 \leq -(\alpha - r_1^2 - r_2^2 \alpha^2) \|\mathbf{e}\|^2 - \alpha_1 \boldsymbol{\eta}^T D \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T K \boldsymbol{\xi} + \varepsilon_1 e^{-\beta_1 t} \quad (11)$$

又取正定函数

$$V = V_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T L_a \boldsymbol{\xi}$$

令

$$H = \dot{V} + \|\mathbf{z}\|^2 - \gamma_1^2 \|\mathbf{w}_1\|^2 - \gamma_2^2 \|\mathbf{w}_2\|^2 \quad (12)$$

其中,  $\gamma_2$  为给定正数.

可以证明,  $\|\dot{\mathbf{I}}_d\|$  可表示成  $\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, \boldsymbol{\xi}$  的函数. 假设存在正定函数  $\rho_i$  使得

$$\|\dot{\mathbf{I}}_d\| \leq \rho_i(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, \boldsymbol{\xi})$$

同时, 假设  $\rho_m(\mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}})$  是  $\Delta_2(\mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}})$  的上界, 即

$$\|\Delta_2(\mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq \rho_m(\mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}})$$

则由式 (12) 和柯西不等式, 得

$$H \leq -(\alpha - r_1^2 - r_2^2 \alpha^2) \|\mathbf{e}\|^2 - \alpha_1 \boldsymbol{\eta}^T D \boldsymbol{\eta} + \varepsilon_1 e^{-\beta_1 t} + \boldsymbol{\xi}^T \left[ K^T \boldsymbol{\eta} - \left( R_s - \frac{1}{4\gamma_2^2} E_3 \right) \boldsymbol{\xi} - K_u (\boldsymbol{\eta} - \alpha \mathbf{e}) \right] + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{u}_2 + \|\boldsymbol{\xi}\| \cdot \rho_i L_a + \|\boldsymbol{\xi}\| \cdot \rho_m \quad (13)$$

令

$$\mathbf{u}_2 = -N_3(\mathbf{e}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) - N_4(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, \boldsymbol{\xi}) - N_5(\mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) - \alpha_2 L_a \boldsymbol{\xi} \quad (14)$$

其中

$$N_3(\mathbf{e}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = K^T \boldsymbol{\eta} - \left( R_s - \frac{1}{4\gamma_2^2} E_3 \right) \boldsymbol{\xi} - K_u (\boldsymbol{\eta} - \alpha \mathbf{e})$$

$$N_4(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\rho_i^2 L_a^2}{\|\boldsymbol{\xi}\| \rho_i L_a + \varepsilon_2 e^{-\beta_2 t}} \boldsymbol{\xi}$$

$$N_5(\mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\rho_m^2}{\|\boldsymbol{\xi}\| \rho_m + \varepsilon_3 e^{-\beta_3 t}} \boldsymbol{\xi}$$

式中,  $\alpha_2$ 、 $\varepsilon_2$ 、 $\beta_2$ 、 $\varepsilon_3$  和  $\beta_3$  是任意给定正常数.

将式 (14) 代入式 (13) 得

$$H \leq -(\alpha - r_1^2 - r_2^2 \alpha^2) \|\mathbf{e}\|^2 - \alpha_1 \boldsymbol{\eta}^T D \boldsymbol{\eta} - \alpha_2 \boldsymbol{\xi}^T L_a \boldsymbol{\xi} + \varepsilon_1 e^{-\beta_1 t} + \varepsilon_2 e^{-\beta_2 t} + \varepsilon_3 e^{-\beta_3 t} \quad (15)$$

## 4.2 系统的稳定性分析

取

$$\alpha - r_1^2 - r_2^2 \alpha^2 \leq \tilde{\varepsilon}$$

式中,  $\tilde{\varepsilon}$  为充分小正数. 令

$$\alpha_0 = \min(\tilde{\varepsilon}, \alpha_1, \alpha_2), \quad \varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

$$\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

则由式 (15), 得

$$H \leq -\alpha_0 (\mathbf{e}^T \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}^T D \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}^T L_a \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon e^{-\beta t}$$

即

$$\dot{V} + \|\mathbf{z}\|^2 - \gamma_1^2 \|\mathbf{w}_1\|^2 - \gamma_2^2 \|\mathbf{w}_2\|^2 \leq -2\alpha_0 V + \varepsilon e^{-\beta t} \quad (16)$$

设对于被控对象存在正数  $\kappa_1$ 、 $\kappa_2$ , 使得<sup>[9]</sup>

$$\kappa_1 \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \leq \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T D \boldsymbol{\eta} \leq \kappa_2 \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \quad (17)$$

令

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[ \mathbf{e}^T \quad \boldsymbol{\eta}^T \quad \boldsymbol{\xi}^T \right]^T, \quad \lambda_1 = \min\left(\kappa_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} L_a\right)$$

$$\lambda_2 = \max\left(\kappa_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} L_a\right)$$

则由式 (17), 可得

$$\lambda_1 \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 \leq V \leq \lambda_2 \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2, \quad \forall t \geq 0 \quad (18)$$

当干扰向量  $\mathbf{w}_1$  或  $\mathbf{w}_2$  不为 0 时, 由式 (16) 可得

$$\dot{V} \leq -2\alpha_0 V + \varepsilon e^{-\beta t} + \gamma_1^2 \bar{w}_1^2 + \gamma_2^2 \bar{w}_2^2 \quad (19)$$

表 1 机床几何、惯性参数和西门子 1FT5072 交流伺服电机主要参数

Table. 1 Parameters of the machine and the motors

机床参数	数值	电机参数	数值
动平台半径 (mm)	120	额定转矩 (N·m)	10
静平台半径 (mm)	398.8	额定电流 (A)	6.1
连杆杆长 (mm)	614	电枢电压 (V)	600
丝杠导程 (mm)	10	转子惯量 (Kg·m <sup>2</sup> )	22.8×10 <sup>-4</sup>
动平台质量 (kg)	54	电枢电阻 (Ω)	7.02
连杆质量 (kg)	5.06	电枢电感 (mH)	37
连杆转动惯量 (kg·m <sup>2</sup> )	0.22	感应电动势系数 (V·s/rad)	2.87
滑枕质量 (kg)	20	转矩系数 (rad)	0.57
丝杠转动惯量 (kg·m <sup>2</sup> )	3.24×10 <sup>-4</sup>		
联轴器转动惯量 (kg·m <sup>2</sup> )	6.0×10 <sup>-4</sup>		

根据式 (18) 和 (19), 对于任意初值  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ , 可得<sup>[10]</sup>

$$\|\tilde{\mathbf{x}}\| \leq \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|^2 e^{-2\alpha_0 t} + \frac{\varepsilon}{\lambda_1 (2\alpha_0 - \beta)} (e^{-\beta t} - e^{-2\alpha_0 t}) + \frac{\gamma_1^2 \bar{w}_1^2 + \gamma_2^2 \bar{w}_2^2}{2\alpha_0 \lambda_1} (1 - e^{-2\alpha_0 t}) \right]^{1/2}$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{x}}\| \leq \left( \frac{\gamma_1^2 \bar{w}_1^2 + \gamma_2^2 \bar{w}_2^2}{2\alpha_0 \lambda_1} \right)^{1/2}$$

即,  $\tilde{\mathbf{x}}$  是终值有界的. 当干扰向量  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = 0$  时, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{x}}\| = 0$$

即,  $\tilde{\mathbf{x}}$  是渐近趋于零的. 所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) & \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix}^T \right\| = 0$$

由此可知, 跟踪误差向量渐近趋于零, 系统稳定.

### 4.3 系统的 $L_2$ 干扰抑制性能分析

由式 (16) 得

$$\dot{V} + \|\mathbf{z}\|^2 \leq \gamma_1^2 \|\mathbf{w}_1\|^2 + \gamma_2^2 \|\mathbf{w}_2\|^2 + \varepsilon e^{-\beta t}, \forall t \geq 0$$

对于任意给定的正数  $T$ , 在  $\mathbf{e}(0) = 0$ ,  $\boldsymbol{\eta}(0) = 0$  和  $\boldsymbol{\xi}(0) = 0$  初始条件下, 对上式两边同时积分, 得

$$V + \int_0^T \|\mathbf{z}\|^2 dt \leq \int_0^T (\gamma_1^2 \|\mathbf{w}_1\|^2 + \gamma_2^2 \|\mathbf{w}_2\|^2) dt + \varepsilon \int_0^T e^{-\beta t} dt$$

由于

$$\varepsilon \int_0^T e^{-\beta t} dt = \frac{\varepsilon}{\beta} (1 - e^{-\beta T})$$

即  $\varepsilon \int_0^T e^{-\beta t} dt$  有界, 故对给定  $\varepsilon_0$ , 可取充分小  $\varepsilon$ , 使得

$$\int_0^T \|\mathbf{z}\|^2 dt \leq \int_0^T (\gamma_1^2 \|\mathbf{w}_1\|^2 + \gamma_2^2 \|\mathbf{w}_2\|^2) dt + \varepsilon_0$$

综上所述, 系统满足  $L_2$  干扰抑制性能.

## 5 模拟仿真

为了验证本文提出方法的有效性, 现做如下计算机仿真. 给定所研究并联机构及其交流伺服电机的相关参数如表 1.

设末端执行器 (刀具) 理想轨迹为  $y = 2\text{mm}$  的直线, 运动速度  $v = 2000\text{mm}/\text{min}$ , 干扰向量为  $\|\mathbf{w}_1\| \leq 100\text{N}$ 、 $\|\mathbf{w}_2\| \leq 30\text{V}$  的随机向量, 刀具初始误差为  $\Delta \mathbf{r}(0) = [0, -2, 0]^T \text{mm}$ , 模型误差为系统模型参数的 1/5 摄动, 未对外部干扰和模型误差加以抑制时刀具运动轨迹如图 3(a) 所示. 由图可见, 在外部干扰和模型误差的影响下, 跟踪误差趋于发散, 系统跟踪性能严重恶化, 并失去稳定性. 图 3(b) 为对系统实施鲁棒控制时刀具的运动轨迹, 其中系数  $\alpha = 30$ , 干扰抑制系数  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.05$ . 由图可见, 滑鞍的误差曲线迅速收敛, 相应的刀具轨迹也迅速逼近理想轨迹, 反映了鲁棒控制器良好的干扰抑制和轨迹跟踪性能.

现取刀具理想运动轨迹为以坐标原点为圆心, 以  $R = 1\text{mm}$  为半径的圆, 初始误差为  $\Delta \mathbf{r}(0) = [1, 1, 0]^T \text{mm}$ , 运动速度  $v = 1000\text{mm}/\text{min}$ . 当仅对系统实施鲁棒控制, 而不抑制外部干扰和电机模型误差时, 控制效果如图 4(a) 所示. 由图可见, 刀具轨迹经过多圈的跟踪仍不能收敛于理想轨迹, 而与理想轨迹保持较大的误差. 当对机构及电机同时实施鲁棒控制时, 控制效果如图 4(b) 所示. 与图 4(a) 比较可见, 跟踪误差迅速收敛, 刀具轨迹迅速与理想轨迹重合. 可见, 电机的外部干扰和模型误差对系统跟

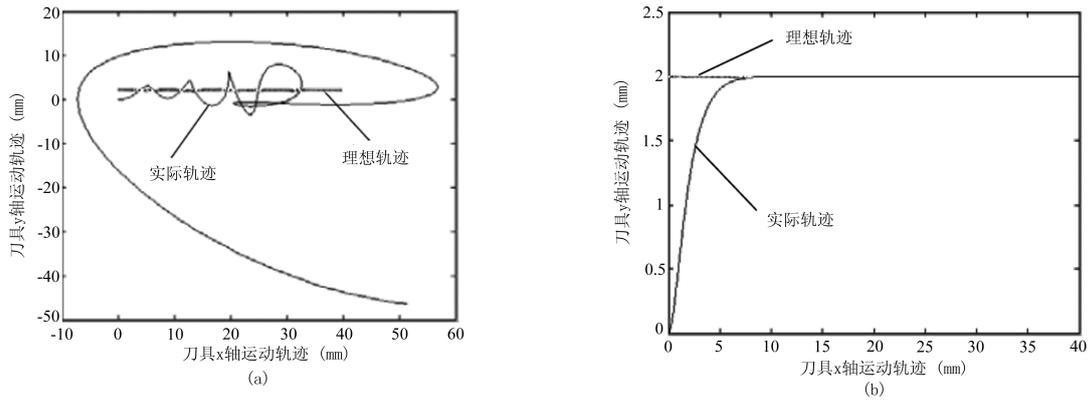


图 3 实施鲁棒控制前后的刀具运动轨迹  
Fig. 3 The effect of the robust controller on the tracking errors

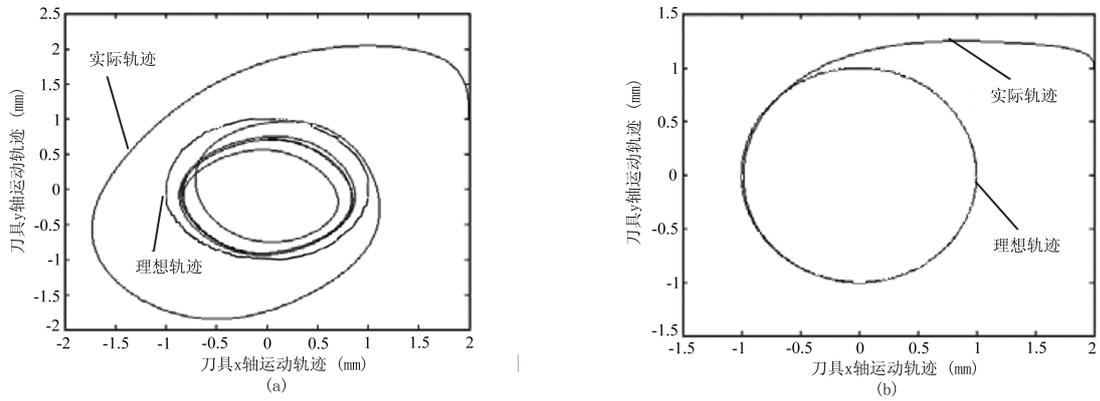


图 4 对电机模型误差和外部干扰抑制前后的刀具运动轨迹  
Fig. 4 The effect of the robust controller considering the modeling errors and undesirable disturbances on the tracking errors

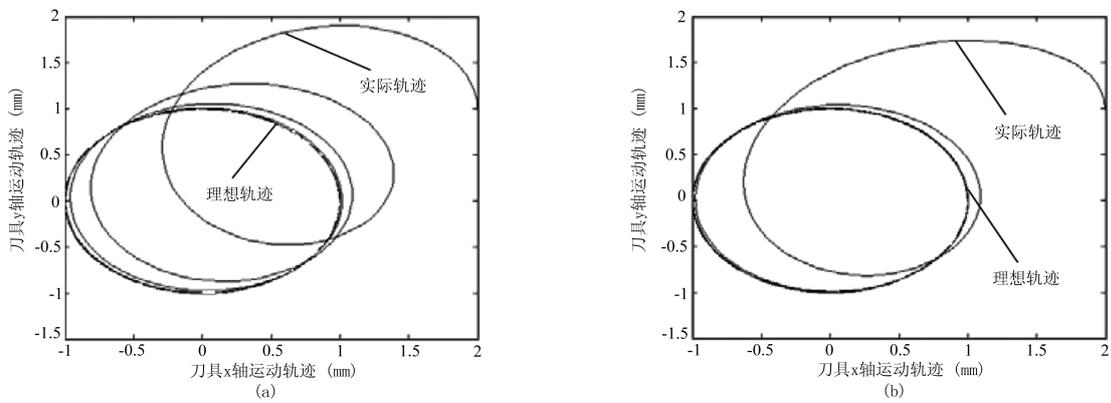


图 5 控制器参数对刀具运动轨迹的影响  
Fig. 5 The influences of the controller parameters on the tracking errors

踪性能有很大的影响, 而鲁棒控制可起到抑制作用。

当将末端速度增加到  $v = 6000\text{mm}/\text{min}$ , 而保持其它条件不变时, 控制效果如图 5(a) 所示. 与图 4(b) 比较可见, 提高速度将导致系统跟踪误差的收敛速度降低. 当调整参数为  $\alpha = 60$ 、减小干扰抑制系数为  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.01$  时, 控制效果如图 5(b) 所示. 由图可见, 适当增大  $\alpha$ 、降低  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ , 可显著提高收敛速度。

## 6 结论

本文研究考虑交流伺服电机动力学特性的三平动自由度并联机构鲁棒轨迹跟踪控制的方法, 得到如下结论:

1) 所建立考虑交流伺服动力学性能影响的并联机构鲁棒控制器能保证系统的稳定性, 并具有  $L_2$  抗干扰能力, 表现为可使有界模型误差造成的运动跟踪误差一致终值有界, 且当模型误差为零时可实现跟踪误差为零。

2) 电机外部干扰和模型误差对系统的跟踪性能有很大影响, 在设计鲁棒控制器时应对其加以抑制。

3) 适当增大  $\alpha$ , 减小干扰抑制系数可提高系统的跟踪误差收敛速度。

4) 提高末端执行器速度将导致跟踪误差收敛速度降低. 为此, 当末端执行器运动速度改变时, 可适当调整  $\alpha$  和干扰抑制系数以改善系统的跟踪性能。

5) 本文提出的设计方法具有较强的通用性, 可推广到其它并联机器人的控制器设计中。

## References

- 1 Wang Jin-Song, Huang Tian. Parallel machine tool—A forthcoming opportunity and challenge to the machine tool industry. *China Mechanical Engineering*, 1999, **10**(10): 1103~1107  
(汪劲松, 黄田. 并联机床—机床行业面临的机遇与挑战. 中国机械工程, 1999, **10**(10): 1103~1107)
- 2 Mao L N, Meng J E. Comments on “A new robust control for a class of uncertain discrete-time systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(3): 509~511
- 3 Min Kyu Park, Min Cheol Lee, Seok Jo Go. The design of sliding mode controller with perturbation observer for 6-DOF parallel manipulator. In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics. Pusan, Korea. IEEE, 2001. **3**: 1502~1507
- 4 Yang Zhi-Yong, Huang Tian, Ni Yan-Bing. Dynamic modeling and trail tracking robust control of 3-HSS parallel kinematic machine. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2004, **40**(11): 75~81  
(杨志永, 黄田, 倪雁冰. 3-HSS 并联机床动力学建模及鲁棒轨迹跟踪控制. 机械工程学报, 2004, **40**(11): 75~81)
- 5 Shen Tie-Long. *Robust Control of Robot*. Beijing: Tsinghua University Press, 2000. 176~186

(申铁龙. 机器人鲁棒控制基础. 北京: 清华大学出版社, 2000. 176~186)

- 6 Kong De-Qing. The Research on Robust Control and Electromechanical Servo System of Parallel Kinematic Machine [M.S. dissertation], Tianjin University, 2002  
(孔德庆. 并联机构主模块鲁棒控制及其机电伺服控制系统研究. 天津大学硕士学位论文, 2002)
- 7 Shao Xiao-Qiang, Mo Hui-Cheng. Analysis on torque of PM AC servo motor. *Micromotors*, 1991, **23**(2): 8~12  
(邵晓强, 莫会成. 永磁交流伺服电动机力矩分析. 微电机, 1991, **23**(2): 8~12)
- 8 Xu Qiang, Jia Zheng-Chun, Li Lang-Ru. New type fully digital AC servo system. *Micromotors*, 1997, **30**(1): 14~19  
(许强, 贾正春, 李朗如. 新型全数字交流伺服系统. 微电机, 1997, **30**(1): 14~19)
- 9 Ghorbel F. Modeling and PD control of closed-chain mechanical systems. In: Proceeding of the 34th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA. Dec.13-15, 1995. **1**: 540~542
- 10 Qu Z, Dawson D M. *Robust Tracking Control of Robot Manipulators*. New York: IEEE, 1996



孔德庆 中国科学院国家天文台博士研究生, 助理研究员. 研究方向为机器人动力学及智能控制. 本文通信作者. E-mail: kdq@bao.ac.cn

(KONG De-Qing Ph.D. candidate of Chinese Academy of Sciences. His research interests include the robotic dynamics and intelligent control. Corresponding author of this paper.)



黄田 博士, 天津大学教授, 博士生导师, 国家教育部“长江学者奖励计划”特聘教授. 研究方向为机器人技术. E-mail: htiantju@public.tpt.tj.cn

(HUANG Tian Professor at Tianjin University. His research interests include robot technology, etc.)



张洪波 中国科学院国家天文台研究员. 研究方向为控制理论. E-mail: zhanghb@bao.ac.cn

(ZHANG Hong-Bo Professor at Chinese Academy of Sciences. His research interests include control theory, etc.)



张巨勇 中科院国家天文台博士生. 研究方向为机器人动力学. E-mail: zjy@bao.ac.cn

(ZHANG Ju-Yong Ph.D. candidate of Chinese Academy of Sciences. His research interests include the robotic dynamics, etc.)