

## 基于稀疏梯度场的非局部图像去噪算法

张瑞<sup>1</sup> 冯象初<sup>1</sup> 王斯琪<sup>1</sup> 常莉红<sup>1</sup>

**摘要** 非局部平均 (Non-local means, NLM) 算法充分利用图像的自相似性与结构信息的冗余性, 取得了很好的去噪效果. 然而, 在强噪声的干扰下, NLM 算法中的权函数不能准确度量图像块之间的相似性. 因此, 很多文献利用图像的梯度信息对权函数做了改进. 但是, 传统的梯度算子对噪声十分敏感, 不能有效地提高相似性度量的准确性. 本文将图像的稀疏梯度场 (Sparse gradients field, SGF) 引入权函数的定义中, 提出一种基于稀疏梯度场的非局部图像去噪算法. 首先, 区别于传统基于局部的梯度算子, 提出了基于全局的稀疏梯度场模型, 进一步给出一个自适应的稀疏梯度场模型 (Adaptive sparse gradients field, ASGF), 并利用向前-向后分裂算法求解. 然后, 利用图像的稀疏梯度场对 NLM 算法的权函数进行改进, 得到本文提出的算法. 实验结果表明, 无论是客观评价还是视觉效果, 本文所提算法的性能优于 NLM 算法和其他利用梯度信息改进的 NLM 算法.

**关键词** 图像去噪, 非局部平均, 稀疏梯度场, 向前-向后分裂算法

**引用格式** 张瑞, 冯象初, 王斯琪, 常莉红. 基于稀疏梯度场的非局部图像去噪算法. 自动化学报, 2015, 41(9): 1542–1552

**DOI** 10.16383/j.aas.2015.c140903

### A Sparse Gradients Field Based Image Denoising Algorithm via Non-local Means

ZHANG Rui<sup>1</sup> FENG Xiang-Chu<sup>1</sup> WANG Si-Qi<sup>1</sup> CHANG Li-Hong<sup>1</sup>

**Abstract** Non-local means (NLM) algorithm can obtain very good denoising results by making full use of the self-similarity and structural information's redundancy of images. But the weight function of NLM algorithm cannot accurately measure the similarity between image patches in the case of strong noise. Therefore, the weight function of NLM has been improved by using the gradients information of images in many papers. However, the traditional gradients operators cannot improve the accuracy of similarity measurement efficiently because they are sensitive to noise. This paper proposes a sparse gradients field (SGF) based image denoising algorithm via non-local means, in which the SGF of image is introduced to redefine the similarity measurement. First, a global sparse gradients field model and an adaptive sparse gradients field model are proposed which is different from traditional gradients operators and solved by forward-backward splitting algorithm. Then, the algorithm is proposed by redefining weight function via SGF. Experimental results demonstrate that compared with the NLM algorithm and other improved algorithms using information of gradients our proposed method has a better performance both in objective measurement and visual evaluation.

**Key words** Image denoising, non-local means (NLM), sparse gradients field (SGF), forward-backward splitting algorithm

**Citation** Zhang Rui, Feng Xiang-Chu, Wang Si-Qi, Chang Li-Hong. A sparse gradients field based image denoising algorithm via non-local means. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(9): 1542–1552

图像去噪是人们近几十年来一直研究的重要问题, 它不仅为很多图像处理问题提供了丰富的理论依据<sup>[1–4]</sup>, 也是正确学习、识别图像信息和进一步处理图像的必要保证. 一种好的去噪方法应该在去除噪声的同时, 又能较好地保持图像的原有信息和清

晰的对比度. 图像去噪方法可分为局部和非局部两大类. 局部方法主要是通过对噪声图像的局部邻域做光滑逼近来抑制噪声, 所以重构图像的细节以及纹理会变得模糊. 2005 年, Buades 等提出非局部平均 (Non-local means, NLM) 去噪算法<sup>[5]</sup>, 其主要思想是: 由噪声图像中所有像素点的加权平均来估计重构图像的每个像素点, 而权函数是根据对应像素点之间的相似性度量来确定. 该算法充分利用图像的自相似性与结构信息的冗余性, 取得了很好的去噪效果. 但是, NLM 算法也存在下述不足: 因为相似性度量是根据两个像素点对应的含有噪声的图像块来确定, 所以其准确性会受到噪声的干扰而不能有效地区分相似点和不相似点, 从而导致重构图像的细节以及纹理区域出现模糊, 在强噪声的情况下这

收稿日期 2014-12-30 录用日期 2015-04-30  
Manuscript received December 30, 2014; accepted April 30, 2015

国家自然科学基金 (61271294, 61105011, 11101292, 61379030, 61362029, 61101208), 陕西省自然科学基金 (2013JM1001) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61271294, 61105011, 11101292, 61379030, 61362029, 61101208) and Science Foundation of Shaanxi Province (2013JM1001)

本文责任编辑 杨健  
Recommended by Associate Editor YANG Jian

1. 西安电子科技大学数学与统计学院 西安 710126  
1. School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126

种现象尤为明显. 因此, 如何通过提高相似性度量的准确性来改进 NLM 算法的去噪效果成为被广泛关注的问题. 图 1 (c) 是由不含噪声的图像计算权函数, 再对噪声图像做加权平均所得的结果, 其去噪效果远远优于经典的 NLM 算法. 这表明如果相似性度量足够准确, 那么非局部算法的去噪效果将会非常好.

针对 NLM 算法的以上不足, 许多改进方法已被提出<sup>[6-11]</sup>, 大致可分为基于像素和基于块<sup>[6, 9-11]</sup>两类方法. Chatterjee 和 Milanfar 等提出一种经由核回归方法的非局部平均的推广模型<sup>[7-8]</sup>, 由于 NLM 可以看成是一种零阶回归方法, 隐含着待恢复图像是分片常数的假设, 所以可将其推广到高阶的情形, 即假定待恢复图像是分片的多项式函数, 算法利用高阶导数来改进权函数, 提高了去噪效果. 文献<sup>[12]</sup>考虑到 NLM 只利用了图像的灰度值信息来度量像素点之间的相似性, 不能很好地刻画图像的结构信息, 因此, 利用含有梯度信息的结构张量来改进算法. 首先给出结构张量的定义, 设图像为  $I$ , 二维结构张量  $S_\omega(\cdot)$  可表示为

$$S_\omega(x, y) = \sum_{i, j=-d}^d \omega(i, j) S_0(x-i, y-j)$$

其中,  $(x, y)$  是图像  $I$  中像素的坐标,  $d \in \mathbf{N}^+$  是给定的常数,  $\omega$  是给定的  $2d+1$  阶方阵,  $S_0$  的定义如下:

$$S_0(x, y) = \begin{bmatrix} (I_x(x, y))^2 & I_x(x, y)I_y(x, y) \\ I_y(x, y)I_x(x, y) & (I_y(x, y))^2 \end{bmatrix}$$

结构张量包含该邻域内图像变化的方向以及沿着这些方向变化的大小等结构信息, 它反映了该邻域内图像的复杂性, 且具有较好的鲁棒性. 结构张量  $S_\omega(\mathbf{p})$  和  $S_\omega(\mathbf{q})$  之间的相似性度量为

$$d_s(S_\omega(\mathbf{p}), S_\omega(\mathbf{q})) = \sqrt{\text{tr} [\log(S_\omega(\mathbf{p})) - \log(S_\omega(\mathbf{q}))]^2}$$

然后, 对 NLM 算法中的权函数做以下改进:

$$\omega(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{Z(\mathbf{p})} \exp \left\{ -\frac{d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \alpha d_s^2(S_\omega(\mathbf{p}), S_\omega(\mathbf{q}))}{h^2} \right\}$$

这里,  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  是 NLM 算法使用的加权 Euclidean 距离,  $Z(\mathbf{p})$  是归一化因子,  $h$  是衰减参数,  $\alpha$  是平衡  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  和  $d_s(S_\omega(\mathbf{p}), S_\omega(\mathbf{q}))$  的参数. 然而, 由于噪声的存在和梯度对噪声的敏感性, 传统的利用局部信息计算梯度的方法同样受到噪声干扰, 特别是强噪声的情况下, 使得以上算法的去噪效果不可避免地受到影响.

为了克服上述问题, 本文利用图像的梯度信息来改进 NLM 算法中的权函数, 提出基于稀疏梯度场的非局部图像去噪算法. 首先, 针对传统梯度算子对噪声敏感的问题, 提出稀疏梯度场模型. 区别于传统的基于局部的梯度算子, 稀疏梯度场模型是基于全局的, 即利用噪声图像的所有像素点来估计每个像素点的梯度, 使用权函数来确定每个点对被估计点处梯度的贡献大小, 并对梯度场施加稀疏性约束, 使得到的梯度场更加准确、鲁棒; 进一步给出了一个自适应的稀疏梯度场模型, 使模型在光滑区域能有效地去除噪声的干扰, 同时保持纹理区域的结构. 模型用向前-向后分裂算法来求解. 然后, 为了提高相似性度量的准确性, 利用稀疏梯度场模型得到的梯度信息来改进 NLM 算法中的权函数, 进而给出本文的去噪算法. 与其他利用梯度信息来改进 NLM 的去噪算法相比, 本文的贡献在于: 1) 稀疏梯度场模型克服了传统梯度算子对噪声敏感的问题, 可以在噪声干扰的情况下, 很好地保持图像的边缘和纹理结构信息, 同时具有良好的鲁棒性; 2) 自适应稀疏

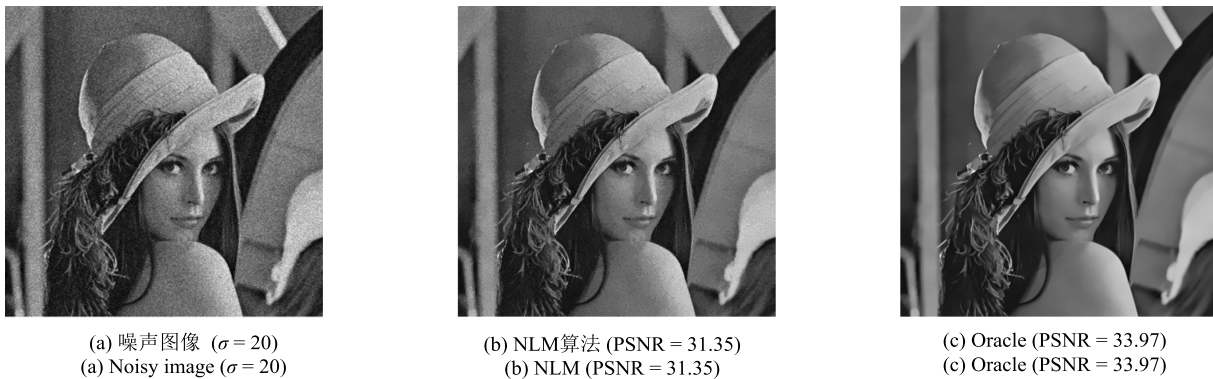


图 1 权函数对 NLM 算法的影响

Fig. 1 Effect of weight function to NLM algorithm

梯度场模型进一步提高了模型的灵活性, 对不同区域选取恰当的参数; 3) 提出了基于稀疏梯度场的非局部图像去噪算法. 实验表明, 相较于 NLM 算法和其他利用梯度信息改进的 NLM 算法, 本文提出的算法不仅提高了客观评价指标, 同时改善了视觉效果.

本文内容的结构安排如下: 第 1 节提出稀疏梯度场模型. 基于稀疏梯度场的非局部去噪算法在第 2 节给出. 第 3 节是稀疏梯度场的鲁棒性实验和去噪算法的对比实验结果. 最后, 在第 4 节总结了本文的工作.

## 1 稀疏梯度场

人的视觉对于图像边缘和纹理的变化是敏感的, 而图像的绝大部分信息也包含在边缘和纹理结构之中, 因此这些信息对图像处理有着非常重要的意义和作用. 传统的梯度算子是局部运算, 对噪声非常敏感 (见图 2). 本文提出一种新的基于全局的稀疏梯度场模型, 希望在噪声污染的情况下, 能够得到准确、鲁棒的梯度场.

设噪声图像  $y: X \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $y(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + n(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ , 其中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  是矩形区域  $X$  中点的坐标,  $y$  是观测图像,  $u$  是理想图像,  $n$  是均值为零、方差为  $\sigma^2$  的独立同分布高斯噪声.

### 1.1 稀疏梯度场模型

稀疏梯度场模型包含两部分: 数据项和正则

项. 在图像去噪模型中, 数据项通常使用均方误差  $\sum_{i=1}^N (y_i - u_i)^2$ ,  $N$  表示整个图像中像素点的个数. 然而, 本文的目的是从观测图像  $y$  出发估计  $u$  的梯度场  $\nabla u$ , 因此, 利用  $\nabla u$  的一阶 Taylor 展开式,  $u_j \approx u_i + \nabla u_i \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)$ , 移项得,  $u_i \approx u_j - \nabla u_i \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)$ , 并用观测值  $y_j$  替换  $u_j$ , 然后, 代入上面的均方误差公式, 得到新模型的数据项; 同时, 由于梯度对噪声十分敏感, 为了得到准确、鲁棒的梯度场, 需要选取更多的点来估计  $\nabla u_i$ , 新模型的数据项利用所有数据点的加权平均来估计每个点的梯度, 即

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \omega_{ij}^s (y_i - y_j + \nabla u_i (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i))^2 \quad (1)$$

其中,  $\omega_{ij}^s$  是加权核函数, 定义为

$$\omega_{ij}^s = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|_2^2}{2s^2}\right)$$

参数  $s$  控制权函数的宽度, 取  $s = 0.5\sqrt{\sigma}$ .

因为自然图像趋于分片光滑, 所以我们先验地认为, 边界和纹理部分相对于整个图像来说是稀疏的. 于是, 新模型将施加了稀疏性约束的梯度场作为正则项, 这意味着图像的梯度  $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2})$  的  $l_0$  范数应该较小. 然而, 由于  $l_0$  范数的非凸性, 相应的优化问题难于求解, 故利用  $l_1$  范数来替代  $l_0$  范数, 新模型的正则项为

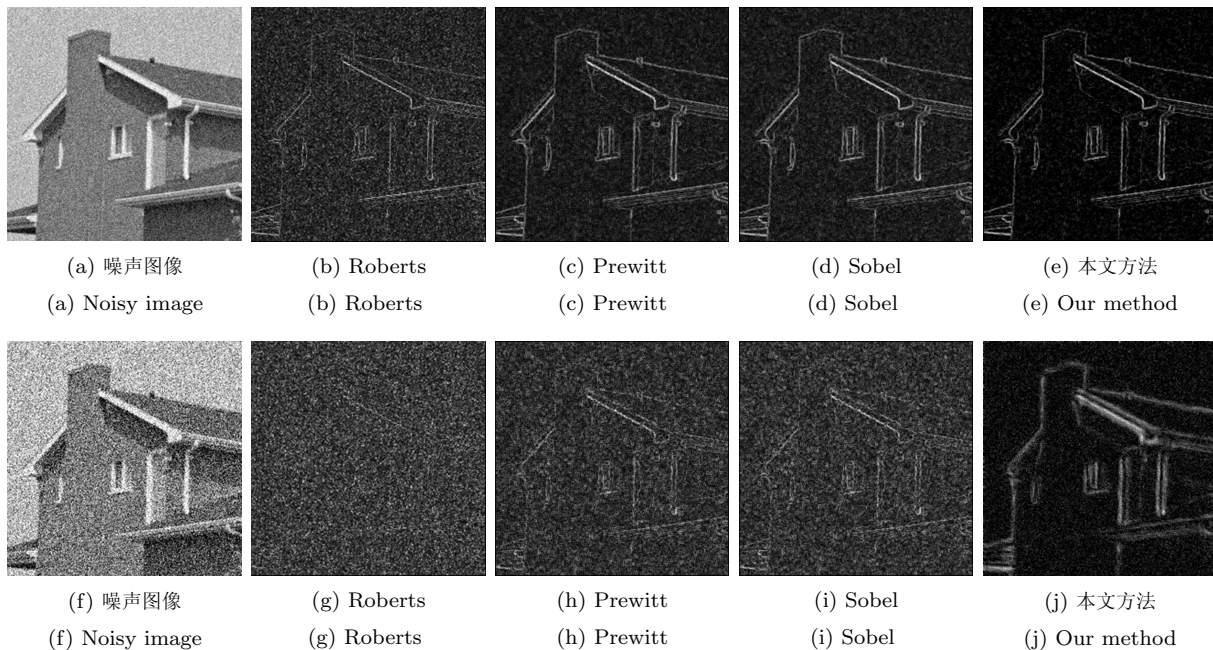


图 2 各类梯度算子对噪声图像的效果比较 ( $\sigma = 20, 50$ )

Fig. 2 Effect comparison of various gradient operators on noisy image ( $\sigma = 20, 50$ )

$$\lambda \|\nabla u\|_1 = \lambda \sum_{i=1}^N (|u_{x_1}^{(i)}| + |u_{x_2}^{(i)}|) \quad (2)$$

其中,  $\lambda$  是正则化参数. 联合式 (1) 和式 (2), 提出稀疏梯度场 (Sparse gradient field, SGF) 模型来学习  $\nabla u$ .

$$\begin{aligned} \nabla u = \arg \min_{\nabla u \in \mathbf{R}^{N \times 2}} \Phi_1(\nabla u) = \\ \arg \min_{\nabla u \in \mathbf{R}^{N \times 2}} \left\{ \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{N} \omega_{ij}^s (y_i - y_j + \right. \\ \left. \nabla u_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i))^2 + \lambda \|\nabla u\|_1 \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

由于在边缘和纹理区域, 图像的亮度值变化剧烈, 一阶 Taylor 展开式会出现逼近误差较大的问题, 会丢失图像中部分细节; 另外, 若对所有像素点取相同的参数, 就不能在去除噪声和保持细节之间达到良好的平衡, 因为,  $\lambda$  取值过大, 就会丢失很多细节, 反之, 则不能有效地去除噪声. 为了解决上述问题, 我们对模型 (3) 作如下改进: 一方面, 在式 (3) 的数据项中加入余项估计来减少误差, 利用二阶 Taylor 展开式

$$\begin{aligned} u_j \approx u_i + \nabla u_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + \\ \frac{1}{2}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)H(u_i)(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^T \end{aligned}$$

对数据项进行修正,  $H$  表示 Hessian 矩阵, 用观测值  $y_j$  及  $H(y_i)$  分别替换  $u_j$  及  $H(u_i)$ , 得到新的数据项

$$y_i - y_j + \nabla u_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + \tau_i$$

这里,  $\tau_i$  是观测图像  $y$  在点  $\mathbf{x}_i$  处的一阶 Taylor 展开式的余项估计,  $\tau_i = \gamma_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)H(y_i)(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^T$ , 参数  $\gamma_i$  用来控制修正项的大小, 即在梯度变化不大的光滑部分取值较小, 而在梯度变化较大的边缘和纹理部分取值较大; 另一方面, 我们希望正则化参数  $\lambda$  在光滑区域取值较大, 以便有效地去除噪声, 而在边缘和纹理部分取值较小, 以便保持细节和纹理结构, 可以根据不同位置的方差来对参数  $\lambda$  做阈值, 如果方差较大, 说明该点处的值变化较大, 应取值较小以保持细节, 反之, 如果方差较小, 说明该点处于光滑区域, 应取值较大以去除噪声.

考虑到以上的因素, 给出一个自适应的稀疏梯度场模型 (Adaptive sparse gradient field, ASGF) 如下:

$$\nabla u = \arg \min_{\nabla u \in \mathbf{R}^{N \times 2}} \Phi_2(\nabla u) =$$

$$\begin{aligned} \arg \min_{\nabla u \in \mathbf{R}^{N \times 2}} \left\{ \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{N} \omega_{ij}^s (y_i - y_j + \right. \\ \left. \nabla u_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + \tau_i)^2 + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i (|u_{x_1}^{(i)}| + |u_{x_2}^{(i)}|) \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

正则化参数  $\lambda_i$  的大小与噪声水平相关, 参数  $\gamma_i$  的取值由点  $\mathbf{x}_i$  处方差的大小确定, 通过实验比较得到:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \begin{cases} 0.2\sigma, & V_i \geq V_0 \\ 2\sigma, & V_i < V_0 \end{cases} \\ \gamma_i &= \begin{cases} 0.5, & V_i \geq V_0 \\ 0, & V_i < V_0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中,  $V_i$  表示点  $\mathbf{x}_i$  处的方差,  $V_0$  表示阈值,  $V_0$  利用文献 [13] 中的梯度直方图阈值方法得到.

## 1.2 利用向前-向后分裂算法求解稀疏梯度场模型

在图像处理和机器学习中, 向前-向后分裂算法被用来解决  $l_1$  范数相关的优化问题<sup>[14-15]</sup>. 为了求解优化问题 (3) 和 (4), 本文的算法是从文献 [15] 的一般求解形式中得到.

首先, 将  $\Phi_1$  分裂为光滑项和非光滑项. 设  $\Phi_1 = D_1 + R_1$ , 其中

$$D_1(\nabla u_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_{ij}^s (y_i - y_j + \nabla u_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i))^2$$

$$R_1(\nabla u_i) = \lambda (|u_{x_1}^{(i)}| + |u_{x_2}^{(i)}|)$$

显然,  $D_1$  和  $R_1$  是下半连续的, 且  $D_1$  可微, 满足算法收敛的条件. 向前-向后分裂算法是通过  $\nabla u_i$  迭代来求解问题. 给定当前估计  $\nabla u_i^{(k)}$ , 下一次更新由下式给出

$$\nabla u_i^{(k+1)} = \text{prox}_{\delta R_1} \left( \nabla u_i^{(k)} - \delta \nabla D_1 \left( \nabla u_i^{(k)} \right) \right)$$

这里,  $\delta > 0$  表示步长, 逼近算子  $\text{prox}_{\delta R_1}$  定义为

$$\begin{aligned} \text{prox}_{\delta R_1}(v) = \\ \arg \min_{\nabla u \in \mathbf{R}^{N \times 2}} \left( \frac{1}{2} \|v - \nabla u\|_2^2 + \delta R_1(\nabla u) \right) \end{aligned}$$

要运行算法, 必须求出  $\nabla D_1(\nabla u_i)$  和  $\text{prox}_{\delta R_1}(\cdot)$ . 通过计算容易得到

$$\begin{aligned} \nabla D_1(\nabla u_i) = \\ \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \omega_{ij}^s (y_i - y_j + \nabla u_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i))(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^T \end{aligned}$$



由于  $R_1$  是  $l_1$  正则, 那么  $\text{prox}_{\delta R_1}(\cdot)$  是一个收缩算子<sup>[15]</sup>, 令

$$P_i^{(k)} = \nabla u_i^{(k)} - \delta \nabla D_1 \left( \nabla u_i^{(k)} \right)$$

$$T_{\lambda \delta} \left( P_i^{(k)} \right) = \text{prox}_{\delta R_1} \left( P_i^{(k)} \right)$$

其中,  $P_i^{(k)} = (p_{1,i}^{(k)}, p_{2,i}^{(k)})^T$ , 那么

$$T_{\lambda \delta} \left( P_i^{(k)} \right) = \left( T_{\lambda \delta} p_{1,i}^{(k)}, T_{\lambda \delta} p_{2,i}^{(k)} \right)^T$$

且

$$T_{\lambda \delta} p_{d,i}^{(k)} = \begin{cases} 0, & |p_{d,i}^{(k)}| \leq \lambda \delta \\ \frac{|p_{d,i}^{(k)}| - \lambda \delta}{|p_{d,i}^{(k)}|} p_{d,i}^{(k)}, & |p_{d,i}^{(k)}| > \lambda \delta \end{cases},$$

$$d = 1, 2 \quad (5)$$

于是, 得到如下迭代的向前-向后分裂算法来求解式 (3):

$$\nabla u_i^{(k+1)} = T_{\lambda \delta} \left( P_i^{(k)} \right) \quad (6)$$

模型 (4) 的求解过程是类似的, 设  $\Phi_2 = D_2 + R_2$ , 其中

$$D_2(\nabla u_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_{ij}^s (y_i - y_j + \nabla u_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + \tau_i)^2$$

$$R_2(\nabla u_i) = \lambda_i (|u_{x_1}^{(i)}| + |u_{x_2}^{(i)}|)$$

模型 (4) 求解的迭代公式如下:

$$\begin{cases} P_i^{(k)} = \nabla u_i^{(k)} - \delta \nabla D_2 \left( \nabla u_i^{(k)} \right) \\ \nabla u_i^{(k+1)} = T_{\lambda \delta} \left( P_i^{(k)} \right) \end{cases} \quad (7)$$

## 2 基于稀疏梯度场的非局部去噪算法

### 2.1 本文提出的去噪算法

设离散噪声图像为  $y = \{y(i) | i \in N\}$ , 理想图像为  $u = \{u(i) | i \in N\}$ ,  $N$  表示所有像素点的个数. 在经典的 NLM 去噪算法中, 估计值  $\hat{u}(i)$  是通过对所有像素的加权平均得到:

$$\hat{u}(i) = NL(y)(i) = \sum_{j \in N} \omega(i, j) y(j)$$

权函数  $\omega(i, j)$  的值依赖于像素点  $i$  与  $j$  之间的相似性, 满足  $0 \leq \omega(i, j) \leq 1$  及  $\sum_{j \in N} \omega(i, j) = 1$ , 其计算式为

$$\omega(i, j) = \frac{1}{Z(i)} \exp \left\{ - \frac{\| \mathbf{y}(N_j) - \mathbf{y}(N_i) \|_{2,a}^2}{h^2} \right\}$$

其中,  $\mathbf{y}(N_i)$  是灰度值向量,  $N_i$  表示以像素  $i$  为中心的方形邻域; 参数  $h$  控制指数函数的衰减速度, 即权值的衰减速度, 因而决定着滤波的程度. 经典的 NLM 去噪算法中, 像素点之间的相似性是利用灰度值向量的高斯加权欧氏距离来计算. 然而, 当噪声的强度较大时, 仅利用图像的灰度值信息来定义像素点之间的相似性必然会受到干扰. 一方面, 重构图像的细部以及纹理区域出现模糊, 在强噪声的情况下这种现象尤为明显; 另一方面, 这种相似性度量也不能很好地反映图像的结构信息. 本文提出的基于稀疏梯度场的非局部平均去噪模型 (Sparse gradients NLM, SGNLM), 在定义权函数时, 不仅考虑图像块之间灰度值的相似性, 也考虑到图像块之间结构的相似性, 即梯度的相似性. 新模型由下式给出

$$\hat{u}(i) = SGNL(y)(i) = \sum_{j \in N} \omega(i, j) y(j)$$

其中,  $\omega(i, j)$  由式 (8) 给出.

$$\omega(i, j) = \frac{1}{Z(i)} \exp \left\{ - \left( \alpha \frac{\| \mathbf{y}(N_j) - \mathbf{y}(N_i) \|_{2,a}^2}{h^2} + (1 - \alpha) \frac{\| \nabla u(N_j) - \nabla u(N_i) \|_{2,a}^2}{h^2} \right) \right\} \quad (8)$$

这里,  $\nabla u(N_i)$  是梯度值向量,  $\alpha$  是平衡两项的参数. 本文的去噪过程分为两步, 如图 3 所示. 两步的过程是一样的, 第二步利用第一步的结果先来学习梯度场, 然后在利用文献 [16] 中的方法更新噪声水平后, 继续做非局部平均去噪.

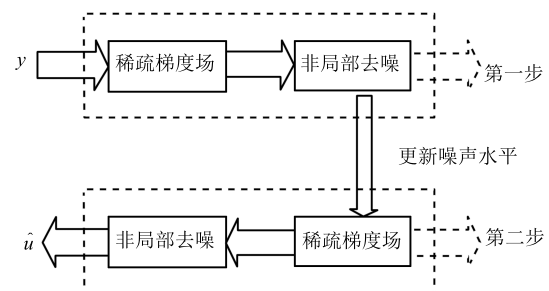


图 3 基于稀疏梯度场的非局部两步去噪格式

Fig. 3 Two-stage formula of sparse gradients field based image denoising algorithm via non-local means

### 2.2 算法复杂度比较

假设图像的像素点总数是  $N$ , 图像块的尺寸为  $\sqrt{s} \times \sqrt{s}$ , 搜索窗的尺寸为  $\sqrt{T} \times \sqrt{T}$ . 由于 NLM 算法在计算两个相似块的相似度时, 加权 Euclidean 距离的复杂度为  $O(s^2)$ , 所以该算法的复杂度为  $O(s^2TN)$ . 设 STNLM 算法中, 计算结构张量时的邻域窗尺寸是  $\sqrt{t} \times \sqrt{t}$ , 那么算法复杂度为  $O((s^2 + t)TN)$ . 基于核回归方法的非局部平均模型的复杂度是  $O(s^2T^2N)$ , 这是由于计算每一点的等价核时需要  $O(s^2T^2)$  的计算量. BM3D 算法<sup>[17]</sup> 的复杂度为  $O((sT + n\sqrt{s^3} + n^2s)N)$ , 其中  $n$  是与每个参考块对应的相似块的平均个数. 若稀疏梯度场算法中, 用尺寸是  $\sqrt{t} \times \sqrt{t}$  的窗来估计中心像素点的梯度, 则 SGNLM 算法的复杂度是  $O((s^2 + t)TN)$ . 以上分析说明, 当  $t \leq s^2$  时, SGNLM 和 NLM 算法复杂度相当.

## 3 实验结果

### 3.1 稀疏梯度场模型的鲁棒性

本节以 Cameraman 图像为例, 说明自适应稀疏梯度场模型 (ASGF) 的鲁棒性 (见图 4 和图 5).

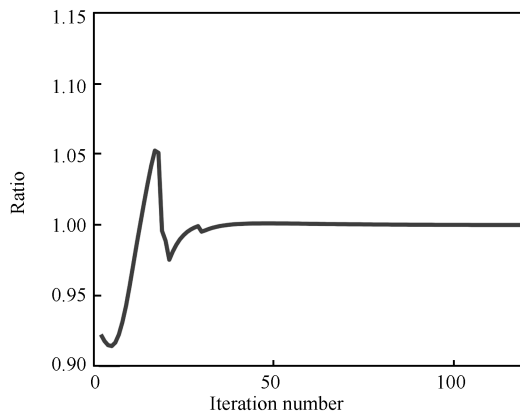


图 4 ASGF 算法对迭代次数的鲁棒性  
Fig. 4 Robustness of ASGF algorithm to the number of iteration



(a)  $d = 4$  (b)  $d = 6$  (c)  $d = 8$

图 5 ASGF 算法对块的尺寸参数  $d$  的鲁棒性  
Fig. 5 Robustness of ASGF algorithm to the parameter of block size  $d$

首先, ASGF 模型在第  $k + 1$  次迭代得到的梯度场  $\nabla u^{k+1}$  与第  $k$  次迭代得到的梯度场  $\nabla u^k$  之比值

$$ratio_k = \frac{\|\nabla u^{k+1}\|_1}{\|\nabla u^k\|_1}$$

被用来检验算法对于迭代次数的稳定性. 图 4 说明随着迭代次数的增加, 算法得到的结果变化越来越小, 趋于稳定. 设置迭代过程的停止条件为  $|ratio_{k+1} - ratio_k| < 10^{-4}$ .

然后, 讨论算法对于窗的尺寸参数  $d$  的鲁棒性. 类似非局部平均算法, 为了节省计算时间, 以被估计像素点为中心取一个大小为  $(2d + 1) \times (2d + 1)$  的窗, 利用窗内的点来估计中心点处的梯度, 邻域窗的尺寸参数  $d$  的选取与噪声水平相关, 在鲁棒性实验中, 取值范围设定为  $2 \leq d \leq 8$ . 实验表明, 当固定其他参数只改变参数  $d$  时, 得到的梯度场差异很小 (图 5), 说明算法对于  $d$  是鲁棒的. 在上述范围内, 我们通过实验选取最优的参数, 当噪声的标准差  $\sigma \leq 35$  时, 取  $d = 3$ ; 当  $\sigma \geq 35$  时, 取  $d = 5$ . 在所有实验中, 参数  $\alpha = 0.7$  时, 结果最优; 步长参数  $\delta = 0.01$ , 以保证数值的稳定性.

### 3.2 去噪效果的对比实验

本节采用灰度图像 Barbara、Peppers、Man、Lena (256 像素  $\times$  256 像素)、Lena、House、Hill、Cameraman、Boat (图 6) 和彩色图像 (图 7) 作为测试图像, 在标准差分别为 20、30、40、50 的高斯白



图 6 灰度测试图

Fig. 6 Test grey images



图 7 彩色测试图 (图像由上到下、从左到右编号 1~12)

Fig. 7 Test colour images (Images 1 to 12 are enumerated from left-to-right and top-to-bottom.)

噪声情况下, 将 NLM 算法、文献 [7] 和文献 [8] 中提出的基于核回归方法的高阶非局部模型 (1st-order NLM 和 2nd-order NLM)、文献 [12] 中利用结构张量改进的 NLM 算法 (STNLM) 以及目前去噪效果最好的 BM3D 模型与本文提出的 SGNLM 算法进行比较. 文献 [12] 已将 STNLM 算法和一些利用梯度信息改进 NLM 的算法做了比较, 并且 STNLM 算法的效果是最优的, 因此这里只列出 STNLM 算法的实验结果. 为公平起见, 在灰度图像的去噪实验

中, 所有算法中选取相似块及搜索窗的尺寸均分别设置为  $7 \times 7$  和  $21 \times 21$ . 在彩色图像的实验中, 当  $0 < \sigma \leq 25$  时, 相似块及搜索窗的尺寸取  $3 \times 3$  和  $21 \times 21$ ; 当  $25 < \sigma \leq 35$  时, 相似块及搜索窗的尺寸取  $5 \times 5$  和  $35 \times 35$ . 其他参数选择结果最优的情况. 利用峰值信噪比 (Peak signal to noise ratio, PSNR) 和结构相似性 (Structural similarity, SSIM) 对实验结果做图像质量评估, 比较结果见表 1~4 及图 8 和图 9. 图 8 中 (Lena, 标准差为 20), 在背景区域 (墙), 8(e) 的效果最好, 不仅有效地去除了噪声, 又避免了过光滑; 在纹理区域 (帽穗), 8(e) 中很好地保持了纹理结构. 图 9 中 (图像 5, 标准差为 50), SGNLM 算法的结果在保持边缘和纹理方面优于其他基于像素的 NLM 改进算法. 表 1~4 的结果说明, SGNLM 算法的结果均优于其他基于像素的对比算法, 并且随着噪声强度的增大, 该算法对于灰度图像的优势越明显. 说明稀疏梯度场模型可以提高相似性度量的准确性, 特别是强噪声的情况下. 并且, SGNLM 算法对于具有较强边缘的图像去噪效果更好, 这是因为当噪声较大时, ASGF 算法尽管不能恢复细小的纹理, 但能有效地找到较强的边缘, 如 Lena ( $256 \text{ 像素} \times 256 \text{ 像素}$ ) 和 Cameraman. 当然, 相对于基于块的 BM3D 算法, 去噪效果还有一定的

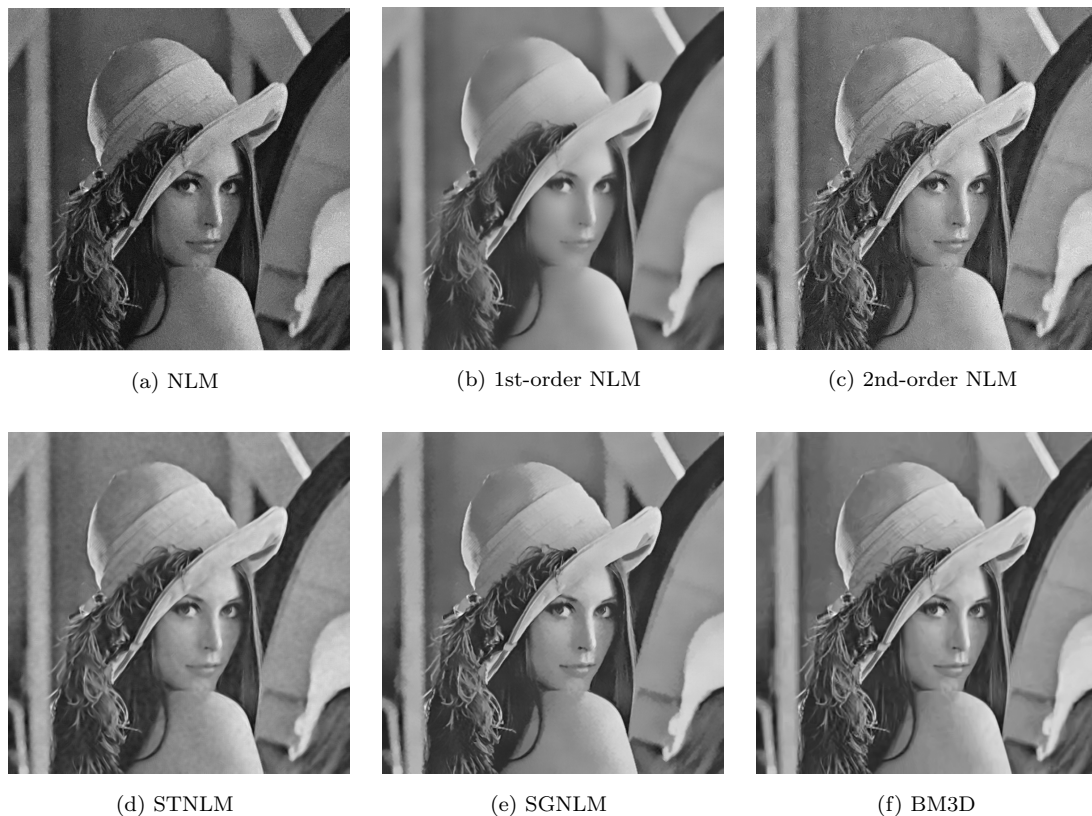


图 8 几种去噪算法对灰度图像的效果比较 ( $\sigma = 20$ )

Fig. 8 Denoising comparison of various denoising algorithms on gray image ( $\sigma = 20$ )

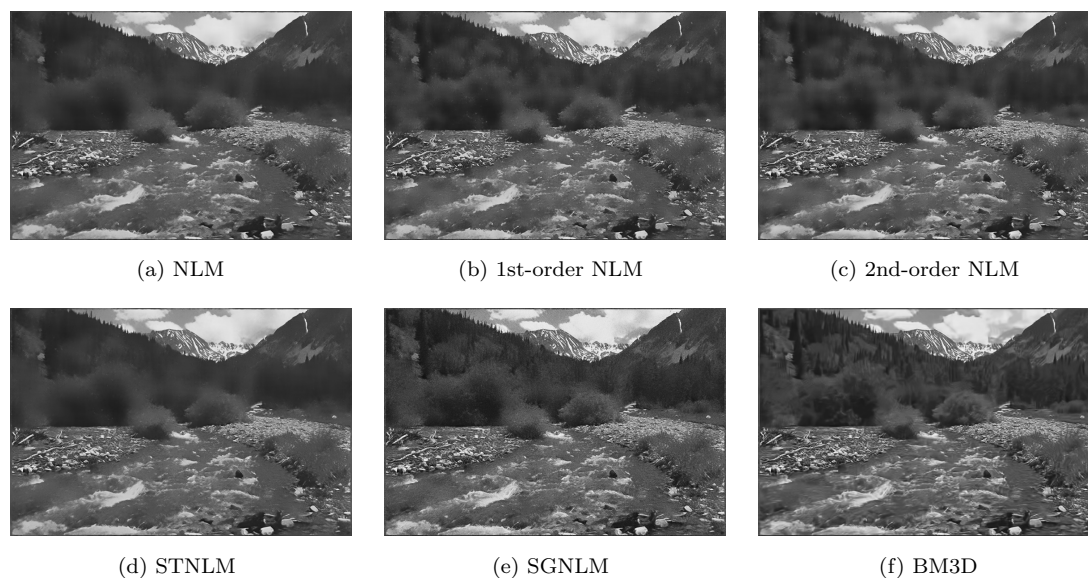
图9 几种去噪算法对彩色图像的效果比较 ( $\sigma = 50$ )Fig.9 Denoising comparison of various denoising algorithms on colour image ( $\sigma = 50$ )

表1 各种去噪算法对灰度图像的效果比较 (PSNR)

Table 1 PSNR comparison of various denoising algorithms on gray images

方差	算法	Lena	Barbara	Boat	Hill	House	Lena256	Peppers	Cameraman	Man
20	NLM	31.35	29.82	29.22	29.2	32.15	29.49	29.65	32.15	29.21
	1st-order	31.56	29.84	29.22	29.05	32.29	29.88	29.83	32.1	29.14
	2nd-order	31.8	30.12	29.75	29.59	32.19	30.06	30.37	32.12	29.65
	STNLM	32.01	30.21	29.88	29.72	32.5	30.13	30.44	32.35	29.86
	SGNLM	32.15	30.48	29.98	30.1	32.56	30.13	30.18	32.73	30.09
	BM3D	<b>33.06</b>	<b>31.78</b>	<b>30.88</b>	<b>30.72</b>	<b>33.79</b>	<b>30.91</b>	<b>31.23</b>	<b>33.88</b>	<b>30.59</b>
30	NLM	29.29	27.25	27.15	27.29	29.61	27.36	27.24	30.01	27.33
	1st-order	29.25	27.13	27.04	26.99	29.46	27.59	27.25	29.93	27.08
	2nd-order	29.56	27.57	27.64	27.75	29.67	27.78	28.04	29.91	27.68
	STNLM	29.84	27.71	27.82	27.96	29.98	27.92	28.17	30.31	27.97
	SGNLM	30.43	28.56	28.24	28.37	31.05	28.42	28.35	30.91	28.39
	BM3D	<b>31.29</b>	<b>29.81</b>	<b>29.07</b>	<b>29.15</b>	<b>32.12</b>	<b>28.82</b>	<b>29.14</b>	<b>31.43</b>	<b>28.86</b>
40	NLM	27.79	25.49	25.7	26.04	27.63	25.8	25.42	28.42	26.04
	1st-order	27.56	25.23	25.49	25.68	27.25	25.85	25.22	28.26	25.68
	2nd-order	27.91	25.75	26.13	26.51	27.76	26.15	26.24	28.2	26.32
	STNLM	28.33	25.94	26.31	26.76	28.07	26.33	26.42	28.72	26.63
	SGNLM	29.04	26.97	26.94	27.12	29.48	27.06	26.83	<b>29.65</b>	27.15
	BM3D	<b>29.91</b>	<b>28.06</b>	<b>27.67</b>	<b>27.95</b>	<b>30.76</b>	<b>27.23</b>	<b>27.6</b>	29.52	<b>27.63</b>
50	NLM	26.59	24.23	24.62	25.13	26.1	24.53	23.94	27.08	25.05
	1st-order	26.22	23.86	24.32	24.77	25.64	24.41	23.58	26.8	24.63
	2nd-order	26.63	24.46	24.98	25.56	26.3	24.87	24.78	26.76	25.29
	STNLM	27.21	24.69	25.19	25.87	26.66	25.14	25.02	27.36	25.63
	SGNLM	27.93	25.65	25.9	26.17	28.14	<b>25.97</b>	25.61	<b>28.64</b>	26.17
	BM3D	<b>28.82</b>	<b>26.85</b>	<b>26.45</b>	<b>26.96</b>	<b>29.42</b>	25.8	<b>26.11</b>	27.88	<b>26.62</b>

表 2 各种去噪算法对灰度图像的效果比较 (SSIM)

Table 2 SSIM comparison of various denoising algorithms on gray images

方差	算法	Lena	Barbara	Boat	Hill	House	Lena256	Peppers	Cameraman	Man
20	NLM	0.83	0.851	0.771	0.747	0.835	0.836	0.845	0.858	0.78
	1st-order	0.818	0.852	0.769	0.741	0.835	0.834	0.848	0.851	0.776
	2nd-order	0.832	0.852	0.778	0.751	0.828	0.845	0.851	0.847	0.783
	STNLM	0.842	0.858	0.779	0.755	0.845	0.849	0.856	0.858	0.791
	SGNLM	0.859	0.882	0.806	0.783	0.856	0.868	0.867	0.898	0.819
	BM3D	<b>0.877</b>	<b>0.905</b>	<b>0.826</b>	<b>0.804</b>	<b>0.872</b>	<b>0.882</b>	<b>0.887</b>	<b>0.917</b>	<b>0.834</b>
30	NLM	0.763	0.77	0.696	0.666	0.769	0.766	0.778	0.785	0.702
	1st-order	0.755	0.768	0.69	0.654	0.764	0.748	0.778	0.77	0.692
	2nd-order	0.756	0.768	0.697	0.7	0.753	0.769	0.782	0.762	0.699
	STNLM	0.785	0.785	0.702	0.679	0.786	0.778	0.792	0.812	0.714
	SGNLM	0.817	0.824	0.743	0.712	0.827	0.817	0.821	0.854	0.754
	BM3D	<b>0.845</b>	<b>0.869</b>	<b>0.779</b>	<b>0.75</b>	<b>0.849</b>	<b>0.838</b>	<b>0.851</b>	<b>0.878</b>	<b>0.78</b>
40	NLM	0.695	0.691	0.628	0.599	0.697	0.7	0.713	0.713	0.633
	1st-order	0.679	0.684	0.63	0.585	0.687	0.664	0.707	0.689	0.619
	2nd-order	0.681	0.686	0.625	0.602	0.675	0.696	0.712	0.678	0.625
	STNLM	0.728	0.714	0.632	0.623	0.724	0.721	0.727	0.758	0.655
	SGNLM	0.773	0.767	0.692	0.657	0.787	0.768	0.776	0.811	0.701
	BM3D	<b>0.817</b>	<b>0.824</b>	<b>0.737</b>	<b>0.708</b>	<b>0.83</b>	<b>0.798</b>	<b>0.818</b>	<b>0.842</b>	<b>0.738</b>
50	NLM	0.63	0.619	0.567	0.54	0.625	0.635	0.649	0.642	0.571
	1st-order	0.606	0.607	0.557	0.527	0.611	0.586	0.637	0.612	0.555
	2nd-order	0.61	0.612	0.56	0.543	0.6	0.629	0.646	0.599	0.561
	STNLM	0.697	0.649	0.582	0.579	0.662	0.662	0.665	0.702	0.606
	SGNLM	0.729	0.71	0.645	0.609	0.742	0.722	0.731	0.768	0.653
	BM3D	<b>0.798</b>	<b>0.788</b>	<b>0.699</b>	<b>0.672</b>	<b>0.815</b>	<b>0.762</b>	<b>0.79</b>	<b>0.813</b>	<b>0.702</b>

表 3 各种去噪算法对彩色图像的效果比较 (PSNR)

Table 3 PSNR comparison of various denoising algorithms on colour images

方差	算法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	NLM	28.10	28.53	28.17	29.93	25.98	29.23	31.73	31.27	29.71	30.13	33.47	28.72
	1st-order	28.21	28.60	28.09	30.04	26.15	29.32	31.67	31.17	29.77	30.13	32.92	28.85
	2nd-order	28.27	28.53	28.29	30.11	26.53	29.31	31.72	31.35	29.85	30.22	33.54	28.98
	STNLM	28.16	28.57	28.29	29.94	26.12	29.27	31.62	31.27	29.73	30.15	33.39	28.83
	SGNLM	28.44	28.65	28.36	30.17	26.55	29.34	31.97	31.43	29.85	30.24	33.76	29.01
	BM3D	<b>30.37</b>	<b>30.95</b>	<b>30.90</b>	<b>32.24</b>	<b>28.89</b>	<b>31.16</b>	<b>33.27</b>	<b>33.36</b>	<b>32.12</b>	<b>31.87</b>	<b>35.45</b>	<b>30.98</b>
30	NLM	26.07	26.08	25.99	27.83	24.24	27.00	29.06	29.03	27.62	28.15	30.81	26.74
	1st-order	26.12	25.92	25.94	27.19	24.30	27.15	28.76	28.43	27.68	28.19	29.27	26.80
	2nd-order	26.24	26.04	26.03	27.71	24.44	27.20	29.15	29.03	27.79	28.28	30.94	26.87
	STNLM	26.15	26.09	25.98	27.84	24.28	27.01	29.09	29.04	27.60	28.17	30.78	26.77
	SGNLM	26.57	26.41	26.42	28.11	24.88	27.38	29.44	29.23	28.00	28.42	31.19	27.12
	BM3D	<b>28.06</b>	<b>28.36</b>	<b>28.45</b>	<b>29.96</b>	<b>26.37</b>	<b>28.91</b>	<b>30.69</b>	<b>31.34</b>	<b>29.84</b>	<b>29.90</b>	<b>33.25</b>	<b>28.54</b>
40	NLM	24.68	24.25	24.69	25.99	23.03	25.52	26.93	27.52	26.41	26.77	29.02	25.35
	1st-order	24.66	24.23	24.60	25.84	23.15	25.50	27.06	26.94	26.54	26.79	28.73	25.44
	2nd-order	24.70	24.36	24.75	26.28	23.21	25.67	27.34	27.70	26.24	26.99	29.61	25.51
	STNLM	24.77	24.32	24.69	26.05	23.07	25.56	26.98	27.54	26.43	26.79	29.04	25.40
	SGNLM	24.89	24.61	24.73	26.48	23.47	25.84	27.48	27.73	26.55	27.06	29.54	25.59
	BM3D	<b>26.44</b>	<b>26.23</b>	<b>26.39</b>	<b>28.06</b>	<b>24.59</b>	<b>27.12</b>	<b>28.49</b>	<b>29.59</b>	<b>28.09</b>	<b>28.42</b>	<b>31.22</b>	<b>26.66</b>
50	NLM	23.39	22.46	23.16	24.49	21.87	23.98	25.11	26.33	25.16	25.59	27.25	23.93
	1st-order	23.48	23.05	22.78	24.68	21.94	24.27	25.41	26.30	25.17	25.73	27.52	23.86
	2nd-order	23.75	23.19	23.19	25.06	22.17	24.48	25.65	26.64	25.31	26.10	27.92	24.16
	STNLM	23.44	22.53	23.19	24.55	21.91	24.02	25.15	26.34	25.19	25.62	27.29	23.99
	SGNLM	23.66	23.36	23.21	25.14	22.36	24.65	25.74	26.64	25.35	25.99	28.04	24.29
	BM3D	<b>25.46</b>	<b>24.76</b>	<b>25.13</b>	<b>26.77</b>	<b>23.28</b>	<b>25.82</b>	<b>26.72</b>	<b>28.67</b>	<b>26.95</b>	<b>27.47</b>	<b>29.78</b>	<b>25.44</b>

表 4 各种去噪算法对彩色图像的效果比较 (SSIM)

Table 4 SSIM comparison of various denoising algorithms on colour images

方差	算法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	NLM	0.826	0.873	0.884	0.819	0.785	0.815	0.861	0.834	0.876	0.81	0.91	0.852
	1st-order	0.837	0.882	0.892	0.829	0.813	0.829	0.64	0.835	0.873	0.816	0.89	0.857
	2nd-order	0.838	0.88	0.889	0.824	0.807	0.821	0.863	0.834	0.881	0.813	0.911	0.859
	STNLM	0.829	0.876	0.887	0.822	0.792	0.819	0.862	0.835	0.877	0.813	0.908	0.854
	SGNLM	0.85	0.883	0.894	0.835	0.827	0.837	0.869	0.848	0.885	0.83	0.918	0.866
	BM3D	<b>0.884</b>	<b>0.916</b>	<b>0.918</b>	<b>0.877</b>	<b>0.862</b>	<b>0.866</b>	<b>0.895</b>	<b>0.891</b>	<b>0.912</b>	<b>0.862</b>	<b>0.93</b>	<b>0.903</b>
30	NLM	0.764	0.803	0.846	0.761	0.706	0.751	0.814	0.773	0.832	0.753	0.882	0.792
	1st-order	0.768	0.808	0.837	0.768	0.73	0.754	0.797	0.74	0.779	0.726	0.781	0.791
	2nd-order	0.769	0.812	0.845	0.768	0.73	0.758	0.818	0.776	0.833	0.757	0.881	0.8
	STNLM	0.768	0.807	0.846	0.763	0.71	0.753	0.814	0.773	0.832	0.753	0.880	0.793
	SGNLM	0.773	0.806	0.858	0.774	0.73	0.758	0.817	0.778	0.831	0.757	0.882	0.798
	BM3D	<b>0.813</b>	<b>0.859</b>	<b>0.881</b>	<b>0.822</b>	<b>0.764</b>	<b>0.801</b>	<b>0.855</b>	<b>0.841</b>	<b>0.873</b>	<b>0.801</b>	<b>0.91</b>	<b>0.848</b>
40	NLM	0.687	0.708	0.785	0.697	0.605	0.678	0.773	0.702	0.778	0.694	0.86	0.724
	1st-order	0.698	0.74	0.787	0.675	0.615	0.689	0.748	0.702	0.702	0.691	0.715	0.73
	2nd-order	0.706	0.723	0.79	0.705	0.628	0.686	0.78	0.703	0.778	0.696	0.86	0.73
	STNLM	0.692	0.713	0.785	0.699	0.61	0.681	0.773	0.702	0.779	0.694	0.859	0.726
	SGNLM	0.698	0.728	0.786	0.701	0.633	0.69	0.78	0.72	0.781	0.695	0.859	0.73
	BM3D	<b>0.745</b>	<b>0.788</b>	<b>0.834</b>	<b>0.761</b>	<b>0.669</b>	<b>0.737</b>	<b>0.816</b>	<b>0.78</b>	<b>0.828</b>	<b>0.744</b>	<b>0.889</b>	<b>0.785</b>
50	NLM	0.607	0.607	0.707	0.637	0.513	0.61	0.741	0.646	0.727	0.643	0.841	0.657
	1st-order	0.615	0.615	0.717	0.611	0.51	0.613	0.747	0.589	0.632	0.589	0.843	0.659
	2nd-order	0.621	0.629	0.718	0.647	0.536	0.618	0.751	0.646	0.725	0.645	0.846	0.663
	STNLM	0.613	0.617	0.709	0.639	0.516	0.612	0.742	0.647	0.728	0.643	0.8410	0.658
	SGNLM	0.625	0.65	0.725	0.65	0.546	0.631	0.752	0.648	0.736	0.645	0.849	0.666
	BM3D	<b>0.693</b>	<b>0.731</b>	<b>0.804</b>	<b>0.721</b>	<b>0.593</b>	<b>0.687</b>	<b>0.792</b>	<b>0.747</b>	<b>0.797</b>	<b>0.709</b>	<b>0.883</b>	<b>0.744</b>

差距. 对于彩色图像, 基于像素的非局部改进算法效果提高不显著, 这是由于这些算法没有考虑 R、G、B 通道之间的相关性, 如何改进 SGNLM 算法以更好地适应彩色图像的去噪问题将在以后工作中讨论. 实验结果表明, 本文的算法无论是客观评价还是视觉效果都优于其他基于像素的比较算法, 能更好地保持边缘和纹理信息.

#### 4 结束语

针对传统梯度算子对噪声敏感的问题, 本文提出了带有稀疏约束的梯度学习模型, 得到的梯度场有效地保持了图像的边缘和纹理信息, 同时抑制噪声的干扰. 然后, 利用该模型得到的梯度信息, 结合亮度值信息来计算像素点之间的相似性, 给出一种基于稀疏梯度场的非局部图像去噪算法. 实验结果表明, 相较 NLM 算法和其他利用梯度信息改进的 NLM 算法, 新算法不仅提高了客观评价指标, 同时改善了视觉效果. 本文的研究工作还有许多有待改进的地方, 例如, 进一步研究快速算法降低计算开

销; 提高处理彩色图像的去噪效果; 将该方法推广到基于块的去噪模型中等问题.

#### References

- 1 Wang Xu-Dong, Feng Xiang-Chu, Huo Lei-Gang. Iteratively reweighted anisotropic-TV based multiplicative noise removal model. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 444–451  
(王旭东, 冯象初, 霍雷刚. 去除乘性噪声的重加权各向异性全变差模型. *自动化学报*, 2012, **38**(3): 444–451)
- 2 Liu Xiao-Yan, Feng Xiang-Chu, Zhao Chen-Ping. Anisotropic diffusion model based on generalized metric in Sobolev space. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(2): 320–329  
(刘孝艳, 冯象初, 赵晨萍. Sobolev 广义度量下的各向异性扩散模型. *自动化学报*, 2015, **41**(2): 320–329)
- 3 Han Y, Feng X C, Baciú G. Variational and PCA based natural image segmentation. *Pattern Recognition*, 2013, **46**(7): 1971–1984
- 4 Zhang W J, Feng X C, Han Y. A novel image segmentation model with an edge weighting function. *Signal, Image, and Video Processing*, 2014, **8**(1): 121–132

- 5 Buades A, Coll B, Morel J M. A non-local algorithm for image denoising. In: Proceedings of the 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. San Diego, USA: IEEE, 2005. 60–65
- 6 Katkovnik V, Foi A, Egiazarian K, Astola J. From local kernel to nonlocal multiple-model image denoising. *International Journal of Computer Vision*, 2010, **86**(1): 1–32
- 7 Takeda H, Farsiu S, Milanfar P. Kernel regression for image processing and reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, **16**(2): 349–366
- 8 Chatterjee P, Milanfar P. A generalization of non-local means via kernel regression. In: Proceedings of the 2008 International Society for Optical Engineering. San Jose, CA: SPIE, 2008. 68140P–68140P-9
- 9 Ram I, Elad M, Cohen I. Image denoising using non-local means via smooth patch ordering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2013, **22**(7): 2764–2774
- 10 Rajwade A, Rangarajan A, Banerjee A. Image denoising using the higher order singular value decomposition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, **35**(4): 849–862
- 11 Luo Liang, Feng Xiang-Chu, Zhang Xuan-De, Li Xiao-Ping. An image denoising method based on non-local two-side random projection and low rank approximation. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2013, **35**(1): 99–105  
(罗亮, 冯象初, 张选德, 李小平. 基于非局部双边随机投影低秩逼近图像去噪算法. 电子与信息学报, 2013, **35**(1): 99–105)
- 12 Wu X, Xie M Y, Wu W, Zhou J L. Non-local means image denoising using anisotropic structure tensor. *Advances in Optical Technologies*, 2013, **2013**: Article ID 794728
- 13 Sen D, Pal S K. Gradient histogram: thresholding in a region of interest for edge detection. *Image and Vision Computing*, 2010, **28**(4): 677–695
- 14 Cai J F, Chan R H, Shen Z W. A framelet-based image inpainting algorithm. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, **24**(2): 131–149
- 15 Combettes P L, Wajs V R. Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2005, **4**(4): 1168–1200
- 16 Zhang L, Dong W S, Zhang D, Shi G M. Two-stage image denoising by principal component analysis with local pixel grouping. *Pattern Recognition*, 2010, **43**(4): 1531–1549
- 17 Dabov K, Foi A, Katkovnik V, Egiazarian K. Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, **16**(8): 2080–2095



张瑞 西安电子科技大学数学与统计学院博士研究生。主要研究方向为稀疏表示和变分方法在图像处理中的应用。本文通信作者。

E-mail: guanyue-002@163.com

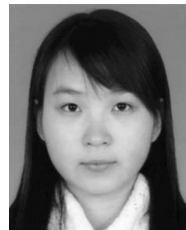
(ZHANG Rui Ph.D. candidate at the School of Mathematics and Statistics, Xidian University. His research interest covers sparse representation, variational method and their applications in image processing. Corresponding author of this paper.)



冯象初 西安电子科技大学数学与统计学院教授。1999 年获得西安电子科技大学理学博士学位。主要研究方向为数值分析, 小波, 图像处理的偏微分方程方法。

E-mail: xcfeng@mail.xidian.edu.cn

(FENG Xiang-Chu Professor in the Department of Applied Mathematics, School of Mathematics and Statistics, Xidian University. He received his Ph.D. degree in applied mathematics from Xidian University in 1999. His research interest covers numerical analysis, wavelets, and partial differential equations for image processing.)



王斯琪 西安电子科技大学数学与统计学院博士研究生。主要研究方向为图像处理中的数学问题。

E-mail: pearlwangxd@163.com

(WANG Si-Qi Ph.D. candidate at the School of Mathematics and Statistics, Xidian University. Her research interest covers mathematical problems in image processing.)



常莉红 西安电子科技大学数学与统计学院博士研究生。主要研究方向为图像处理中的数学问题。

E-mail: changlihong-1999@126.com

(CHANG Li-Hong Ph.D. candidate at the School of Mathematics and Statistics, Xidian University. Her research interest covers mathematical problems in image processing.)