

变参考轨迹下的鲁棒迭代学习模型预测控制

马乐乐¹ 刘向杰¹

摘要 迭代学习模型预测控制是针对间歇过程的先进控制方法, 它通过迭代高精度跟踪给定参考轨迹, 并保证时域上的闭环稳定性. 然而, 现有的迭代学习模型预测控制算法大多基于线性/线性化系统, 且没有考虑参考轨迹变化的情况. 本文基于线性参变系统提出一种能有效跟踪变参考轨迹的鲁棒迭代学习模型预测控制算法. 首先, 采用线性参变模型准确涵盖原始非线性系统的动态特性. 然后, 将鲁棒 H_∞ 控制与传统迭代学习模型预测控制相结合, 抑制变参考轨迹带来的跟踪误差波动, 通过优化线性矩阵不等式约束下的目标函数求得控制输入. 深入分析了鲁棒迭代学习模型预测控制的鲁棒稳定性和迭代收敛性. 最后, 通过对数值例子和连续搅拌反应釜系统的仿真验证了所提出算法的有效性.

关键词 H_∞ 控制, 变参考轨迹, 迭代学习控制, 线性参变模型, 鲁棒模型预测控制

引用格式 马乐乐, 刘向杰. 变参考轨迹下的鲁棒迭代学习模型预测控制. 自动化学报, 2019, 45(10): 1933–1945

DOI 10.16383/j.aas.c180681

Robust Model Predictive Iterative Learning Control With Iteration-varying Reference Trajectory

MA Le-Le¹ LIU Xiang-Jie¹

Abstract Model predictive iterative learning control (MPILC) is a popular approach to control systems with repetitive nature like batch systems, as it is capable of tracking the plant reference trajectory with high accuracy and guaranteed closed-loop stability. However, the existing MPILCs are mostly based on linear/linearized system with no consideration of reference trajectory variation. In this paper, a robust MPILC (RMPILC) based on the linear parameter varying (LPV) model is derived to track the iteration-varying reference trajectory. The LPV model is chosen to represent the dynamic property of nonlinear systems accurately. Robust H_∞ control is incorporated with MPILC to restrain the fluctuation of tracking errors, with control inputs solved by optimizing the objective function constrained by linear matrix inequalities. The robust stability and convergence condition of the system controlled by RMPILC are analyzed. The effectiveness of the proposed controller is verified through the simulations on a numerical example and a continuous stirred tank reactor (CSTR) system.

Key words H_∞ control, iteration-varying reference trajectory, iterative learning control (ILC), LPV model, robust model predictive control

Citation Ma Le-Le, Liu Xiang-Jie. Robust model predictive iterative learning control with iteration-varying reference trajectory. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(10): 1933–1945

现代过程工业中存在着的一类间歇过程^[1], 如半导体加工、制药、注塑、发酵等. 间歇过程通常具有重复特性, 且对跟踪精度要求较高, 是典型的非连续操作. 其控制任务是在每个生产批次内跟踪给定的参考轨迹^[2]. 迭代学习控制 (Iterative learning control, ILC) 能够利用过去批次的信息进行优化学

习, 不断调整控制输入轨迹, 逐步提高跟踪性能, 实现对参考轨迹的高精度跟踪, 因此被广泛应用于间歇过程控制中^[3]. 但是由于 ILC 是典型的开环控制, 因此不能保证控制系统的时域稳定性, 难以处理实时干扰. 模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 作为先进过程控制技术^[4], 不仅广泛应用于工业过程的优化控制^[5–6], 同时也成功应用于轨迹跟踪控制^[7]. 它通过预测未来的系统状态及输出, 进行滚动时域优化, 能及时处理实时干扰, 保证时域跟踪性能及闭环系统稳定性, 弥补 ILC 的不足. 迭代学习模型预测控制 (Model predictive iterative learning control, MPILC) 结合了 MPC 与 ILC 的优点, 因此成为控制间歇过程的有效方法.

早期的 MPILC 算法大多基于输入输出模型, 如受控自回归积分滑动平均 (CARIMA) 模型^[8–9],

收稿日期 2018-10-19 录用日期 2019-01-18
Manuscript received October 19, 2018; accepted January 18, 2019

国家自然科学基金 (61673171, U1709211, 61533013), 中央高校基本科研业务费专项基金 (2017ZZD004) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61673171, U1709211, 61533013), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (2017ZZD004)

本文责任编辑 魏庆来
Recommended by Associate Editor WEI Qing-Lai

1. 华北电力大学控制与计算机工程学院 北京 102206
1. School of Control And Computer Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206

脉冲响应模型^[10]. 而近年来基于状态空间模型的 MPILC 算法研究受到了更多关注, 研究对象包括线性定常状态空间模型^[11]、带干扰项的状态空间模型^[12] 以及含不确定性的状态空间模型^[13]. 其控制器设计通常需要进行状态增广以构造二维误差模型. 为加强控制器鲁棒性, 很多学者在此基础上提出控制器结构改进算法, 如构造分段优化^[14], 改善学习机制^[15].

典型的间歇过程通常具有强非线性, 而现有的 MPILC 算法大都是针对线性系统构造的. 文献 [14–15] 将原非线性系统在工作点简单线性化, 文献 [10] 沿参考轨迹进行线性化. 由线性化带来的模型失配问题会在一定程度上影响时域跟踪性能以及迭代学习速度, 这在实际生产上将造成原料浪费以及经济效率下降. 近年来许多学者在 MPILC 研究中通过各种建模手段来近似非线性系统, 包括 T-S 模糊建模^[16]、神经网络建模^[17]、数据驱动建模^[18] 等. 但是这些方法需要大量过程数据的支持, 以及极其复杂的调参、学习过程才能建立较为精确的模型.

线性参变 (Linear parameter varying, LPV) 蕴含技术是处理复杂非线性的有效手段, 已被广泛应用于非线性模型预测中^[19]. 原非线性系统在工作区间的动态特性可以包含在由 LPV 系统构成的多胞里. 因此, 只要保证基于 LPV 模型的控制系统的稳定, 就能够保证非线性控制系统的稳定^[20]. 由于 LPV 模型中存在的参数不确定性, 其控制求解一般通过线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 约束下的目标函数优化来实现.

间歇过程的参考轨迹会由于不同的产品规格、生产效率以及外在干扰而发生改变. 比如半导体制造中的蚀刻系统必须跟踪不同的操作轨迹来生产不同规格的晶片^[21]. 而一旦参考轨迹发生变化, 经典迭代预测控制需要重新进行初始化, 并经历多个批次的学习来跟踪新轨迹^[10], 适应能力较差. 近年来许多学者提出改进的自适应 ILC 算法来解决变参考轨迹跟踪控制问题. 文献 [21] 针对随机系统变参考轨迹跟踪问题, 提出两种自适应 ILC 策略, 一是在控制器设计中选择当前批次的输出轨迹与下一批次的参考轨迹的差值作为新的状态变量, 另一种是在每一个批次的末尾利用卡尔曼滤波器重新进行系统辨识; 文献 [22] 针对离散非线性系统, 设计模糊自适应 ILC 控制器, 通过不断更新模糊参数来近似变参考轨迹下的系统动态; 文献 [23] 设计基于数据驱动的自适应 ILC 控制器, 引入未来批次的参考轨迹作为反馈, 并将过去批次的参考轨迹作为前馈以实现变参考轨迹的跟踪. 这些基于 ILC 的控制策略通常要求已知所有采样时刻上的参考轨迹变化量, 并且由于算法内缺少预测环节导致了跟踪性能和学习

效率的下降. 针对该问题, 可将参考轨迹变化量视为迭代域中存在的有界扰动, 构造限制参考轨迹变化量对系统控制性能影响的 H_∞ 约束. 这样只要在每个采样时刻的优化中满足此 H_∞ 约束, 就可有效抑制变参考轨迹带来的跟踪误差波动, 且只需已知下一采样时刻的参考轨迹变化量. H_∞ 控制^[24] 可与 MPILC 算法有效结合, 利用预测控制的滚动时域优化提高时域跟踪性能, 从而加快学习速度.

本文提出一种基于 LPV 模型的鲁棒迭代学习模型预测控制 (Robust model predictive iterative learning control, RMPILC) 算法, 实现间歇过程对变参考轨迹的跟踪. 采用 LPV 模型描述非线性系统动态特性, 并通过状态增广建立二维误差模型. 为保证变参考轨迹下的跟踪性能, 引入 H_∞ 约束条件. 将变参考轨迹跟踪问题转化为 LMI 约束下的凸优化问题. 通过针对数值例子以及 CSTR 系统的仿真验证了所提出算法的有效性.

1 模型推导

1.1 非线性系统的 LPV 蕴含

假设非线性间歇系统由下式表示:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t)) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x \in \mathbf{R}^{n_x}$ 是状态变量, $u \in \mathbf{R}^{n_u}$ 是控制输入, $y \in \mathbf{R}^{n_y}$ 为输出变量. $t \in (0, N]$, N 为批次长度.

假设对任意 $x(t)$ 、 $u(t)$ ($t \in (0, N]$) 存在矩阵

$$\aleph(t) \in \Omega(\mathfrak{S})$$

满足

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t) \end{bmatrix} = \aleph(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

其中, $\Omega(\mathfrak{S}) = \text{co}\{A(\theta), B(\theta), C(\theta), \theta \in \mathfrak{S}\}$ 为多胞集合, 其中 θ 为某一有界过程参数, 且存在 l 个非负系数 θ_q ($q = 1, 2, \dots, l$) 满足

$$A(\theta) = \sum_{q=1}^l \theta_q A_q, B(\theta) = \sum_{q=1}^l \theta_q B_q$$

$$C(\theta) = \sum_{q=1}^l \theta_q C_q, \sum_{q=1}^l \theta_q = 1$$

那么, 非线性系统 (1) 的动态特性可由 LPV 系统描述:

$$\begin{cases} x(t+1) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \\ y(t) = C(\theta)x(t) \end{cases} \quad (2)$$

即任何关于 LPV 系统 (2) 的性质适用于非线性系统 (1).

间歇过程的 LPV 建模问题已经得到了广泛关注^[25]. 其中, 选择合适的参数至关重要. 对于简单非线性系统, 可以通过直接计算非线性项的上下界确定. 若被控系统的非线性比较复杂, 可以基于系统平衡点, 采用数学变换的方法获得合适的表达式^[26].

1.2 增广迭代误差模型

建立相邻迭代次序之间的动态关系, 得到

$$\begin{cases} \Delta x_k(t+1) = A(\theta)\Delta x_k(t) + B(\theta)\Delta u_k(t) \\ \Delta y_k(t) = C(\theta)\Delta x_k(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\Delta x_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t)$$

$$\Delta u_k(t) = u_k(t) - u_{k-1}(t)$$

$$\Delta y_k(t) = y_k(t) - y_{k-1}(t)$$

定义输出参考轨迹为 $y_k^r(t)$, 那么跟踪误差可以定义为

$$e_k(t) = y_k^r(t) - y_k(t) \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (3), 得到沿迭代轴的增广迭代误差状态空间模型:

$$\begin{cases} \bar{x}_k(t+1) = \bar{A}(\theta)\bar{x}_k(t) + \bar{B}(\theta)\Delta u_k(t) + \Upsilon_k(t+1) \\ \bar{y}_k(t) = \bar{C}\bar{x}_k(t) \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\bar{y}_k(t) = \Delta e_k(t), \bar{x}_k(t) = \begin{bmatrix} \Delta x_k(t) \\ \Delta e_k(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n_x+n_y}$$

$$\Delta e_k(t) = e_k(t) - e_{k-1}(t), \Delta y_k^r(t) = y_k^r(t) - y_{k-1}^r(t)$$

$$\bar{A}(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & 0 \\ -C(\theta)A(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}(\theta) = \begin{bmatrix} B(\theta) \\ -C(\theta)B(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix}, \Upsilon_k(t+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta y_k^r(t+1) \end{bmatrix}$$

这里, Δy_k^r 项代表了参考轨迹变化量.

1.3 二维增广误差模型

由第 1.2 节可知, 系统 (5) 的输出 $\bar{y}_k(t)$ 为相邻迭代次序跟踪误差的变化量 $\Delta e_k(t)$. 则在第 k 次迭代中, 为了将跟踪误差 $e_k(t)$ 控制到 0, $\bar{y}_k(t)$ 的参考

轨迹应为 $\bar{y}_k^r(t) = -e_{k-1}(t)$.

定义:

$$\tilde{e}_k(t) = \bar{y}_k^r(t) - \bar{y}_k(t) \quad (6)$$

联立式 (5) 和式 (6), 得到同时包含迭代域和时域动态特性的二维增广误差模型

$$\tilde{x}_k(t+1) = \tilde{A}(\theta)\tilde{x}_k(t) + \tilde{B}(\theta)\delta\Delta u_k(t) + R_k(t+1) \quad (7)$$

其中

$$\tilde{A}(\theta) = \begin{bmatrix} I_{n_y \times n_y} & -\tilde{C}\bar{A}(\theta) \\ 0 & \bar{A}(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}(\theta) = \begin{bmatrix} -\tilde{C}\bar{B}(\theta) \\ \bar{B}(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} -\tilde{e}_k(t) \\ \delta\bar{x}_k(t) \end{bmatrix}, \delta\Delta u_k(t) = \Delta u_k(t) - \Delta u_k(t-1)$$

$$\delta\bar{x}_k(t) = \bar{x}_k(t) - \bar{x}_k(t-1)$$

$$R_k(t+1) = \begin{bmatrix} \delta\bar{y}_k^r(t+1) - \delta\Delta y_k^r(t+1) \\ \Upsilon_k(t+1) - \Upsilon_k(t) \end{bmatrix}$$

$$\delta\bar{y}_k^r(t+1) = \bar{y}_k^r(t+1) - \bar{y}_k^r(t)$$

$$\delta\Delta y_k^r(t+1) = \Delta y_k^r(t+1) - \Delta y_k^r(t)$$

且满足

$$[\tilde{A}(\theta) \tilde{B}(\theta)] \in \text{co}\{[\tilde{A}_1 \tilde{B}_1], [\tilde{A}_2 \tilde{B}_2], \dots, [\tilde{A}_l \tilde{B}_l]\}$$

注 1. $R_k(t+1)$ 包含了参考轨迹变化量, 为已知有界时变量, 与状态变量、控制输入变量均无关, 可以看作迭代域上的有界外部干扰.

注 2. 模型 (7) 与典型的二维 Rosser 模型^[27] 不同, 它将在同一个状态方程中建立时域与迭代域上动态关系, 其中 $\tilde{x}_k(t)$ 、 $\delta\Delta u_k(t)$ 以及 $R_k(t+1)$ 都是同时包含时域及迭代域信息的二维变量.

因此, 系统 (1) 的轨迹跟踪问题可以转化为系统 (7) 的零点跟踪问题. 其控制任务包括:

- 1) 将 (7) 中的状态 $\tilde{x}_k(t)$ 控制到 0;
- 2) 限制参考轨迹变化量 $R_k(t+1)$ 对控制性能的影响;
- 3) 防止控制输入波动过大.

2 RMPILC 算法

2.1 问题描述

根据控制任务 1) 和 3), 结合鲁棒 H_∞ 控制, 定义控制性能指标 $z_k(t) \in \mathbf{R}^{n_x+2n_y+n_u}$

$$z_k(t) = C_\infty\tilde{x}_k(t) + D_\infty\delta\Delta u_k(t) \quad (8)$$

其中

$$C_\infty = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & m_{n_x+2n_y} & \\ \mathbf{0}_{n_u \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{n_u \times 1} & \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(n_x+2n_y+n_u) \times n_x+2n_y}$$

$$D_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n_x+2n_y) \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{(n_x+2n_y) \times 1} \\ n_1 & & \\ & \ddots & \\ & & n_{n_u} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(n_x+2n_y+n_u) \times n_u}$$

$m_i (i = 1, 2, \dots, n_x + 2n_y), n_j (j = 1, 2, \dots, n_u)$ 为可调权重系数. 显然, $C_\infty^T D_\infty = 0$. 目标函数可表述为 $z_k(t)$ 的二次型:

$$J_k^\infty(t) = \sum_{i=0}^\infty z_k^T(t+i|t)z_k(t+i|t) \quad (9)$$

为实现控制任务 2), 引入 H_∞ 范数 $\|T_{zR}\|_\infty^2$:

$$\|T_{zR}\|_\infty^2 = \frac{\sum_{i=0}^\infty \|z_k(t+i|t)\|^2}{\sum_{i=0}^\infty \|R_k(t+i+1)\|^2} \quad (10)$$

设置 H_∞ 性能指标

$$\|T_{zR}\|_\infty^2 \leq \varepsilon \quad (11)$$

其中, $\varepsilon > 0$ 为给定的 H_∞ 性能上界. 不等式 (11) 表示参考轨迹变化量 $R_k(t+1)$ 对跟踪性能指标 $z_k(t)$ 的影响被限制在由 ε 定义的范围.

因此, 满足以上三项控制任务的优化问题可以描述为:

$$\min_{\delta\Delta u_k(t)} \max J_k^\infty(t) \quad (12)$$

满足式 (8) 和式 (12).

2.2 鲁棒稳定状态反馈控制律

定义状态反馈控制律

$$\delta\Delta u_k(t+i|t) = F_k(t)\tilde{x}_k(t+i|t), \quad i \geq 0 \quad (13)$$

其中, $\delta\Delta u_k(t+i|t), \tilde{x}_k(t+i|t)$ 为当前时刻 t 对未来时刻 $t+i$ 的预测值.

为表达简洁, 推导过程的书写省略 θ . 考虑二次型函数 $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x}$, 可得

$$V(\tilde{x}_k(t+i+1|t)) - V(\tilde{x}_k(t+i|t)) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} (\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))^T P (\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t)) - P & * \\ P(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t)) & P \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix} \quad (14)$$

将式 (14) 从 $i = 0$ 累加至 $i = \infty$, 可得

$$V(\tilde{x}_k(\infty|t)) - V(\tilde{x}_k(t|t)) = \sum_{i=0}^\infty \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} (\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))^T P (\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t)) - P & * \\ P(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t)) & P \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

根据控制任务 1), $\tilde{x}_k(\infty|t)$ 应为 0, 即 $V(\tilde{x}_k(\infty|t)) = 0$, 则

$$-V(\tilde{x}_k(t|t)) = \sum_{i=0}^\infty \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} (\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))^T P (\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t)) - P & * \\ P(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t)) & P \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix} \quad (16)$$

由于 $C_\infty^T D_\infty = 0$, 因此将式 (8) 代入式 (9) 可得

$$J_k^\infty(t) = \varepsilon \sum_{i=0}^\infty R_k^T(t+i+1)R_k(t+i+1) + \sum_{i=0}^\infty \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_\infty^T C_\infty & * \\ 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix} \quad (17)$$

联立式 (16) 和 (17), 目标函数 (9) 有以下形式

$$J_k^\infty(t) = V(\tilde{x}_k(t|t)) + \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} R_k^\top(t+i+1)R_k(t+i+1) + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix}^\top \Phi \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} (\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))^\top P(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t)) - P + & * \\ C_\infty^\top C_\infty + F_k^\top(t)D_\infty^\top D_\infty F_k(t) & \\ P(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t)) & P - \varepsilon I \end{bmatrix}$$

引理 1. 当且仅当 $\Phi < 0$, 能够满足 H_∞ 性能指标 (11).

证明. 在式 (14) 两端同时加上 $z_k^\top(t+i|t)z_k(t+i|t) - \varepsilon R_k^\top(t+i+1)R_k(t+i+1)$, 可得

$$V(\tilde{x}(t+i+1|t)) - V(\tilde{x}(t+i|t)) = -\|z_k(t+i|t)\|^2 + \varepsilon\|R_k(t+i+1)\|^2 + \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix}^\top \Phi \begin{bmatrix} \tilde{x}_k(t+i|t) \\ R_k(t+i+1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

若 $\Phi < 0$, 则有

$$V(\tilde{x}_k(t+i+1|t)) - V(\tilde{x}_k(t+i|t)) \leq -\|z_k(t+i|t)\|^2 + \varepsilon\|R_k(t+i+1)\|^2 \quad (20)$$

由于 $V(\tilde{x}_k(\infty|t)) = 0$, $V(\tilde{x}_k(0|0)) = 0$, 将式 (21) 从 $i = 0$ 到 $i = \infty$ 进行累加, 可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|z_k(t+i|t)\|^2 \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \|R_k(t+i+1)\|^2 \quad (21)$$

式 (22) 与 H_∞ 约束 (12) 等价. \square

在 $\Phi < 0$ 的条件下, 可以得到目标函数 $J_k^\infty(t)$ 的上界

$$J_k^\infty(t) \leq V(\tilde{x}_k(t|t)) + \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} R_k^\top(t+i+1)R_k(t+i+1) \quad (22)$$

根据式 (7) 中 $R_k(t+1)$ 的定义可知, $\sum_{i=0}^{\infty} R_k^\top(t+i+1)R_k(t+i+1)$ 为有界值. 设

$$\sum_{i=0}^{\infty} R_k^\top(t+i+1)R_k(t+i+1) \leq B_{R_k(t)}^2 \quad (23)$$

$$V(\tilde{x}_k(t|t)) \leq \gamma \quad (23)$$

联立式 (22) 和 (23), 得

$$J_k^\infty(t) \leq \gamma + \varepsilon B_{R_k(t)}^2 \quad (24)$$

也就是说 $J_k^\infty(t)$ 有上界 $\gamma + \varepsilon B_{R_k(t)}^2$, 其中只有 γ 为变量. 因此, 优化问题 (12) 可以改写为以最小化 γ 为优化目标, 以 $F_k(t)$ 为优化变量的典型凸优化问题:

$$\min_{F_k(t)} \max \gamma \quad (25a)$$

满足

$$V(\tilde{x}_k(t|t)) \leq \gamma \quad (25b)$$

$$\Phi < 0 \quad (25c)$$

引理 2. 若优化问题 (25) 在当前时刻可行, 当满足不等式

$$\tilde{x}_k^\top(t|t)P\tilde{x}_k(t|t) + \varepsilon B_{R_k(t)}^2 \leq \gamma \quad (26)$$

时, 由 RMPILC 算法控制的闭环系统是鲁棒稳定的.

证明. 联立式 (14) 及条件 (26), 可得

$$\tilde{x}_k^\top(t+i+1|t)P\tilde{x}_k(t+i+1|t) - \tilde{x}_k^\top(t+i+1|t)P\tilde{x}_k(t+i+1|t) \leq \varepsilon R_k^\top(t+i+1)R_k(t+i+1) \quad (27)$$

将式 (28) 从 $i = 0$ 到 $i = p-1$ ($p \in [1, \infty)$) 进行累加, 可得

$$\tilde{x}_k^\top(t+p|t)P\tilde{x}_k(t+p|t) \leq \tilde{x}_k^\top(t|t)P\tilde{x}_k(t|t) + \varepsilon \sum_{i=0}^{p-1} R_k^\top(t+i+1)R_k(t+i+1) \quad (28)$$

联立式 (23)、(26) 和 (28), 可以推出

$$\tilde{x}_k^\top(t+p|t)P\tilde{x}_k(t+p|t) \leq \gamma \quad (29)$$

因此, 对于任意未来时刻 $t+p$, 其状态 $\tilde{x}_k(t+p|t)$ 属于不变集 $\Omega_{\tilde{x}_k}$:

$$\Omega_{\tilde{x}_k} = \{x|x^\top \gamma^{-1} P x \leq 1\} \quad (30)$$

RMPILC 控制下的闭环系统是鲁棒稳定的. \square

注 3. 若参考输出保持不变, 即 $R_k(t+1) = 0$, 那么 RMPILC 控制下的闭环系统是 Lyapunov 意义下稳定的.

证明. 根据式 (27), 若 $R_k(t+1) = 0$, 能推出

$$\tilde{x}_k^T(t+1|t)P\tilde{x}_k(t+1|t) \leq \tilde{x}_k^T(t)P\tilde{x}_k(t)$$

选择 $V_k(t) = \tilde{x}_k^T(t)P\tilde{x}_k(t)$ 作为 Lyapunov 函数, 可得到 $V_k(t)$ 随时间衰减. 因此, 闭环系统是 Lyapunov 稳定的. \square

2.3 LMI 求解

为获得满足在鲁棒稳定条件 (26) 下优化问题 (25) 的最优解, 将其转化为线性矩阵不等式的形式.

引理 3. 满足约束 (25b)、(25c) 及鲁棒稳定条件 (26) 的状态反馈矩阵 $F_k(t)$ 可通过 $F_k(t) = YQ^{-1}$ 计算得到, 其中 $Q = \gamma P^{-1}$, Y 为下述 LMI 约束下优化问题的解:

$$\min_{Y, Q} \gamma \tag{31a}$$

对所有 $q = 1, 2, \dots, l$, 满足

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * & * & * \\ 0 & -\varepsilon\gamma I & * & * & * \\ \tilde{A}_q Q + \tilde{B}_q Y & \gamma I & -Q & * & * \\ C_\infty Q & 0 & 0 & -\gamma I & * \\ D_\infty Y & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \tag{31b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \varepsilon B_{R_k(t)}^2 & \gamma \varepsilon B_{R_k(t)}^2 & * \\ \tilde{x}_k(t) & 0 & Q \end{bmatrix} \tag{31c}$$

证明. 采用 Schur 补定理^[28], 式 (25c) 等价于

$$\begin{bmatrix} -P & * & * & * & * \\ 0 & -\varepsilon I & * & * & * \\ \tilde{A}_q Q + \tilde{B}_q F_k(t) & I & -P^{-1} & * & * \\ C_\infty & 0 & 0 & -I & * \\ D_\infty & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \tag{32}$$

分别左乘右乘 $\text{diag}\{P^{-1}, I, I, I, I\}$, 得

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & * & * & * & * \\ 0 & -\varepsilon I & * & * & * \\ (\tilde{A}_q Q + \tilde{B}_q F_k(t))P^{-1} & I & -P^{-1} & * & * \\ C_\infty P^{-1} & 0 & 0 & -I & * \\ D_\infty P^{-1} & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \tag{33}$$

将 $P = \gamma Q^{-1}$, $F_k(t) = YQ^{-1}$ 代入式 (33), 式 (31b) 可以被推出.

注意式 (26) 为式 (25b) 的充分条件, 也就是说只需要要满足式 (26), 式 (25b) 也能被满足. 将 $P = \gamma Q^{-1}$ 代入式 (27), 利用 Schur 补定理, 即可得到矩阵不等式 (31c).

根据优化得到的 $F_k(t)$, 通过下式计算控制输入 $u_k(t)$:

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \delta\Delta u_k(t) + \Delta u_k(t-1) + u_{k-1}(t) = \\ &F_k(t)\tilde{x}_k(t|t) + \Delta u_k(t-1) + u_{k-1}(t) = \\ &YQ^{-1}\tilde{x}_k(t|t) + \Delta u_k(t-1) + u_{k-1}(t) \end{aligned} \tag{34}$$

其中, $\Delta u_k(t-1)$ 、 $u_{k-1}(t)$ 为当前批次当前时刻的已知量. $\tilde{x}_k(t|t)$ 等于当前状态 $\tilde{x}_k(t)$.

2.4 控制输入约束

间歇过程中需要考虑的控制输入约束包括 $u_k(t)$ 、 $\Delta u_k(t)$ 和 $\delta u_k(t)$, 通常表述为

$$\begin{cases} \|u_k(t)\|^2 \leq u_h^2 \\ \|\Delta u_k(t)\|^2 \leq \Delta u_h^2 \\ \|\delta u_k(t)\|^2 \leq \delta u_h^2 \end{cases} \tag{35}$$

推导 $u_k(t)$, $\Delta u_k(t)$, $\delta u_k(t)$ 与 $\delta\Delta u_k(t)$ 的关系

$$\begin{cases} u_k(t) = \delta\Delta u_k(t) + \Delta u_k(t-1) + u_{k-1}(t) \\ \Delta u_k(t) = \delta\Delta u_k(t) + \Delta u_k(t-1) \\ \delta u_k(t) = \delta\Delta u_k(t) + \delta u_{k-1}(t) \end{cases} \tag{36}$$

从式 (36) 可以看出, $u_k(t)$, $\Delta u_k(t)$, $\delta u_k(t)$ 都可以表示成 $\delta\Delta u_k(t)$ 与其他已知量的和的形式. 将其表述为以下通式

$$u_c = H\delta\Delta u_k(t) + u_m \tag{37}$$

其中, u_c 是被约束量, u_m 是已知量, H 是用于选择 $\delta\Delta u_k(t)$ 中某一控制输入的向量.

式 (35) 中的约束条件可以统一表述为

$$\|u_c\|^2 \leq \mu^2 \tag{38}$$

其中, μ 代表约束上界.

结合式 (37), 对不等式 (38) 进行放缩

$$\begin{aligned} \|u_c\|^2 &= \|H\delta\Delta u_k(t) + u_m\|^2 = \\ &\|H\delta\Delta u_k(t)\|^2 + 2u_m H\delta\Delta u_k(t) + \\ &u_m^2 \leq \|HYQ^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\tilde{x}_k(t|t)\|^2 + \\ &2u_m YQ^{-1}\tilde{x}_k(t|t) + u_m^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|HYQ^{-\frac{1}{2}}\|^2 + 2u_m YQ^{-1}\tilde{x}_k(t|t) + u_m^2 = \\ & \|HYQ^{-\frac{1}{2}} + u_m\tilde{x}_k(t|t)^T Q^{-\frac{1}{2}}\|^2 + u_m^2 - \\ & \|u_m Q^{-\frac{1}{2}}\tilde{x}_k(t|t)\|^2 = \\ & \|HYQ^{-\frac{1}{2}} + u_m\tilde{x}_k(t|t)^T Q^{-\frac{1}{2}}\|^2 + \\ & u_m^2(1 - \beta) \leq \mu^2 \end{aligned} \quad (39)$$

其中, $0 \leq \beta = \tilde{x}_k^T(t|t)Q^{-1}\tilde{x}_k(t|t)$. 由式 (29) 可知, $\tilde{x}_k^T(t|t)Q^{-1}\tilde{x}_k(t|t) \leq 1$. 因此 $\beta \in [0, 1]$. 则式 (39) 可以写成以下线性矩阵不等式形式:

$$\begin{bmatrix} \mu^2 - u_m^2(1 - \beta) & * \\ Y^T H^T + u_m\tilde{x}_k(t|t) & Q \end{bmatrix} \quad (40)$$

因此控制输入约束下的鲁棒迭代预测控制优化问题可以描述为:

$$\min_{Y, Q} \gamma \quad (41)$$

满足式 (31b), 式 (31c), 式 (40).

3 收敛性分析

MPILC 控制系统的收敛性指的是当迭代次数趋近于无穷时, 跟踪误差收敛到零, 即对于任意 $t \in [0, N]$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $e_k(t) \rightarrow 0$. 文献 [29] 在 $x_{k-1}(N) = x_k(0)$ 的前提下, 证明了经典 MPILC 算法的收敛性. 而近年研究中, 设计附加条件使 $\|e_{k+1}(t)\| \leq a\|e_k(t)\|$ ($0 < a < 1$) 成为保证收敛性更为常用的方法^[9, 11]. 在本文提出的 RMPILC 算法中, 基于包含参考轨迹变化量的 LPV 模型 (7), $\|e_{k+1}(t)\| \leq a\|e_k(t)\|$ 可以转化为有关增广状态 $\tilde{x}_k(t) = [\tilde{e}_k(t)^T \delta\tilde{x}_k(t)^T]^T$ 的约束, 将其加入到实时优化中, 就可以保证原非线性系统在 RMPILC 控制下沿迭代轴的收敛性.

首先, 提出以下符合实际过程情况的假设:

- 1) 优化问题 (31) 在初始时刻可行;
- 2) 对于 $t \in [0, N - 1]$, 存在满足约束式 (31b), 式 (31c), 式 (40) 的控制序列 $u_k(t)$ 令跟踪误差 $e_k(t+1)$ 等于 0;
- 3) 在 t 时刻, 已知 $t+1$ 时刻的参考轨迹变化量.

定理 1. 若在每个采样时刻的优化中, 对于 $q = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, n_y$ 满足 LMI 约束

$$\begin{bmatrix} a^2 e_{k-1}^j(t+1)^2 - (1 + R_k^T(t+1)) \times & * \\ R_k(t+1)L_j L_j^T & \\ Q\tilde{A}_q L_j^T + Y^T \tilde{B}_q^T L_j^T & \frac{Q}{1 + R_k^T(t+1)R_k(t+1)} \end{bmatrix} \quad (42)$$

那么 RMPILC 控制下的跟踪误差沿迭代轴收敛到零. 其中 $e_{k-1}^j(t)$ 表示向量 $e_{k-1}(t)$ 的第 j 个元素, L_j 是用于选择向量 $\tilde{e}_k(t)$ 第 j 个元素的给定向量.

证明. 在当前时刻 t , 为保证下一时刻的跟踪误差沿迭代轴收敛, 即 $\|e_{k+1}(t)\| \leq a\|e_k(t)\|$, 应满足以下不等式条件:

$$|e_k^j(t+1)| < a|e_{k-1}^j(t+1)| \quad (43)$$

其中, $j = 1, 2, \dots, n_y$.

根据式 (5) 有

$$e_k^j(t) = e_{k-1}^j(t) + \Delta e_k(t) \quad (44)$$

联立式 (5) 和 (6) 得

$$\Delta e_k^j(t+1) = -e_k^j(t+1) - \tilde{e}_k^j(t+1) \quad (45)$$

联立式 (43)、(44) 和 (45) 可以得到

$$|\tilde{e}_k^j(t+1)| < a|e_{k-1}^j(t+1)| \quad (46)$$

为不等式 (43) 的充分条件. (46) 可以转化为系统 (7) 的状态约束:

$$\tilde{x}_k^T(t+1)L_j^T L_j \tilde{x}_k(t+1) < a^2 e_{k-1}^j(t+1)^2 \quad (47)$$

为了得到式 (47) 的 LMI 表述, 进行以下推导^[30]:

$$\begin{aligned} & \tilde{x}_k^T(t+1)L_j^T L_j \tilde{x}_k(t+1) < a^2 e_{k-1}^j(t+1)^2 = \\ & ((\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))\tilde{x}_k(t) + R_k(t+1))^T L_j^T L_j \times \\ & ((\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))\tilde{x}_k(t) + R_k(t+1)) = \\ & \begin{bmatrix} Q^{-\frac{1}{2}}\tilde{x}_k(t) \\ R_k(t+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))^T \\ I \end{bmatrix} L_j^T L_j \times \\ & \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))^T \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-\frac{1}{2}}\tilde{x}_k(t) \\ R_k(t+1) \end{bmatrix} < \\ & (1 + R_k(t+1))^T R_k(t+1) \times \\ & \lambda_{\max} \left(L_j \begin{bmatrix} Q(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))^T \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} Q(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))^T \\ I \end{bmatrix} L_j^T \right) \end{aligned} \quad (48)$$

联立式 (47) 和式 (48) 可得

$$\begin{aligned} & a^2 e_{k-1}^j(t+1)^2 - (1 + R_k^T(t+1)R_k(t+1)) \times \\ & \left(L_j \begin{bmatrix} Q(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))^T \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} Q(\tilde{A} + \tilde{B}F_k(t))^T \\ I \end{bmatrix} L_j^T \right) > 0 \end{aligned} \quad (49)$$

根据 Schur 补定理, 式 (49) 等价于式 (42). 因此, 如果在每次优化中满足 LMI (42), 那么有 $|e_k^j(t+1)| < a|e_{k-1}^j(t+1)|$, 即 $\|e_{k+1}(t)\| \leq a\|e_k(t)\|$. 所以, 对于任意 $t \in [0, N]$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $e_k(t) \rightarrow 0$. \square

4 仿真研究

本节设计两组仿真实验以验证所提出的 RMPILC 在处理变轨迹跟踪问题方面的有效性. 仿真 1 针对非线性数值系统, 侧重于对算法的理论分析和验证; 仿真 2 针对典型的间歇 CSTR 系统, 侧重于对 RMPILC 的实际应用效果检验. 为进行对比, 同时设计经典 MPILC 算法的仿真实验, 其预测模型为:

$$e_k(t+m|t) = e_k(t|t) - G^m(t)\Delta u_k^m(t) \quad (50)$$

其中, m 代表预测时域和控制时域大小, $e_k \in \mathbf{R}^{(n_y \times N) \times 1}$,

$$\Delta u_k^m(t) = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T(t) & \cdots & \Delta u_k^T(t+m-1) \end{bmatrix}^T$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{1,0} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{2,0} & g_{2,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \underbrace{g_{N,0}}_{G(0)} & \underbrace{\cdots}_{G(1)} & \cdots & \underbrace{g_{N,N-1}}_{G(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$G^m(t) = \begin{bmatrix} G(t) & \cdots & G(t+m-1) \end{bmatrix}$$

$g_{i,j} \in \mathbf{R}^{n_y(i) \times n_u(j)}$ 为 j 时刻施加的单位脉冲信号输入在 i 时刻的脉冲响应矩阵. 通常矩阵 G 可以通过沿参考轨迹进行线性化得到. 经典 MPILC 算法的目标函数为:

$$J_{\text{MPILC}}^k(t) = \frac{1}{2} \{ \|e_k(t+m|t)\|_{Q_1} + \|\Delta u_k^m\|_{R_1} \} \quad (51)$$

其中, Q_1 和 R_1 为权重系数矩阵.

4.1 仿真 1

考虑如下非线性数值系统

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.125 \\ 0.125 & -0.65 + 0.15 \sin x_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.07 \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (52)$$

控制输入约束为

$$\|u_k(t)\|^2 \leq 8^2, \|\Delta u_k(t)\|^2 \leq 0.6^2, \|\delta u_k(t)\|^2 \leq 1^2 \quad (53)$$

由于 $-1 \leq \sin x_1 \leq 1$ 恒成立, 选择 $\theta_1 = \frac{\sin x_1 - (-1)}{1 - (-1)}$, $\theta_1 = \frac{1 - \sin x_1}{1 - (-1)}$, 非线性系统 (52) 就可以被如式 (2) 的 LPV 模型包含, 其中 $l = 2$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.125 \\ 0.125 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.125 \\ 0.125 & -0.8 \end{bmatrix}$$

根据式 (7), 可以得到

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.125 & 0 \\ 0 & -0.125 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.125 & 0 \\ 0 & -0.125 & -0.8 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix}$$

仿真设置两种参考轨迹如图 1 所示. 第 1 批次到第 4 批次的目标参考轨迹为 y_{r_1} ; 从第 5 批次开始, 目标参考轨迹变为 y_{r_2} . 仿真时间为 10 分钟, 采样时间为 0.025 分钟. 批次长度为 400. 第 1 批次的控制输入为零向量. H_∞ 性能上界 ε 设为 10. 初始状态为 $x(0) = [0, 0]^T$. 收敛条件 (42) 作为每次优化的约束, 保证跟踪误差的收敛性, 其中 $a = 0.9$. 权重矩阵取为

$$C_\infty = \begin{bmatrix} \text{diag}\{1, 0, 0, 0\} \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} \end{bmatrix}$$

$$D_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0002 \end{bmatrix}^T$$

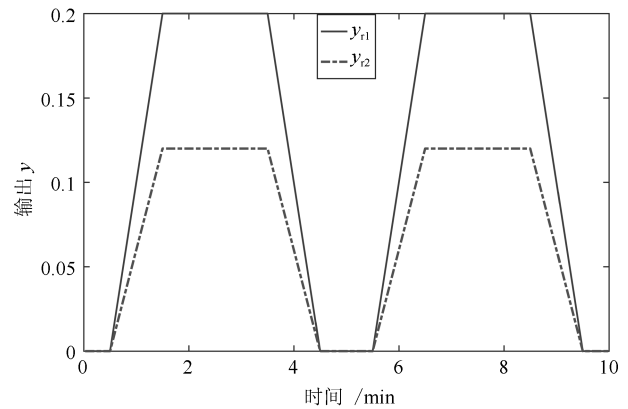


图 1 参考轨迹 y_{r_1}, y_{r_2}

Fig. 1 The reference trajectories y_{r_1}, y_{r_2}

在每个采样时刻, 通过求解约束 (42) 下的 LMI 优化问题 (41) 得到变量 Y, Q , 继而通过式 $F_k(t) = YQ^{-1}$ 计算当前时刻的状态反馈矩阵 $F_k(t)$. 仿真分析中选择参考轨迹转折点第 61 个采样时刻来比较变轨迹前后的状态反馈矩阵变化, 其结果如表 1 所示. 图 2 和 3 为 RMPILC 的跟踪曲线及对应的控制输入曲线.

在经典 MPILC 仿真中, 设置 $Q_1 = I_{400 \times 400}$, $R_1 = 0.00015I_{20 \times 20}$, $m = 20$. 其跟踪曲线如图 4 所示.

表 1 $F_k(t)$ 优化值

Table 1 Optimized feedback control law

批次 (k)	$F_k(61)$
2	[-46.7539 -24.0899 -5.0529 0.0000]
3	[-42.9654 -25.0475 -3.7597 0.0000]
4	[-57.4573 -29.2520 -5.4621 -0.0000]
5	[-16.9782 -7.8604 -1.2311 -0.0000]
6	[-37.0429 -26.9746 -3.0976 0.0000]
7	[-41.3123 -27.2625 -2.9534 -0.0000]
8	[-54.1913 -32.1226 -4.9777 0.0000]

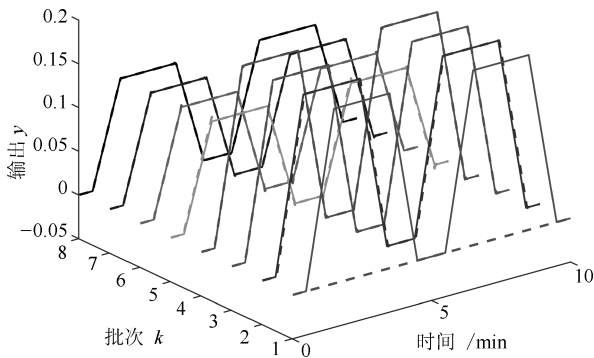


图 2 RMPILC 控制下参考轨迹跟踪曲线

Fig. 2 The tracking trajectories under RMPILC

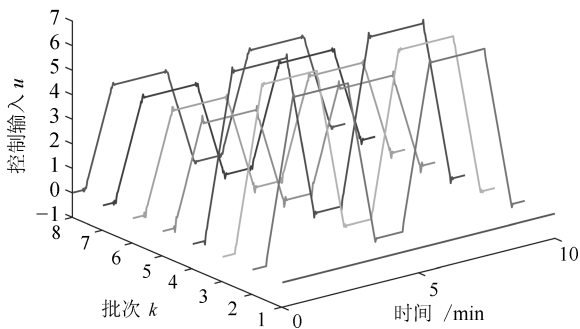


图 3 RMPILC 控制下控制输入轨迹

Fig. 3 The control input trajectory under RMPILC

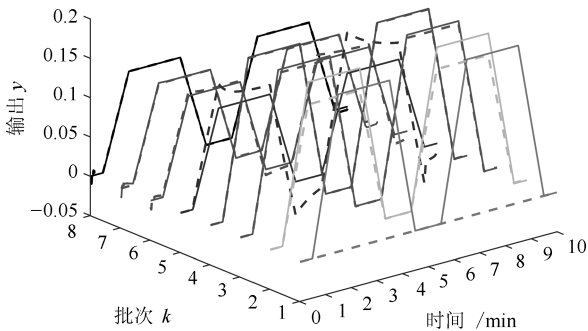


图 4 MPILC 控制下参考轨迹跟踪曲线

Fig. 4 The tracking trajectories under MPILC

比较图 2 和图 4, 在参考轨迹保持不变的第

1~第 4 批次, RMPILC 从第 2 批次就能够精确跟踪 y_{r1} , 而 MPILC 直到第 4 批次才能较好地跟踪 y_{r1} . 这是因为 RMPILC 采用了 LPV 模型来描述原系统的非线性特性, 避免出现模型失配问题, 从而获得了更快的收敛速度; 在参考轨迹变为 y_{r2} 的第 5~第 8 批次, RMPILC 能快速跟踪 y_{r2} , 而 MPILC 难以及时适应变参考轨迹, 需要经过几次迭代才能达到较好的跟踪效果. 因而, RMPILC 采用 H_∞ 控制有效抑制了变参考轨迹的影响.

图 5 为 RMPILC 和经典 MPILC 控制下各批次跟踪误差均方差 (Main square error, MSE) 的变化情况. RMPILC 控制下 MSE 沿迭代轴收敛到零, 且在参考轨迹变化的第 5 批次, 没有明显波动, 保持收敛趋势, 而 MPILC 控制下 MSE 出现较大波动. 这证明了 RMPILC 在变参考轨迹下能够保证跟踪误差沿迭代轴收敛.

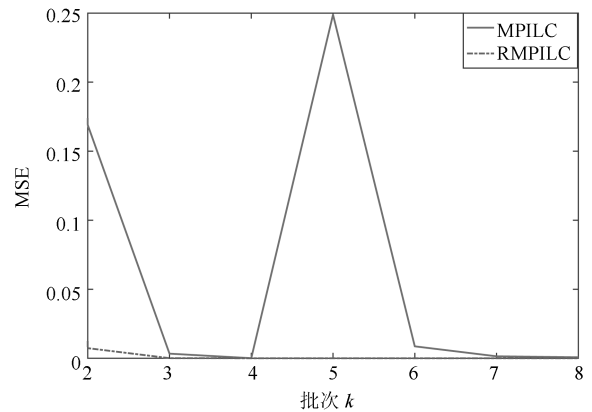


图 5 MPILC 和 RMPILC 控制下 MSE 随批次变化情况

Fig. 5 The MSE along batches under MPILC and RMPILC

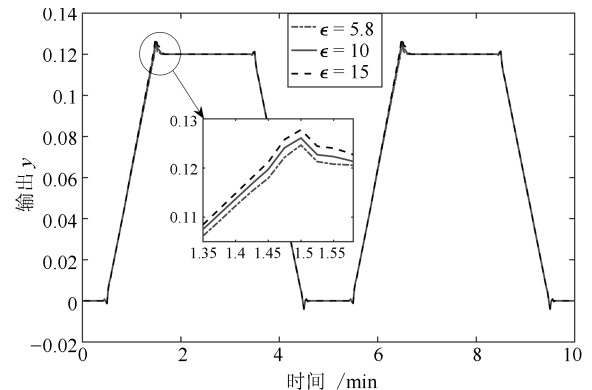


图 6 RMPILC 控制下第 5 批次当 $\epsilon = 5.8$, $\epsilon = 10$ 和 $\epsilon = 15$ 时的跟踪曲线

Fig. 6 The tracking trajectories in the fifth batch when $\epsilon = 5.8, 10, 15$

RMPILC 的控制性能与参考轨迹变化程度以及 H_∞ 性能上界 ϵ 的大小有较大关系. 由式 (11) 可

知, ε 越小越有利于增强抗干扰能力. 而式 (26) 表明 ε 减小将导致可行域的缩小. 当可行域缩小到不能包含当前状态时, 优化问题将无解. 因此, 在选择 ε 时, 要根据实际需要权衡变轨迹适应能力和可行性问题. 对于系统 (52) 能够保证可行性的最小 ε 值为 5.8. 图 6 为参考轨迹发生变化的第 5 批次中, RMPILC 在 $\varepsilon = 5.8$ 、 $\varepsilon = 10$ 和 $\varepsilon = 15$ 时的跟踪情况, 表明随着 ε 增大, RMPILC 跟踪性能下降. 图 7 为 $x(0) = [0.01, 0.05]^T$, ε 分别取值 5.8、10 和 15 时不变集 $\Omega_{\bar{x}_k} = \{x|x^T Q^{-1}x \leq 1\}$ 在原状态空间的象集. 由于不变集的大小能够反映可行域的大小, 因此图 7 表明初始可行域随 ε 减小而缩小.

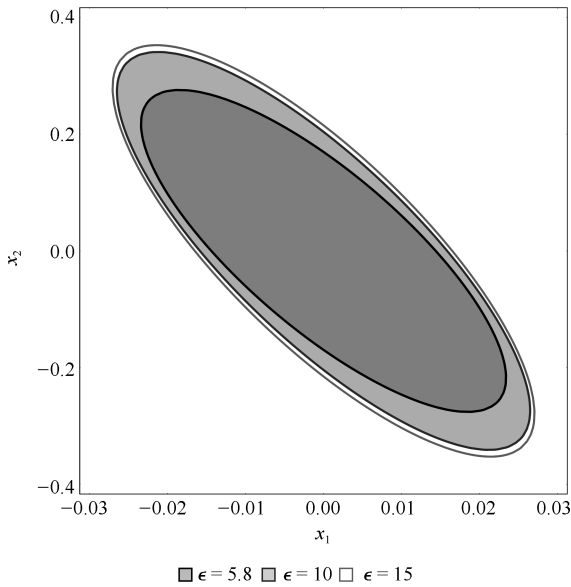


图 7 RMPILC 控制下 $\varepsilon = 5.8$ 、 $\varepsilon = 10$ 和 $\varepsilon = 15$ 时的不变集 $\Omega_{\bar{x}_k}$ 在原状态空间的象集

Fig. 7 The image set of $\Omega_{\bar{x}_k}$ when $\varepsilon = 5.8, 10, 15$

4.2 仿真 2: CSTR 系统

连续搅拌反应釜系统中进行恒定体积、放热、不可逆化学反应 $A \rightarrow B$. 其控制任务为重复跟踪给定的反应温度轨迹, 且生成物 B 的产品质量很大程度依赖于跟踪精度. 因此, 采用 MPILC 方法控制 CSTR 系统能适应其生产过程的重复性, 并且提高产品质量.

CSTR 系统具有以下非线性微分方程描述^[31]:

$$\begin{cases} \dot{C}_A = \frac{q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) C_A \\ \dot{T} = \frac{q}{V}(T_f - T) + \frac{-\Delta H}{\rho C_p} k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) C_A + \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T) \end{cases} \quad (54)$$

其中, 反应温度 T (K) 为被控量, 冷却剂温度 T_c (K) 为控制输入. 其他参数的物理意义和取值见文献 [31].

在间歇反应器控制中, 反应温度 T 的参考轨迹可能会由于调整进料浓度 C_A 、启动速度、批次时间长度等发生变化. 为了验证 RMPILC 在适应频繁变化的参考轨迹的能力, 在仿真中设置三种不同的参考轨迹, 如图 8 所示, 包括常规轨迹 y_{r1} 、慢启动轨迹 y_{r2} 以及快启动轨迹 y_{r3} . y_{r3} 中 T 上升较快, 有利于提高产量; y_{r2} 中 T 上升较慢, 后续反应更加平稳, 易于控制. 在实际生产中可以根据不同的生产需求选择不同的参考轨迹.

根据文献 [32] 介绍的替换法, 非线性系统 (54) 可以表述为如式 (2) 的 LPV 模型, 过程如下:

首先, 计算系统 (54) 的平衡点:

$$\{C_A^{eq}, T_c^{eq}, T^{eq}\} = \{0.5 \text{ mol}, 350 \text{ K}, 338 \text{ K}\}$$

定义状态变量 $[x_1, x_2]^T = [C_A - C_A^{eq}, T - T^{eq}]$, 输入变量 $u = T_c - T_c^{eq}$, 输出变量 $y = x_2$. 系统 (54) 能写成以下的状态方程形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{q}{V}(C_{Af} - x_1 - C_A^{eq}) - k_0 \exp\left(\frac{-E}{R(x_2 + T^{eq})}\right) (x_1 + C_A^{eq}) \\ \frac{q}{V}(T_f - x_2 - T^{eq}) + \frac{-\Delta H}{\rho C_p} \times k_0 \exp\left(\frac{-E}{R(x_2 + T^{eq})}\right) \times (x_1 + C_A^{eq}) + \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - x_2 - T^{eq}) \end{bmatrix} \\ y = x_2 \end{cases} \quad (55)$$

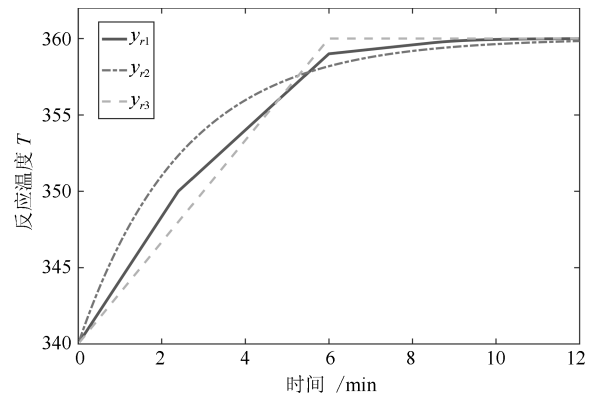


图 8 CSTR 反应温度 T 参考轨迹

Fig. 8 The reference trajectories of CSTR reaction temperature T

在给定的输出参考轨迹中, 反应温度满足 $\underline{T} \leq T \leq \bar{T}$, 也就是 $\underline{T} - T^{eq} \leq x_2 < \bar{T} - T^{eq}$. 设

$$\underline{x} = \underline{T} - T^{eq}, \bar{x} = \bar{T} - T^{eq}$$

定义

$$\varphi_1(x_2) = k_0 \exp\left(\frac{-E}{R(x_2 + T^{eq})}\right)$$

$$\varphi_2(x_2) = k_0 \left(\exp\left(\frac{-E}{R(x_2 + T^{eq})}\right) - \exp\left(\frac{-E}{RT^{eq}}\right) \right) C_A^{eq} \frac{1}{x_2}$$

$$\nu_1(x_2) = \varphi_1(x_2) - \frac{1}{2}(\varphi_1(x_2) + \varphi_1(\bar{x}_2))$$

$$\nu_2(x_2) = \varphi_2(x_2) - \frac{1}{2}(\varphi_2(x_2) + \varphi_2(\bar{x}_2))$$

选择 LPV 模型 (2) 中的参数 θ 为

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{\nu_1(x_2) - \nu_1(\bar{x}_2)}{\nu_1(\bar{x}_2) - \nu_1(x_2)}, \theta_2 = \frac{1}{2} \frac{\nu_1(\bar{x}_2) - \nu_1(x_2)}{\nu_1(\bar{x}_2) - \nu_1(x_2)}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{\nu_2(x_2) - \nu_2(\bar{x}_2)}{\nu_2(\bar{x}_2) - \nu_2(x_2)}, \theta_2 = \frac{1}{2} \frac{\nu_2(\bar{x}_2) - \nu_2(x_2)}{\nu_2(\bar{x}_2) - \nu_2(x_2)}$$

那么系统 (55) 可以由如式 (2) 的 LPV 模型描述, 其多胞形的各顶点为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8227 & -0.00168 \\ 6.1233 & 0.9367 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.9654 & -0.00182 \\ -0.6759 & 0.9433 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.8895 & -0.00294 \\ 2.9447 & 0.9968 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.8930 & -0.00062 \\ 2.7738 & 0.8864 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.000092 \\ 0.1014 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0.000097 \\ 0.1016 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -0.000157 \\ 0.1045 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} -0.000034 \\ 0.0986 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

仿真基于 LPV 模型设计控制律, 并将优化得到的控制输入施加都原非线性系统 (54) 中.

控制输入 T_c 的约束如下:

$$\|T_c\|^2 \leq 350^2, \|\Delta T_c\|^2 \leq 5^2, \|\delta T_c\|^2 \leq 2.5^2 \quad (56)$$

仿真时间为 12 分钟 (min), 采样时间为 0.03 分钟 (min), 批次长度为 400. 设置初始参考轨迹为 y_{r1} , 在第 6 批次、第 7 批次分别变为 y_{r2} 、 y_{r3} , 在第 8 批次变回 y_{r1} . 批次 1 的初始控制输入为幅度为 330 K 的阶跃信号. 初始状态为 $[C_A, T]^T = [0.7 \text{ mol/L}, 340 \text{ K}]^T$. H_∞ 性能上界选为 $\varepsilon = 20$. 权重系数矩阵选取同仿真 1. 同样地, 收敛条件 (42) 在每次优化中作为约束 ($a = 0.9$), 状态反馈矩阵 $F_k(t)$ 由 $F_k(t) = YQ^{-1}$ 计算得到, 各批次 $F_k(200)$ 的优

化值如表 2 所示.

表 2 $F_k(t)$ 优化值
Table 2 Optimized feedback control law

批次 k	$F_k(200)$			
2	[-7.8076	-12.6079	-7.9428	-0.0000]
3	[-8.4202	-12.9000	-8.2264	-0.0000]
4	[-7.8744	-12.6839	-7.9521	-0.0000]
5	[-8.9258	-13.1178	-8.4572	-0.0000]
6	[-9.7286	-13.2893	-9.0092	0.0000]
7	[-6.9490	-11.3713	-7.6883	0.0000]
8	[-7.5195	-12.4532	-8.0074	-0.0000]
9	[-7.7803	-12.6691	-7.9535	-0.0000]

在经典 MPILC 仿真中, 设置 $m = 10$, $Q_1 = I_{400 \times 400}$, $R_1 = I_{10 \times 10}$. 图 9 和图 11 为 RMPILC 和 MPILC 控制下的跟踪曲线. 相应的 RMPILC 控制输入如图 10 所示. 可以看出 RMPILC 从第 2 批次开始就可以准确跟踪 y_{r1} , 且在批次 6~8 能够及时跟踪变化轨迹. 而 MPILC 直至批次 5 才能跟踪上

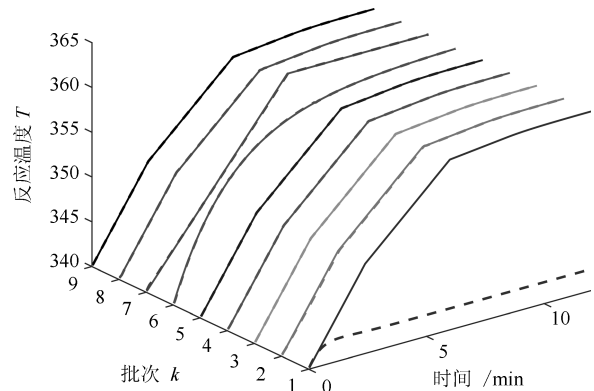


图 9 RMPILC 控制下反应温度 T 参考轨迹跟踪曲线
Fig. 9 The tracking trajectories for T under RMPILC control

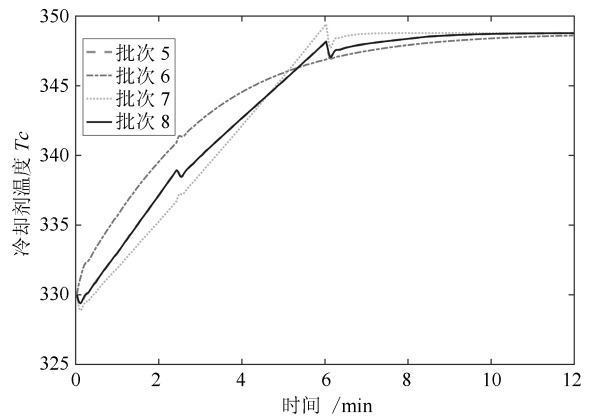


图 10 RMPILC 控制下控制输入 T_c 轨迹
Fig. 10 The trajectories of control input T_c under RMPILC

y_{r_1} , 且在批次 6~8 不能适应参考轨迹变化. 因此与经典 MPILC 相比, 基于 LPV 模型的 RMPILC 快速跟踪变参考轨迹, 有利于提高 CSTR 的生产效率.

图 12 为变轨迹下 RMPILC 和 MPILC 仿真中 MSE 随迭代次数的变化情况. 显然, 变参考轨迹下 RMPILC 的跟踪误差沿迭代轴收敛, 而 MPILC 的跟踪误差发生较大波动, 会导致产品质量下降.

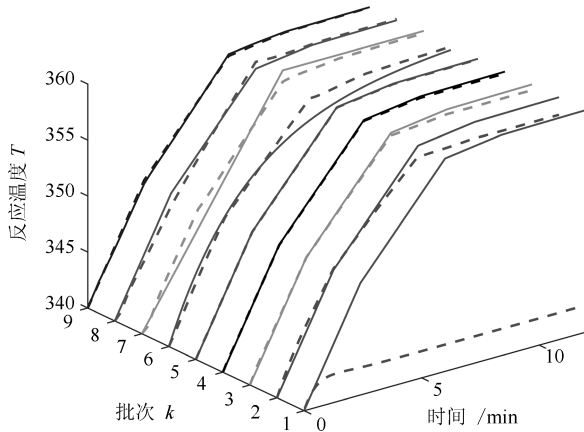


图 11 MPILC 控制下反应温度跟踪曲线

Fig. 11 The tracking trajectories for T under MPILC

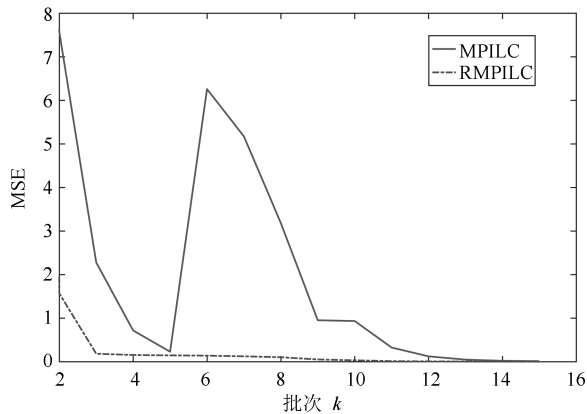


图 12 RMPILC、MPILC 控制下 MSE 随批次变化情况
Fig. 12 The MSE along batches under RMPILC and MPILC

5 结束语

本文针对具有重复特性的非线性间歇过程, 提出一种能跟踪变参考轨迹的鲁棒迭代学习模型预测控制. 控制器设计基于包含被控系统非线性动态特性的 LPV 模型, 将 LPV 模型进行状态增广建立二维迭代误差模型. 在鲁棒 H_∞ 预测控制框架下, 设置 H_∞ 性能上界, 并据此构建 LMI 约束下的目标函数优化问题. 分析 RMPILC 系统的鲁棒稳定性和迭代收敛性, 将其充分条件作为约束加入每个采样时刻的优化中. 仿真结果验证了 RMPILC 在快速跟踪变参考轨迹方面的优势, 表明采用基于 LPV 模型

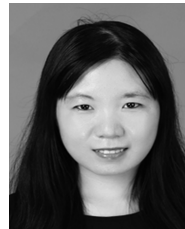
的 RMPILC 算法能显著减少迭代学习次数, 提高生产效率.

在实际生产中, 间歇过程的参考轨迹可能会发生剧烈变化. 若要保证鲁棒稳定条件和迭代收敛条件, 可能会导致优化问题不可行, 或是可行域太小以至达不到期望的跟踪精度. 因此, 未来的研究方向趋向于构建软约束 RMPILC 算法. 在优化中引入松弛变量来放松约束, 允许控制输入在短时间内超出约束以达到扩大可行域的目的^[33]. 基于软约束的 RMPILC 算法将能够适应剧烈变化的参考轨迹, 提高间歇过程控制的鲁棒性.

References

- Lu Ning-Yun, Wang Fu-Li, Gao Fu-Rong, Wang Shu. Statistical modeling and online monitoring for batch processes. *Acta Automatic Sinica*, 2006, **32**(3): 400–410 (陆宁云, 王福利, 高福荣, 王姝. 间歇过程的统计建模与在线监测. *自动化学报*, 2006, **32**(3): 400–410)
- Zhao Chun-Hui, Wang Fu-Li, Yao Yuan, Gao Fu-Rong. Phase-based statistical modeling, online monitoring and quality prediction for batch processes. *Acta Automatic Sinica*, 2010, **36**(3): 366–374 (赵春晖, 王福利, 姚远, 高福荣. 基于时段的间歇过程统计建模、在线监测及质量预报. *自动化学报*, 2010, **36**(3): 366–374)
- Chi Rong-Hu, Hou Zhong-Sheng, Huang Biao. Optimal iterative learning control of batch processes: from model-based to data-driven. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(6): 917–932 (池荣虎, 侯忠生, 黄彪. 间歇过程最优迭代学习控制的发展: 从基于模型到数据驱动. *自动化学报*, 2017, **43**(6): 917–932)
- Xi Yu-Geng, Li De-Wei, Lin Shu. Model predictive control — status and challenges. *Acta Automatic Sinica*, 2013, **39**(3): 221–236 (席裕庚, 李德伟, 林姝. 模型预测控制 — 现状与挑战. *自动化学报*, 2013, **39**(3): 221–236)
- Chai Tian-You, Li Shao-Yuan, Wang Hong. Networked cooperative modeling and control for complex industrial process. *Acta Automatic Sinica*, 2013, **39**(5): 469–470 (柴天佑, 李少远, 王宏. 网络信息模式下复杂工业过程建模与控制. *自动化学报*, 2013, **39**(5): 469–470)
- Kong Xiao-Bing, Liu Xiang-Jie. Nonlinear model predictive control for DFIG-based wind power generation. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 636–643 (孔小兵, 刘向杰. 双馈风力发电机非线性模型预测控制. *自动化学报*, 2013, **39**(5): 636–643)
- Shen C, Shi Y, Buckham B. Trajectory tracking control of an autonomous underwater vehicle using Lyapunov-based model predictive control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, **65**(7): 5796–5805
- Bone G M. A novel iterative learning control formulation of generalized predictive control. *Automatica*, 1995, **31**(10): 1483–1487
- Shi J, Zhou H, Cao Z, Jiang Q. A design method for indirect iterative learning control based on two-dimensional generalized predictive control algorithm. *Journal of Process Control*, 2014, **24**(10): 1527–1537
- Lee K S, Chin I S, Lee H J, J. H. Lee. Model predictive control technique combined with iterative learning for batch processes. *Aiche Journal*, 1999, **45**(10): 2175–2187

- 11 Oh S K, Lee J M. Iterative learning model predictive control for constrained multivariable control of batch processes. *Computers & Chemical Engineering*, 2016, **93**(4): 284–292
- 12 Oh S K, Lee J M. Iterative learning control integrated with model predictive control for real-time disturbance rejection of batch processes. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 2017, **50**(6): 415–421
- 13 Lu J, Cao Z, Wang Z, Gao F. A two-stage design of two-dimensional model predictive iterative learning control for non-repetitive disturbance attenuation. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2015, **54**(21): 5683–5689
- 14 Chu B, Owens D H, Freeman C T. Iterative learning control with predictive trial information: convergence, robustness, and experimental verification. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2016, **24**(3): 1101–1108
- 15 Wu S, Jin Q, Zhang R, Zhang J, Gao F. Improved design of constrained model predictive tracking control for batch processes against unknown uncertainties. *ISA Transactions*, 2017, **69**: 273–280
- 16 Liu X, Kong X. Nonlinear fuzzy model predictive iterative learning control for drum-type boiler-turbine system. *Journal of Process Control*, 2013, **49**: 26–35
- 17 Jia L, Han C, Chiu M S. Dynamic R-parameter based integrated model predictive iterative learning control for batch processes. *Journal of Process Control*, 2017, **49**: 26–35
- 18 Yu Q, Hou Z. Data-driven predictive iterative learning control for a class of multiple-input and multiple-output nonlinear systems. *Transactions of the Institute of Measurement & Control*, 2016, **38**(3): 266
- 19 Hu Chao-Fang, Xie Qian-Qian. Sum of squares-robust model predictive controller for nonlinear system with input saturation. *Control Theory & Applications*, 2016, **33**(3): 321–328
(胡超芳, 解倩倩. 非线性系统有输入饱和时基于平方和的鲁棒模型预测控制器. 控制理论与应用, 2016, **33**(3): 321–328)
- 20 Zhao Min, Li Shao-Yuan. Switching robust model predictive control strategy for constrained nonlinear system. *Control Theory & Applications*, 2010, **27**(4): 495–500
(赵敏, 李少远. 约束非线性系统切换鲁棒预测控制. 控制理论与应用, 2010, **27**(4): 495–500)
- 21 Oh S K, Lee J M. Stochastic iterative learning control for discrete linear time-invariant system with batch-varying reference trajectories. *Journal of Process Control*, 2015, **36**: 64–78
- 22 Xiao T F, Li X D, Ho J K L. An adaptive discrete-time ILC strategy using fuzzy systems for iteration-varying reference trajectory tracking. *International Journal of Control Automation & Systems*, 2015, **13**(1): 222–230
- 23 Chi R, Hou Z, Jin S. A data-driven adaptive ILC for a class of nonlinear discrete-time systems with random initial states and iteration-varying target trajectory. *Journal of Franklin Institute*, 2015, **352**(6): 2407–2424
- 24 Huang He, Li De-Wei, Xi Yu-Geng. On design of mixed H_2/H_∞ RMPC based on multi-step control strategy. *Acta Automatic Sinica*, 2012, **38**(6): 944–950
(黄鹤, 李德伟, 席裕庚. 基于多步控制策略的混合 H_2/H_∞ 鲁棒预测控制器设计. 自动化学报, 2012, **38**(6): 944–950)
- 25 Wang You-Qin, Zhao Zhong-Gai, Liu Fei. A multi-batch fusion linear parameter varying modeling method for batch process. *Information and Control*, 2017, **46**(1): 46–52
(王幼琴, 赵忠盖, 刘飞. 一种间歇过程多批次融合线性变参数建模方法. 信息与控制, 2017, **46**(1): 46–52)
- 26 Li W. Research and application of robust gain-scheduling based on LPV System [Ph.D. dissertation], National University of Defense Technology, 2009
- 27 Sun Hai-Qiao, Chen Jun, Liu Fei. Robust predictive and iterative learning control as applied to batch process. *Information and Control*, 2015, **44**(2): 129–134
(孙海乔, 陈琨, 刘飞. 鲁棒预测迭代学习控制在间歇过程中的运用. 信息与控制, 2015, **44**(2): 129–134)
- 28 Ouellett D V. Schur complement and statistics. *Linear Algebra & Its Applications*, 1981, **36**: 187–295
- 29 Lee K S, Lee J H. Convergence of constrained model-based predictive control for batch processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(10): 1928–1932
- 30 Orukpe P E, Jaimoukha I M, El-Zobaidi H M H. Model predictive control based on mixed control approach. In: Proceedings of American Control Conference. New York, USA: IEEE, 2007. 6147–6150
- 31 Magni L, Nicolao G D, Magnani L, Scattolini R. A stabilizing model-based predictive control for nonlinear systems. *Automatica*, 2001, **37**(9): 1351–1362
- 32 Ding B, Xie L, Cai W. Robust MPC for polytopic uncertain systems with time-varying delays. *International Journal of Control*, 2008, **81**(8): 1239–1252
- 33 Jiang Di, Liu Xiang-Jie. Soft Constrained MPC on water level control in steam generator of a nuclear power plant. *Acta Automatic Sinica*, 2019, **45**(6): 1111–1121
(姜崧, 刘向杰. 核电站蒸汽发生器水位的软约束预测控制. 自动化学报, 2019, **45**(6): 1111–1121)



马乐乐 华北电力大学控制与计算机工程学院博士研究生. 2016 年获得华北电力大学自动化专业学士学位. 主要研究方向为预测控制及其应用.

E-mail: 1172127008@ncepu.edu.cn

(**MA Le-Le** Ph.D. candidate at the School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power

University. She received her bachelor degree in automation from North China Electric Power University in 2016. Her research interest covers predictive control and its application.)



刘向杰 华北电力大学控制与计算机工程学院教授. 1989 年获得东北大学工业电气自动化专业学士学位. 1997 年获得东北大学自动化研究中心博士学位. 主要研究方向为先进控制策略在电力过程控制中的应用. 本文通信作者.

E-mail: liuxj@ncepu.edu.cn

(**LIU Xiang-Jie** Professor at the School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University. He received his bachelor degree in industrial electronic automation from Northeastern University in 1989, and the Ph.D. degree from the Research Center of Automation, Northeastern University in 1997. His research interest covers application of advanced control strategy in power process control. Corresponding author of this paper.)