

脉冲控制扩展定理及应用

殷翔^{1,2} 刘峰^{1,2} 余锦华^{1,2}

摘要 本文在现有脉冲控制理论的基础上, 针对离散时滞系统, 提出了一种扩展脉冲控制的数学描述方法. 基于该描述方法, 推导出脉冲控制扩展定理. 该扩展定理的合理应用不仅可以有效避免执行器饱和和特性的影响, 而且可以分析执行器存在响应时间时系统的稳定性. 进一步研究发现, 当系统存在 Neimark-Sacker 分岔时, 依据扩展定理设计的控制器可以有效提高系统的临界分岔参数.

关键词 扩展脉冲控制, 离散时滞系统, 执行器饱和和特性, 响应时间

引用格式 殷翔, 刘峰, 余锦华. 脉冲控制扩展定理及应用. 自动化学报, 2020, 46(1): 58–67

DOI 10.16383/j.aas.c180059

Extension Theorem of Impulsive Control and Its Applications

YIN Xiang^{1,2} LIU Feng^{1,2} SHE Jin-Hua^{1,2}

Abstract This paper presents a mathematical description of extended impulsive control for discrete time-delay systems according to the impulsive control theory. Based on this mathematical description, the stability theorem of extended impulsive control is derived. The extension theorem not only avoids the influence of actuator saturation, but also can be used to analyze the stability of the system when the actuator has response time. Further research findings show that the controller designed according to extension theorem can greatly improve the critical bifurcation parameter of a system.

Key words Extended impulsive control, discrete time-delay systems, actuator saturation, actuator response time

Citation Yin Xiang, Liu Feng, She Jin-Hua. Extension theorem of impulsive control and its applications. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(1): 58–67

许多实际系统中脉冲现象的存在会严重影响系统的动力学行为^[1], 为了分析实际系统的动力学特性, 我们有必要在理论上研究脉冲影响下的系统^[2–6]. 大量研究表明, 脉冲对系统的作用具有两面性: 一方面恰当的脉冲控制可以使得不稳定的系统稳定; 另一方面如果控制器设计不当也可能导致系统出现复杂的动力学行为. 目前关于脉冲控制的研究主要分为三类: 1) 系统中存在脉冲特性时, 如何运用控制器使系统稳定; 2) 系统本身不存在脉冲项

时, 如何设计脉冲控制器使系统稳定; 3) 系统本身不存在脉冲项时, 如何结合脉冲控制器和连续控制器使系统稳定. 上述几种控制类型的研究都取得了较大的进展, 本文主要针对第二种情形进行研究. 文献 [7] 对脉冲控制理论作了基础性研究, 主要介绍了脉冲控制的理论方法. 当系统存在随机扰动和多种变时滞时, 文献 [8] 通过设计时滞脉冲控制器, 研究了闭环系统的稳定性. 文献 [9] 通过多个比较定理推导了一个新的比较定理, 并构造了李雅普诺夫函数, 研究了非线性系统在脉冲控制下的指数稳定性. 这些研究证明了脉冲控制的有效性. 然而令人遗憾的是, 这些成果并没有考虑实际控制系统中执行器的物理约束条件, 比如饱和特性和响应时间等. 而物理约束条件的存在可能会导致脉冲控制器失效, 甚至会使系统不稳定.

目前以离散系统作为控制对象的脉冲控制研究相对较少, 而离散系统同样拥有复杂的动力学特性^[10–12], 其本质非线性也较难分析^[13–15]. 文献 [16] 详细讨论了离散系统的脉冲控制和反控制, 但并没有考虑时滞对系统的影响, 同时也只是在理论上推导了脉冲控制器的设计方案, 没有实际验证控制器的有效性. 文献 [17] 运用比较定理讨论了时滞离散系统中脉冲控制器的设计问题, 但只是叙述了一般性的结论, 没有考虑执行器的约束.

收稿日期 2018-01-24 录用日期 2018-04-04
Manuscript received January 24, 2018; accepted April 4, 2018
国家自然科学基金 (61873348, 61976099, 61633011, 61472374),
国家重点研发计划 (2017YFB1300900), 湖北自然科学基金
(2015CFA010), 教育部高等学校学科创新引智计划项目 (B17040),
中国地质大学 (武汉) 研究生精品教材建设项目资助
Supported by National Natural Science Foundation of China
(61873348, 61976099, 61633011, 61472374), National Key Research
and Development Program of China (2017YFB1300900),
Hubei Provincial Natural Science Foundation of China
(2015CFA010), 111Project of China (B17040), China University
of Geosciences (Wuhan) Postgraduate Excellent Teaching
Material Construction Projects

本文责任编辑 贺威
Recommended by Associate Editor HE Wei
1. 中国地质大学 (武汉) 自动化学院 武汉 430074 2. 复杂系统先进
控制与智能化湖北重点实验室 武汉 430074
1. School of Automation, China University of Geosciences,
Wuhan 430074 2. Hubei Key Laboratory of Advanced Control
and Intelligent Automation for Complex Systems, Wuhan
430074

本文以离散时滞系统为研究对象, 提出了一种扩展脉冲控制的数学描述方法. 根据文献 [17] 中的结论, 推导出一个时滞离散系统脉冲控制扩展定理. 运用该定理不仅可以有效避免执行器饱和和特性带来的影响, 而且可以研究当执行器存在响应时间时系统的稳定性. 进一步的研究表明, 应用扩展定理设计的脉冲控制器可以提高系统的临界分岔参数. 本文的主要贡献是, 理论上找出一种简单直接避免执行器物理限制的方法, 并且用斯莫伦系统验证了该方法的有效性. 具体包括: 时滞离散系统脉冲控制稳定性定理的推广和补充; 应用定理解决执行器饱和和特性对系统造成的影响; 分析执行器存在响应时间时系统的稳定性; 讨论脉冲控制对系统临界分岔参数的影响.

本文接下来的第 1 节介绍脉冲控制扩展定理; 第 2 节讨论扩展定理的应用; 第 3 节基于斯莫伦系统进行仿真分析, 首先应用脉冲控制扩展定理解决系统中执行器饱和和特性对系统造成的影响, 接着运用脉冲控制扩展定理分析响应时间对系统稳定性的影响, 最后应用扩展定理分析脉冲控制对系统临界分岔参数的影响; 第 4 节得出结论, 并指出研究的不足之处. 本文中 \mathbf{N}^* 表示正整数域, \mathbf{R} 表示实数域.

1 脉冲控制扩展定理

定义 1^[17]. $\omega_i, i = 1, 2$ 属于 κ 类函数. 即当 $r \in [0, \infty)$ 时, $\omega_i(r)$ 严格单调递增, 且 $\omega_i(0) = 0, r \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_i(r) \rightarrow \infty$.

依据文献 [17] 所述脉冲控制定理, 考虑如下脉冲控制闭环系统:

$$x(n+1) = f(n, x(n)) + W(n, x(n))$$

构造一个脉冲控制器:

$$W(n, x(n)) = \sum_{k=1}^{\infty} [I_k(x(n)) - f(n, x(n))] \times \delta[n - n_k + 1]$$

可得:

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \quad n_{k-1} \leq n < n_k - 1 \quad (1a)$$

$$x(n_k) = I_k(x(n_k - 1)), \quad k \in \mathbf{N}^* \quad (1b)$$

其中, f 表示一般函数, n_k 表示脉冲时刻, I_k 表示脉冲时刻控制律.

定理 1. $\omega_i, i = 1, 2$ 如上述定义, V 是系统的李雅普诺夫函数. 假设 $x(n)$ 是系统 (1) 的零解, 若满足如下条件:

$$1) \omega_1(\|x(n)\|) \leq V(n, x(\cdot)) \leq \omega_2(\|x(n)\|);$$

2) 对于 $n \in (n_k, n_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots$, 存在 $a_k > 0$ 使得:

$$\Delta V_{(2)}(n, x(\cdot)) = V(n, x(n)) - V(n-1, x(n-1)) \leq a_k V(n-1, x(n-1));$$

3) 存在 $\alpha > \varsigma_k > 0, k \in \mathbf{Z}^+$, 使得:

$$V(n_k, x(n_k)) \leq \varsigma_k V(n_k - 1, x(n_k - 1));$$

4) $\sup\{\prod_{i=0}^k \varsigma_i (1 + a_i)^{n_{i+1} - n_i - 1}\} = M < \infty$, 其中 $\varsigma_0 = 1$.

则系统 (1) 的零解一致稳定.

证明. 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 满足:

$$\max\{M\omega_2(\delta), M\alpha\omega_2(\delta)\} < \omega_1(\varepsilon)$$

当 $n = n_1$ 时, 根据定理 1 中条件 2) 和 3) 有,

$$V(n_1, x(n_1)) \leq \varsigma_1 V(n_1 - 1, x(n_1 - 1)) \leq \varsigma_1 (1 + a_0)^{n_1 - 1 - n_0} V(n_0, x(n_0));$$

当 $n \in (n_1, n_2)$ 时, 根据条件 2) 有,

$$\Delta V_{(2)}(n, x(\cdot)) = V(n, x(n)) - V(n-1, x(n-1)) \leq a_1 V(n-1, x(n-1))$$

于是有

$$V(n, x(n)) \leq (1 + a_1)V(n-1, x(n-1)) \leq a_1 (1 + a_0)^{n_1 - 1 - n_0} V(n_0, x(n_0))$$

同理可得, 当 $n \in (n_k, n_{k+1})$,

$$V(n, x(n)) \leq \prod_{i=0}^k \varsigma_i (1 + a_i)^{n_{i+1} - n_i - 1} \times V(n_0, x(n_0)) \leq M\omega_2(\delta)$$

$$V(n_{k+1}, x(n_{k+1})) \leq \varsigma_{k+1} \prod_{i=0}^k \varsigma_i (1 + a_i)^{n_{i+1} - n_i - 1} \times V(n_0, x(n_0)) \leq M\alpha\omega_2(\delta)$$

所以, 对于 $n \geq n_0, \|x(n)\| < \varepsilon$, 系统的零解一致稳定. \square

根据文献 [18] 中定理 2 的条件 2、3 和文献 [19] 中定理 2 可得如下定理, 获得系统零解渐近稳定的充分条件.

定理 2. 假设满足定理 1 中的条件 1)~3), 将条件 4) 换为: $\sup\{\varsigma_i (1 + a_i)^{n_{i+1} - n_i - 1}\} = M < 1$.

则系统 (1) 的零解渐近稳定.

证明. 设 $H = \max(M\omega_2(\delta), M\alpha\omega_2(\delta))$, $\rho = n_{k+1} - n_k$ 表示脉冲控制间隔. 由于 $M < 1$ 是定理 1 的特殊情况, 所以当 $n \in (n_k, n_{k+1} - 1)$ 时, $V(n, x(n)) \leq H$ 成立. 当 $n \geq n_{k+1}$ 时, 令 E 表示此时的脉冲控制次数, 则 $V(n, x(n)) \leq M^E H$. 又

$\varsigma_i(1+a_i)^{\rho-1} < 1$, 于是有 $E \rightarrow \infty, V(n, x(n)) \rightarrow 0$. 故系统 (1) 的零解渐近稳定. \square

注 1. 根据文献 [20] 中注记 1 可以推导出脉冲间隔的限制条件. 由 $\varsigma_i(1+a_i)^{\rho-1} < 1$ 可知 $(\rho-1)\ln(1+a_i)+\ln\varsigma_i < 0$, 即 $\rho < 1-\ln\varsigma_i/\ln(1+a_i)$. 由于参数 a_i 由系统决定, 所以该式表明了设计参数 (脉冲间隔和脉冲控制强度) 之间的关系. 若脉冲控制强度给定, 则可知脉冲间隔上限. 另外该式表明若控制强度越大则脉冲间隔的上限越大, 与实际情况相符.

接下来对定理 1 进行拓展.

定义 2. 集合 K 表示多段离散时刻, 每段离散时刻集内的所有时刻都是脉冲时刻, 其中脉冲时刻是紧邻的离散时刻, 每个脉冲时刻都可以进行脉冲控制. 用 k_i 表示第 i 段时刻集, 而每一段时刻集里的具体时刻用 $k_i(s_j), s_j \in \mathbf{N}^*, s_j$ 表示每段时刻中具体时刻. 其中 $0 < j \leq m, m \in \mathbf{N}^*, j \in \mathbf{N}^*, m$ 表示脉冲时刻集内脉冲时刻的个数.

定义 3. 若系统施加的脉冲控制器中, 每个脉冲集有 m 个脉冲时刻, 则称这个脉冲控制为 m 阶脉冲控制器.

对系统 (1) 做如下变换:

$$x(n+1) = f(n, x(n)), n_{k-1} \leq n < n_k - 1 \quad (2a)$$

$$x(k_i(s_j)) = I_{k_i(s_j)}(x(k_i(s_{j-1}))) \quad (2b)$$

式中, 参数如定义 2 中所述.

定理 3. 当系统 (2) 满足如下条件:

$$1) \omega_1(\|x(n)\|) \leq V(n, x(\cdot)) \leq \omega_2(\|x(n)\|);$$

2) 对于 $n \in (k_i(s_m), k_{i+1}(s_1)), k = 0, 1, 2, \dots$, 存在 $a_k > 0$ 使得:

$$\Delta V_{(2)}(n, x(\cdot)) = V(n, x(n)) - V(n-1, x(n-1)) \leq a_k V(n-1, x(n-1))$$

3) 存在 $\alpha > \varsigma_k > 0, k \in \mathbf{N}^*$, 使得:

$$V(k_i(s_1), x(k_i(s_1))) \leq \varsigma_k V(k_i(s_1) - 1, x(k_i(s_1) - 1))$$

4) 设 $y(j-1) = |I_{k_1(s_{j-1})}(x(k_1(s_{j-2})))|$, 则当 $n \in k_i(s_j), j \in \mathbf{N}^*$ 时, $y(j-1) < y(j-2)$;

5) $\sup\{\prod_{i=0}^k \varsigma_i(1+a_i)^{n_{i+1}-n_i-1}(1+c_i)^{m-1}\} = N < \infty$, 其中 $\varsigma_0 = 1$.

则系统 (2) 的零解一致稳定.

证明. 当 $n = k_1(s_1)$ 时, 根据条件 3) 有,

$$\begin{aligned} V(k_1(s_1), x(k_1(s_1))) &\leq \\ \varsigma_1 V(k_1(s_1) - 1, x(k_1(s_1) - 1)) &\leq \\ \varsigma_1(1+a_0)^{k_1(s_1)-1-n_0} V(n_0, x(n_0)) & \end{aligned}$$

当 $n \in k_1(s_j)$ 时, 根据条件 4) 令 $y(j-1)/y(j-2) = b_1, 0 < b_1 < 1$. 由于 $V(\cdot, x(\cdot))$ 是系统的李雅普诺夫函数, 且满足条件 1). 所以可得:

$$\begin{aligned} V(k_1(s_{j-1}), y(j-1)) - V(k_1(s_{j-2}), y(j-2)) &\leq \\ c_1 V(k_1(s_{j-1}), y(j-1)), -1 < c_1 < 0, & \end{aligned}$$

即 $V(k_1(s_{m-1}), y(m-1)) \leq (1+c_1)^{m-1} V(k_1(s_1))$. 当 $n \in (k_1(s_m), k_2(s_1))$ 时, 根据条件 2) 有:

$$\begin{aligned} \Delta V_{(2)}(n, x(\cdot)) = \\ V(n, x(n)) - V(n-1, x(n-1)) &\leq \\ a_1 V(n-1, x(n-1)) & \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} V(n, x(n)) &\leq \\ \varsigma_i(1+a_1)^{n-k_1(s_1)}(1+c_1)^{m-1} V(n_0, x(n_0)) & \end{aligned}$$

又当 $n \in (k_j(s_m), k_{j+1}(s_1))$ 时, 有

$$\begin{aligned} V(n, x(n)) \leq \prod_{i=0}^k \varsigma_i(1+a_i)^{k_{i+1}(s_1)-n_0-1} \times \\ (1+c_1)^{m-1} V(n_0, x(n_0)) \leq N\omega_2(\delta) \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} V(n_{k+1}, x(n_{k+1})) \leq \varsigma_{i+1} \prod_{i=0}^k \varsigma_i(1+a_i)^{k_{i+1}(s_1)-n_0-1} \times \\ (1+c_1)^{m-1} V(n_0, x(n_0)) \leq \alpha N\omega_2(\delta) \end{aligned}$$

同理可得系统 (2) 的零解一致稳定. \square

注 2. 脉冲控制扩展定理就是在控制系统 (1) 的基础上, 扩充其脉冲时刻, 找到一个函数使得脉冲时刻集内部的系统状态模减少即可. 由于扩充了脉冲时刻, 设计者可以充分利用其自由度, 有效避免单次脉冲控制中执行器饱和特性的影响. 其次, 脉冲时刻集可以描述执行器在响应时间内的变化规律, 于是能够分析执行器在响应时间内的变化对系统稳定性的影响. 最后, 脉冲时刻集增加了控制强度, 进而提高了系统的临界分岔参数.

与定理 2 的证明类似, 可得多阶脉冲控制系统零解渐近稳定定理.

定理 4. 假设满足定理 3 中的条件 1)~4), 将条件 5) 改为: $\sup\{\varsigma_i(1+a_i)^{n_{i+1}-n_i-1}(1+c_i)^{m-1}\} = N < 1$. 则系统 (2) 的零解渐近稳定.

证明. 设 $Y = \max(N\omega_2(\delta), \alpha N\omega_2(\delta))$, $\rho = n_{k+1} - n_k$ 表示脉冲控制间隔. 由于 $Y < 1$ 是定理 3 的特殊情况, 所以当 $n \in (n_k, n_{k+1} - 1)$ 时, $V(n, x(n)) \leq Y$ 成立. 当 $n \geq n_{k+1}$ 时, 令 F 表示此时的脉冲控制集的个数, 则 $V(n, x(n)) < N^F Y$. 又 $\varsigma_i(1+a_i)^{\rho-1}(1+c_i)^m < 1$, 其中由定理 3 的证明可

知 $-1 < c_i < 0$, 于是有 $F \rightarrow \infty, V(n, x(n)) \rightarrow 0$. 故系统 (2) 的零解渐近稳定. \square

注 3. 由 $c_i(1+a_i)^{\rho-1}(1+c_i)^{m-1} = N < 1$ 可知 $(\rho-1)\ln(1+a_i) + \ln c_i + (m-1)\ln(1+c_i) < 0$, 即 $\rho < 1 - (\ln c_i + (m-1)\ln(1+c_i))/\ln(1+a_i)$. 该式给出了多阶脉冲控制系统零解渐近稳定时设计参数之间的关系, 可以推导出脉冲间隔的上限.

2 扩展定理的应用

本节接下来以文献 [21] 中斯莫伦系统为例, 比较脉冲控制定理及扩展定理在其中的应用. 接下来主要探讨执行器的饱和特性和响应时间对脉冲控制的影响, 依据文献 [21] 可将斯莫伦系统化为:

$$\frac{u(n+1) - u(n)}{h} = \frac{k_1 \tau u^2(n-\nu)}{u^2(n-\nu) + p(1 + \frac{v(n-\nu)}{q})} - l_1 u(n-\nu) \tau + r \tau \quad (3a)$$

$$\frac{v(n+1) - v(n)}{h} = \frac{k_2 \tau u^2(n-\nu)}{u^2(n-\nu) + p(1 + \frac{v(n-\nu)}{q})} - l_2 v(n-\nu) \tau \quad (3b)$$

模型变换过程和式中各参数具体含义参见文献 [21]. 系统 (3) 对应于闭环脉冲控制系统的非脉冲时刻, 即式 (1a) 和式 (2a). 若考虑闭环系统, 只需在脉冲时刻加入脉冲控制, 即在脉冲时刻 $u(n_k) = I_k(u(n_k - 1)), v(n_k) = I_k(v(n_k - 1))$.

定理 5^[21]. 存在临界分岔参数 τ_0 使得: 1) 当 $\tau \in [0, \tau_0)$, 系统平衡点 (u^*, v^*) 稳定; 2) 当 $\tau = \tau_0$, 系统会出现 Neimark-Sacker 分岔.

2.1 理想执行器时的脉冲控制

本节考虑理想执行器时的脉冲控制, 该问题在文献 [17] 中已解决. 为了方便, 设计脉冲控制器时, 可将 I_k 设计为线性控制律. 假设当 $n = n_k$ 时, $u(n_k) = au(n_k - 1), v(n_k) = bv(n_k - 1)$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$. 由于为理想执行器, 所以 a, b 没有限制条件. 这样, 只需要通过调整参数 a, b , 使闭环系统满足定理 2.

2.2 执行器具有饱和特性时的脉冲控制

本节仅考虑执行器的饱和特性. 设执行器的响应时间为 0, 已知理想脉冲控制为 $W = I_k(x(n_k)) - f(n_k, x(n_k))$, 则考虑执行器饱和特性后, 实际脉冲

控制 $U(n_k, x(n_k))$ 可以描述为:

$$U(n_k, x(n_k)) = \begin{cases} u_i, & W > u_i \\ W, & -u_i \leq W \leq u_i \\ -u_i, & W < -u_i \end{cases}$$

针对斯莫伦系统, 设 $f_1 = h\tau(\frac{k_1 u^2(n-m)}{u^2(n-m)+p(1+\frac{v(n-m)}{q})} - l_1 u(n-m) + r)$, $f_2 = h\tau(\frac{k_2 u^2(n-m)}{u^2(n-m)+p(1+\frac{v(n-m)}{q})} - l_2 v(n-m))$. 假设 $|f_1| < |u_i|, |f_2| < |u_i|$, 此时系统脉冲时刻控制律为 $(a-1)u(n_k-1), (b-1)v(n_k-1)$, 执行器饱和特性的影响可以等效为对控制器参数 a, b 的限制. 例如: 若 $W > u_i$, 则第 2.1 节中 $a, b > 0$, 但是执行器的控制力度却小于预期的控制力度, 这样就可能导致系统无法达到理想的控制效果. 此时运用直接法处理执行器的饱和特性, 即在脉冲时刻集内每次的控制力度保持在阈值之内, 再通过定理 4 保证闭环控制系统零解的渐近稳定.

注 4. 由于 f_1, f_2 与系统的离散化参数 h 有关, 所以若设计 h 足够小, 则假设条件 $|f_1| < |u_i|, |f_2| < |u_i|$ 较易实现.

2.3 执行器的响应时间对系统稳定性的影响

本节不考虑执行器的饱和特性, 仅考虑执行器的响应时间对系统稳定性的影响. 由于执行器的物理约束条件, 当控制器下达控制命令后, 执行器需要一定的时间才能达到控制器所需的控制强度, 这段时间称为执行器的响应时间. 执行器的响应时间使得离散脉冲控制不可能通过一次脉冲控制达到控制目的, 需要多个脉冲控制时刻. 而这种情况下脉冲控制的数学描述, 少有文献提及. 定义 2 描述的脉冲时刻集正好可以用来刻画执行器响应时间内的变换规律, 易于分析.

当控制器给执行器下达控制命令后, 响应时间导致系统达到预期控制目的之前有一个动态过程. 这个动态过程可以是线性的也可以是非线性的, 但是都由执行器的本质特征决定, 与系统无关. 而本文提出的脉冲时刻集可以描述执行器接收到控制命令后的动态过程, 接着当这个动态过程满足定理 4 中所述条件时, 可得系统零解的渐近稳定. 所以, 本节中脉冲时刻集内的参数呈现了响应时间内执行器的动态过程. 具体分为两个方面讨论: 1) 若响应时间小于脉冲间隔; 2) 若响应时间大于脉冲间隔. 针对第二种情况, 脉冲时刻集将无法确切描述执行器的动态变化过程. 但是此时的实际情况可以等效为离散系统中每个离散时刻都有反馈控制的情形, 且反馈控制律在 n_k 时刻变化一次. 然后在脉冲时刻集内接下来的脉冲控制时刻的动态规律由执行器的动态特性和控制器的控制命令决定. 此外, 该模型也可以

等效为一个切换系统, 在 n_k 时刻切换到下一个子系统. 每个子系统的初始值不一样, 但具有相同的动力学特性, 该特性由执行器的本质特性决定. 但是不管是描述为切换系统还是上述的反馈控制, 已经不是脉冲控制的范畴了. 所以本节主要讨论第一种情况.

考虑执行器在响应时间内为单调变化的, 例如对于第 2.1 节中的控制律 a, b , 单调意味着系统在脉冲时刻集内部单调地减少到理想 a, b , 这样就符合定理 4 中条件 4). 即当 $n \in k_i(s_j), 0 \leq j \leq m, j \in \mathbf{N}^*, m \in \mathbf{N}^*$ 时, $u(k_i(s_j)) = I_{k_i(s_j)}(x(n_{k_i(s_j)})) - f(n_{k_i(s_j)}, x(n_{k_i(s_j)}))$ 随着脉冲时刻的增加单调增加, 而在脉冲时刻集内的最大脉冲时刻, 控制规律恰好达到第 2.1 节中的 a, b , 在这种情况下定理 4 给出了系统零解渐近稳定的充分条件.

2.4 增加脉冲控制强度调整系统动态范围

相较于第 2.1 节中的一次控制, 定理 4 利用了脉冲时刻集内部的脉冲时刻, 增加控制强度可以有效提高系统的临界分岔参数, 扩大系统稳定性参数范围.

3 仿真

本节的控制对象为系统 (3), 首先研究系统 (3) 的分岔, 然后针对斯莫伦系统中的复杂动力学行为, 通过实例验证执行器存在限制条件时扩展定理的有效性. 仿真图形分为两种: 1) 波形图: 横坐标为离散系统的迭代次数, 纵坐标为系统的状态变量 (u, v), 单位为 (ng/uL); 2) 相图: 纵坐标为延迟项 $u(n-5)$, 横坐标为 $u(n)$, 单位为 (ng/uL).

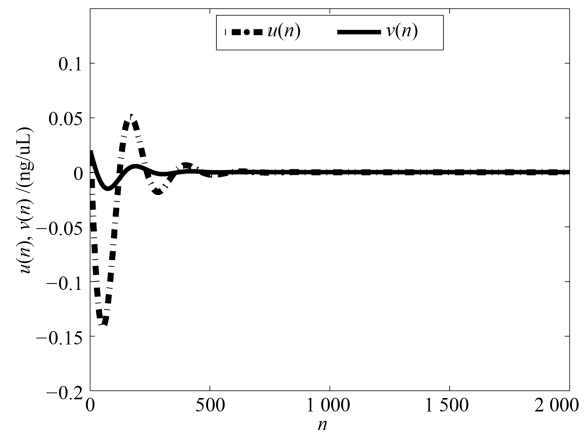
3.1 系统 Neimark-Sacker 分岔仿真

在系统 (3) 中取系统参数 $k_1 = 11.0, k_2 = 0.3, l_1 = 1.0, l_2 = 0.2, p = 10.0, q = 0.2, r = 0.4$. 根据定理 3 可知, 存在 τ_0 使得系统中存在 Neimark-Sacker 分岔, 根据文献 [21] 可得 $\tau_0 = 3.80$. 设系统初始条件为 $u(0) = v(0) = 0.02$, 现分别取 $\tau = 1.0, 3.80$, 可得图 1 和图 2. 根据图 1 可知, 当系统的分岔参数小于临界值时, 系统的平衡点最后收敛在原点. 而当系统的分岔参数等于临界值时, 根据图 2 可知, 系统存在极限环, 导致系统产生振荡.

3.2 理想执行器脉冲控制

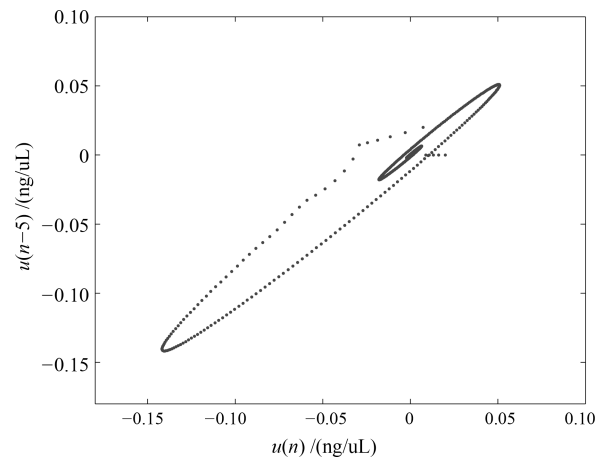
本节考虑理想执行器时的脉冲控制, 参数如第 3.1 节中所取, 另选取时间延迟和系统初值为 $\tau = 9.0, u(0) = v(0) = 1.0$. 此时系统仿真如图 3(a) 和 (b), 由图 3(b) 可知, 系统此时拥有两个稳定极限环, 系统零解并未收敛在原点. 接着根据定理 2, 设计第 2.1 节中控制参数 $a = 0.2, b = 0.2$, 可得系统仿真, 如图 3(c) 和 (d). 根据图形可知, 此时系

统零解基本收敛到原点.



(a) $\tau = 1 < \tau_0$ 时系统的波形图

(a) The waveform plot of system with $\tau = 1 < \tau_0$



(b) $\tau = 1 < \tau_0$ 时系统的相图

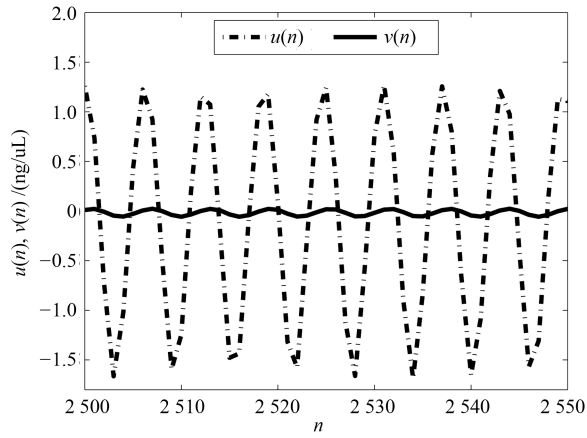
(b) The phase diagram of system with $\tau = 1 < \tau_0$

图 1 系统平衡点的稳定性分析

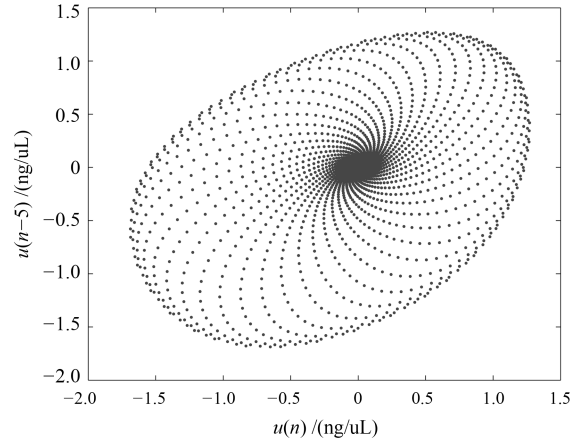
Fig. 1 The stable equilibrium of system

3.3 执行器存在饱和特性时的脉冲控制

接下来考虑执行器饱和特性对系统的影响. 首先, 假设第 2.2 节中饱和特性的阈值 $u_i = 1.5$, 可得图 4(a) 和 (b), 时间延迟和初值如第 3.2 节所选, 此时脉冲控制不能使得系统如图 3(c) 和 (d) 一样渐近稳定, 反而增加了系统的振荡性. 把单周期轨道的极限环, 变成了多周期轨道极限环, 使系统的动态行为变得更加复杂, 可见若考虑执行器的饱和特性, 由定理 2 得出的控制器无效. 其次, 通过定理 4 中的脉冲控制集分担单次脉冲控制的控制强度. 以斯莫伦系统中 $u(n)$ 为例, 该状态在脉冲时刻数学模型为 $u(n+1) = au(n) - u(n+1) + u(n) - u(n) = (a-1)u(n) + (u(n) - u(n+1))$. 当斯莫伦系统的离散参数 h 很小时, $u(n) \approx u(n+1)$, 即此时脉冲时刻的控制强度由 a 决定. 由于 $0 < a < 1$, 所以当



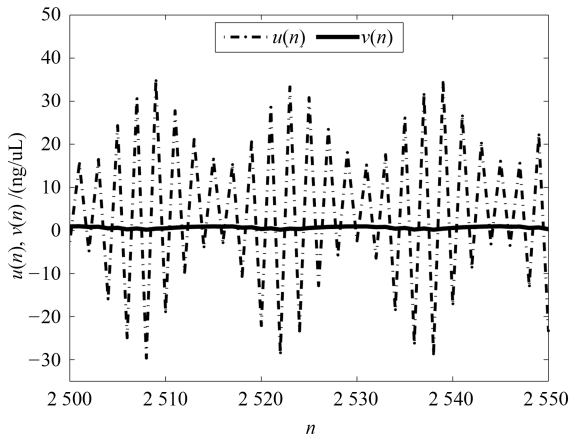
(a) $\tau = 3.8 = \tau_0$ 时系统的波形图
(a) The waveform plot of system with $\tau = 3.8 = \tau_0$



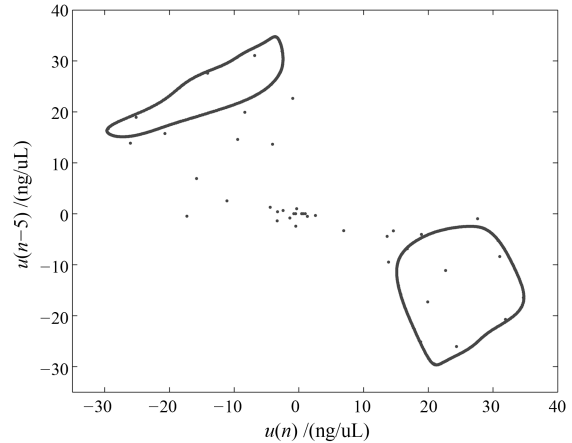
(b) $\tau = 3.8 = \tau_0$ 时系统的相图
(b) The phase diagram of system with $\tau = 3.8 = \tau_0$

图 2 系统的 Neimark-Sacker 分岔

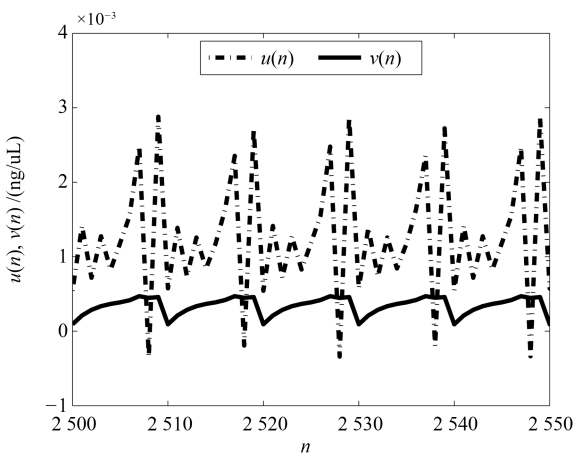
Fig. 2 The Neimark-Sacker bifurcation of system



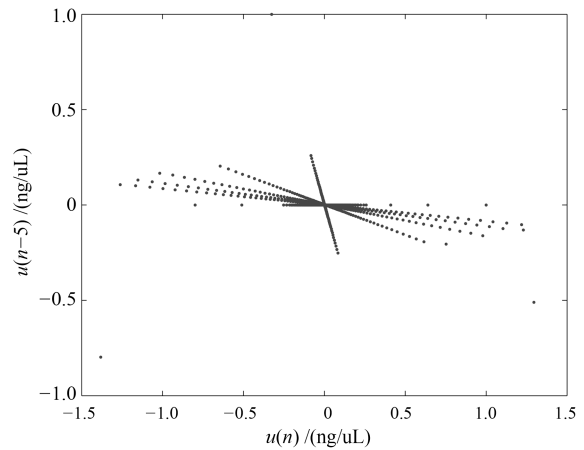
(a) $\tau = 9.0$ 时系统的波形图
(a) The waveform plot of system with $\tau = 9.0$



(b) $\tau = 9.0$ 时系统的相图
(b) The phase diagram of system with $\tau = 9.0$



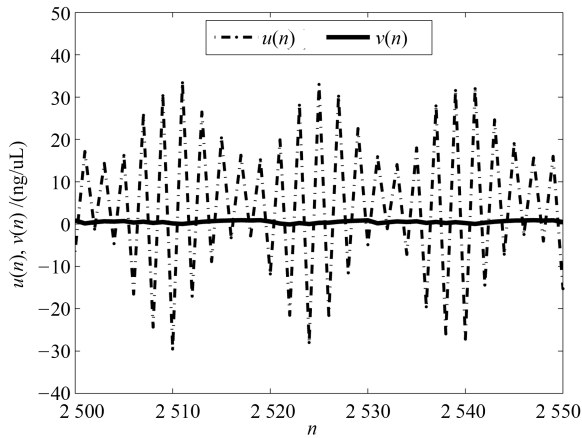
(c) $\tau = 9.0$ 时受脉冲控制系统的波形图
(c) The waveform plot of impulsive control system with $\tau = 9.0$



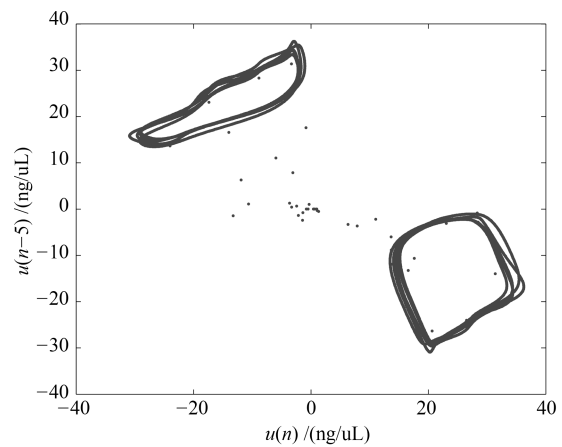
(d) $\tau = 9.0$ 时受脉冲控制系统的相图
(d) The phase diagram of impulsive control system with $\tau = 9.0$

图 3 传统脉冲控制镇定系统的分岔

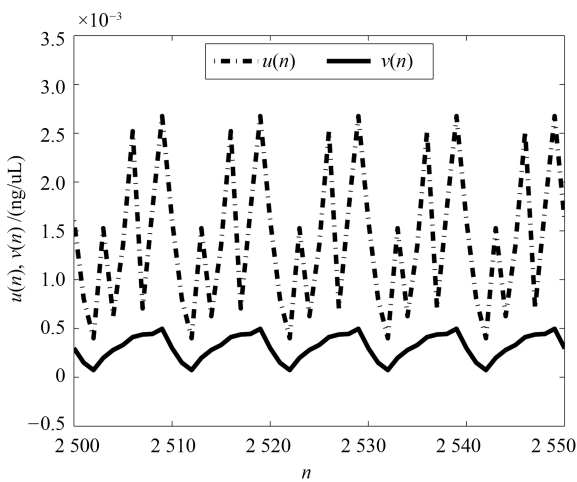
Fig. 3 Conventional impulsive control the Neimark-Sacker bifurcation



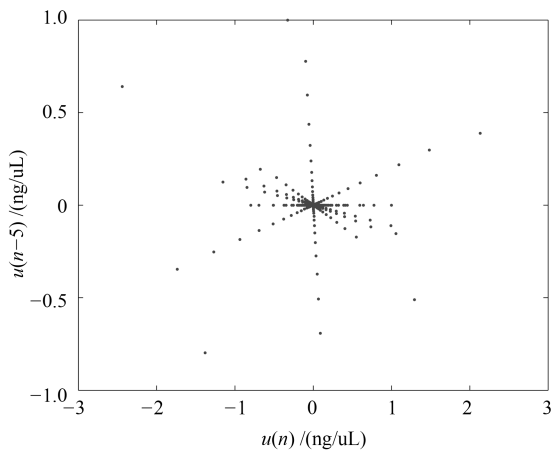
(a) $\tau = 9.0, u_i = 1.5$ 时系统的波形图
(a) The waveform plot of system with $\tau = 9.0, u_i = 1.5$



(b) $\tau = 9.0, u_i = 1.5$ 时系统的相图
(b) The phase diagram of system with $\tau = 9.0, u_i = 1.5$



(c) $a_1 = b_1 = 0.6, a_2 = b_2 = 0.5, a_3 = b_3 = 0.5$ 时系统的波形图
(c) The waveform plot of system with
 $a_1 = b_1 = 0.6, a_2 = b_2 = 0.5, a_3 = b_3 = 0.5$



(d) $a_1 = b_1 = 0.6, a_2 = b_2 = 0.5, a_3 = b_3 = 0.5$ 时系统的相图
(d) The waveform plot of system with
 $a_1 = b_1 = 0.6, a_2 = b_2 = 0.5, a_3 = b_3 = 0.5$

图 4 考虑执行器饱和和特性时的脉冲控制系统

Fig. 4 The impulsive control system with actuator saturation

a 小时, 控制强度大, 当 a 大时, 控制强度小. 设计控制时刻集内有三个控制时刻, 每个控制时刻规律如第 2.1 节中所述, 设计其中控制参数为 $a_1 = b_1 = 0.6, a_2 = b_2 = 0.5, a_3 = b_3 = 0.5$, 可得图 4(c) 和 (d). 根据图形可知, 此时系统零解渐近稳定, 验证了控制的有效性. 比较图 3(a)~(d) 可知系统执行器存在饱和和特性时, 运用扩展定理中脉冲时刻集内的其他脉冲时刻分担控制强度, 解决了一次脉冲时刻控制强度过大的问题.

注 5. 脉冲控制开始作用的有限次控制可以在阈值外, 因为后续的控制有可能保证接下来的控制处于阈值之内. 例如本节仿真若选取 $a_1 = b_1 = 0.2, a_2 = b_2 = 0.5, a_3 = b_3 = 0.5$ 仿真效果更好, 因为在这组参数下, 执行器的饱和和特性只对开始的几次脉冲控制具有限制, 而较大的控制

强度在后续的控制中更加有效.

3.4 执行器存在响应时间时对系统的影响

本节验证当执行器在响应时间内的变化如定理 4 中所述时, 系统零解的渐近稳定性. 由于第 3.3 节中图 4 可以说明这个问题, 所以不另做仿真. 同样以 $u(n)$ 为例, 假设响应时间内执行器的动态过程单调变化. 根据第 3.3 节分析可知, 控制强度越大, a 越小. 所以响应时间对 a 的影响是使 a 由大变小, 最后才达到需要的控制强度. 假设脉冲时刻集内部有三个脉冲时刻, 在第三个控制时刻达到所需控制强度, 此时分析当 $a_1 = 0.6, a_2 = 0.5, a_3 = 0.5$ 时系统在脉冲时刻集内部的控制过程. 第 k_i 个脉冲时刻集内的第一个脉冲时刻 $u(k_i(3_1)) = a_1 u(k_i(3_1) - 1)$, 第二个脉冲时刻 $u(k_i(3_2)) = a_2 u(k_i(3_1))$, 第三个脉冲时刻 $u(k_i(3_3)) = a_3 u(k_i(3_2))$, 将 $a_1 = 0.6, a_2 =$

0.5, $a_3 = 0.5$ 代入可知, $u(k_i(3_3)) = 0.15u(k_i(3_1) - 1)$, 同理 $v(k_i(3_3)) = 0.15v(k_i(3_1) - 1)$, 与第 3.2 节中控制相比, 在控制集内部控制强度满足渐近稳定条件. 又由于在这些条件下脉冲间隔和脉冲控制规律符合定理 4 中的条件, 根据图 4 可知, 此时系统的零解是渐近稳定的, 这就说明当执行器存在响应时间时, 定理 4 可以成为系统零解渐近稳定的充分条件.

3.5 脉冲控制强度变化对系统的影响

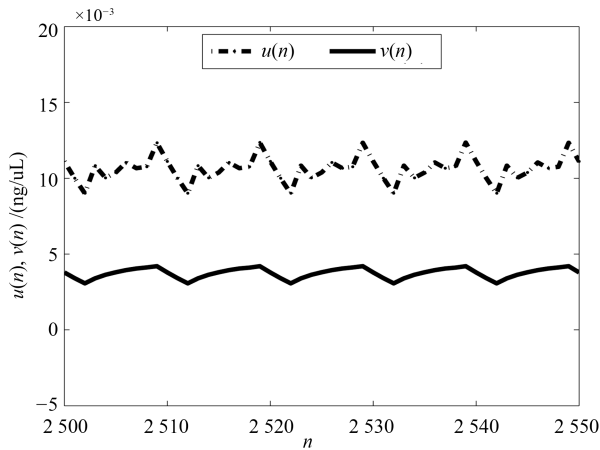
对于非线性系统而言, 系统中参数的变化可能导致系统动力学行为的变化. 本文对于临界分岔参数的选取是以文献 [21] 为标准的. 该分岔参数表示时间延迟, 即当时间延迟小于临界值时系统是原点渐近稳定的, 但是当系统时间延迟大于临界值, 系统会出现极限环或者其他的动力学特性.

本节在脉冲时刻集内选取较小的控制强度, 取

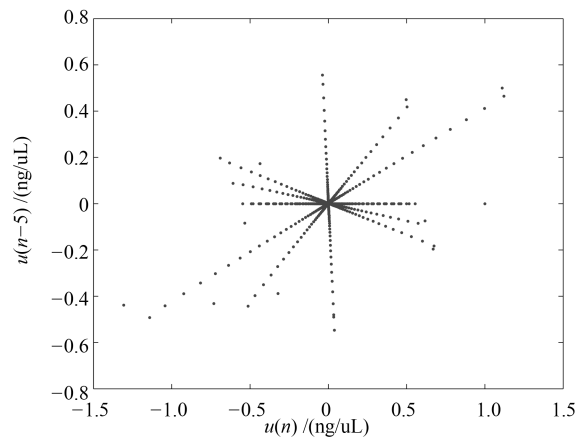
$a_1 = b_1 = 0.9, a_2 = b_2 = 0.9, a_3 = b_3 = 0.9$, 分别取 $\tau = 7.2, 7.3$ 可得图 5. 由于当时时间延迟比较大时, 很难找出确切的临界分岔参数, 但是 $\tau = 7.2$ 时, 根据图 5(a) 和 (b) 可知, 系统零解收敛于原点; 而 $\tau = 7.3$ 时, 根据图 5(c) 和 (d) 可知, 系统拥有多个周期轨道, 可见分岔参数由 7.2 变为 7.3 时系统的结构发生了改变. 因此, 可知系统此时的临界分岔参数在 7.2 和 7.3 之间, 设其为 e . 故比较图 5 和图 2 可知, 系统的临界分岔参数由 3.8 变为了 e . 可见即使选取较小的控制强度, 脉冲控制扩展定理仍能较大提高系统的临界分岔参数.

4 结论

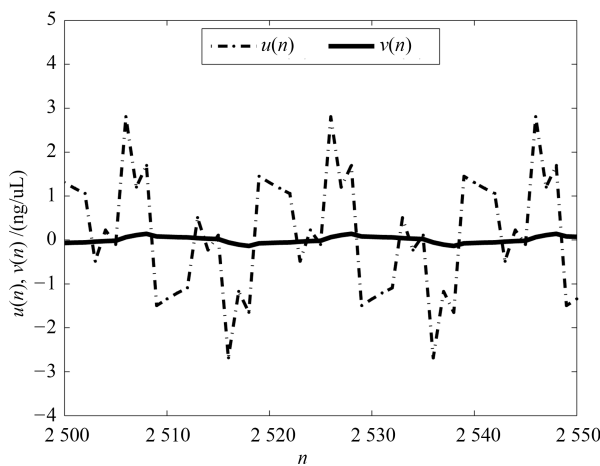
本文提出了一种扩展脉冲控制的数学描述方法, 推出了脉冲控制扩展定理. 通过扩展定理可以有效解决执行器饱和和特性带来的影响, 找



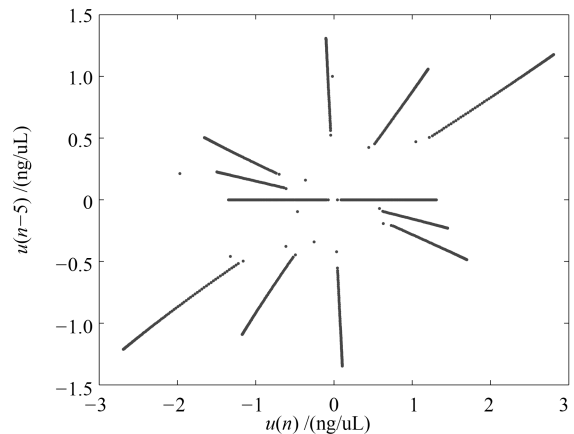
(a) $\tau = 7.2$ 系统的波形图
(a) The waveform plot of system with $\tau = 7.2$



(b) $\tau = 7.2$ 系统的相图
(b) The phase diagram of system with $\tau = 7.2$



(c) $\tau = 7.3$ 系统的波形图
(c) The waveform plot of system with $\tau = 7.3$



(d) $\tau = 7.3$ 系统的相图
(d) The phase diagram of system with $\tau = 7.3$

图 5 扩展脉冲控制对系统的影响

Fig. 5 The influence of extended impulsive control on the system

出了执行器存在响应时间时, 系统稳定的充分条件. 最后, 以斯莫伦系统为例进行仿真, 验证了上述理论的正确性. 但是, 本文对于如何根据不同的性能指标选取最恰当的控制规律和最优的脉冲时间间隔, 并没有做出相应的研究, 而这也将是下一步的研究方向.

致谢

感谢上海联创汽车电子有限公司孙盼对本文的贡献.

References

- Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. *Theory of Impulsive Differential Equations*. Singapore: World Scientific, 1989.
- Yang X S, Lam J, Ho D W C, Feng Z G. Fixed-time synchronization of complex networks with impulsive effects via non-chattering control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(11): 5511–5521
- Rakkiyappan R, Velmurugan G, George J N, Selvamani R. Exponential synchronization of Lur'e complex dynamical networks with uncertain inner coupling and pinning impulsive control. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, **307**: 217–231
- Zhu Q X, Song B. Exponential stability of impulsive nonlinear stochastic differential equations with mixed delays. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, **12**(5): 2851–2860
- Long S J, Xu D Y. Global exponential stability of non-autonomous cellular neural networks with impulses and time-varying delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(6): 1463–1472
- Su Xiao-Ming, Zhang Pin, Zhu Jun-Yu. Finite-time stability of linear time-varying descriptor impulse systems. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(2): 309–314
(苏晓明, 张品, 祝君宇. 广义时变脉冲系统的时域稳定. *自动化学报*, 2016, **42**(2): 309–314)
- Yang T. *Impulsive Control Theory*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- Zhang L, Yang X S, Xu C, Feng J W. Exponential synchronization of complex-valued complex networks with time-varying delays and stochastic perturbations via time-delayed impulsive control. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, **306**: 22–30
- Ai Z D, Chen C C. Asymptotic stability analysis and design of nonlinear impulsive control systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2017, **24**: 244–252
- Jiang X W, Ding L, Guan Z H, Yuan F S. Bifurcation and chaotic behavior of a discrete-time Ricardo-Malthus model. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **71**(3): 437–446
- Yue D D, Guan Z H, Chen J, Ling G, Wu Y H. Bifurcations and chaos of a discrete-time model in genetic regulatory networks. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **87**(1): 567–586
- Cao J Z, Jiang H J. Hopf bifurcation analysis for a model of single genetic negative feedback autoregulatory system with delay. *Neurocomputing*, 2013, **99**: 381–389
- Ouannas A, Odibat Z, Shawagfeh N, Alsaedi A, Ahmad B. Universal chaos synchronization control laws for general quadratic discrete systems. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, **45**: 636–641
- Salman S M, Yousef A M, Elsadany A A. Stability, bifurcation analysis and chaos control of a discrete predator-prey system with square root functional response. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2016, **93**: 20–31
- Din Q. Global stability and Neimark-Sacker bifurcation of a host-parasitoid model. *International Journal of Systems Science*, 2017, **48**(6): 1194–1202
- Liu Feng. Study on Bifurcation and Chaos System with Impulsive Control [Ph.D. dissertation], Huazhong University of Science and Technology, China, 2008
(刘峰. 基于脉冲控制的分支与混沌系统研究 [博士学位论文], 华中科技大学, 中国, 2008)
- Zhang Y, Sun J T, Feng G. Impulsive control of discrete systems with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(4): 830–834
- Wu S C, Li C D, Liao X F, Duan S K. Exponential stability of impulsive discrete systems with time delay and applications in stochastic neural networks: a Razumikhin approach. *Neurocomputing*, 2012, **82**: 29–36
- Liu F, Guan Z H, Wang H O, Li Y Q. Impulsive control of bifurcations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2009, **79**(7): 2180–2191
- Zheng Y A, Nian Y B, Liu Z R. Impulsive control for the stabilization of discrete chaotic system. *Chinese Physics Letters*, 2002, **19**(9): 1251–1253
- Liu F, Yin X, Zhang Z, Sun F L. Stability and neimark-sacker bifurcation analysis in a genetic network with delay. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 2017, **21**(2): 278–283



殷翔 中国地质大学(武汉)自动化学院博士研究生. 2017年获得中国地质大学(武汉)自动化学院控制科学与工程专业硕士学位. 主要研究方向为非线性控制系统, 先进控制理论及应用, 机电系统的高精度控制.

E-mail: YinXiang_SP@163.com

(YIN Xiang Ph.D. candidate at the School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan. He received his master degree from China University of Geosciences (Wuhan) in 2017. His research interest covers nonlinear control system, advanced control theory and applications, and high precision control of mechatronic systems.)



刘 峰 中国地质大学(武汉)自动化学学院教授. 2008 年获得华中科技大学控制理论与控制工程专业博士学位. 2011 年华中科技大学通信与信息系统专业博士后出站. 主要研究方向为非线性动力系统, 复杂系统与复杂网络, 脉冲混合系统与智能控制. 本文通信作者.

E-mail: fliu@cug.edu.cn

(**LIU Feng** Professor at the School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan. He received his Ph.D. degree from Huazhong University of Science and Technology in 2008. From 2009 to 2011, he was a post-doctoral fellow in the Department of Electronics and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology. His research interest covers nonlinear dynamical systems, complex systems, complex networks, impulsive hybrid system, and intelligent control. Corresponding author of this paper.)



余锦华 中国地质大学(武汉)自动化学学院教授. 1983 年获得中南矿冶学院工学学士学位. 1990 年和 1993 年分别获得日本东京工业大学硕士和博士学位. 主要研究方向为先进控制理论与应用, 重复控制, 机电系统的高精度控制, 机器人运动控制, 康复机器人, 计算智能的工业应用. E-mail: j-she@cug.edu.cn

(**SHE Jin-Hua** Professor at the School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan. He received his bachelor degree from Central South Institute of Mining and Metallurgy in 1983, and received his master and Ph. D. degrees from Tokyo Institute of Technology in 1990 and 1993, respectively. His research interest covers advanced control theory and applications, repetitive control, high precision control of mechatronic systems, robot motion control, rehabilitation robots, and industrial applications of computational intelligence.)