

一种带有色量测噪声的非线性系统辨识方法

黄玉龙¹ 张勇刚¹ 李宁¹ 赵琳¹

摘要 利用最大似然判据, 本文提出了一种带有色量测噪声的非线性系统辨识方法. 首先, 利用量测差分方法将有色量测噪声白色化, 获得新的量测方程, 从而将带有色量测噪声的非线性系统辨识问题转化成带白色量测噪声和一步延迟状态的非线性系统辨识问题. 其次, 利用期望最大化 (Expectation maximization, EM) 算法提出了一种新的基于最大似然估计的非线性系统辨识方法, 该算法由期望步骤 (Expectation step, E-step) 和最大化步骤 (Maximization step, M-step) 两部分组成. 在期望步骤中, 基于当前估计的参数并利用带有色量测噪声的高斯近似滤波器和平滑器, 近似计算完整的对数似然函数的期望. 在最大化步骤中, 近似计算的似然函数期望值被最大化, 并且通过解析更新获得噪声参数估计, 通过 Newton 更新方法获得模型参数的估计. 最后, 数值仿真验证了本文提出算法的有效性.

关键词 非线性系统辨识, 最大似然判据, 有色量测噪声, 期望最大化算法, 量测差分方法, 非线性状态估计器

引用格式 黄玉龙, 张勇刚, 李宁, 赵琳. 一种带有色量测噪声的非线性系统辨识方法. 自动化学报, 2015, 41(11): 1877–1892

DOI 10.16383/j.aas.2015.c150278

An Identification Method for Nonlinear Systems with Colored Measurement Noise

HUANG Yu-Long¹ ZHANG Yong-Gang¹ LI Ning¹ ZHAO Lin¹

Abstract In this paper, an identification method for nonlinear systems with colored measurement noise is proposed by using the maximum likelihood criterion. Firstly, the colored measurement noise is decorrelated based on the measurement differencing approach, and a new measurement equation is derived. Thus, the nonlinear system identification problem with colored measurement noise is transformed into the nonlinear system identification problem with white measurement noise and one-step delayed state. Secondly, a new nonlinear system identification method with maximum likelihood estimation is proposed based on the expectation maximization (EM) algorithm, which consists of expectation step (E-step) and the maximization step (M-step). In the E-step, the expectation of the complete data log-likelihood function is approximately calculated based on currently estimated parameters and the Gaussian approximated filter and smoother for nonlinear system with colored measurement noise. In the M-step, the approximately calculated expectation value is maximized, and noise parameter estimations are updated analytically and model parameter estimations are updated approximately by using Newton method. Finally, the efficiency of the proposed algorithm is illustrated in numerical simulations.

Key words Nonlinear system identification, maximum likelihood criterion, colored measurement noise, expectation maximization (EM) algorithm, measurement differencing approach, nonlinear state estimator

Citation Huang Yu-Long, Zhang Yong-Gang, Li Ning, Zhao Lin. An identification method for nonlinear systems with colored measurement noise. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(11): 1877–1892

非线性状态估计已经被广泛地用于目标跟踪、信号处理、通信和自动控制中. 通常可以利用贝叶斯估计理论来处理非线性状态估计问题, 通过计算状

态的后验概率密度函数, 贝叶斯估计理论为动态状态估计问题提供了一个最优解^[1–3]. 但是, 对于非线性随机动态系统而言, 因为贝叶斯估计中包含的多维非线性积分一般无法解析求解, 从而无法获得状态的后验概率密度函数的解析解, 所以通常情况下最优的非线性状态估计器是不存在的^[1–3]. 为了完成非线性随机动态系统的状态估计任务, 必须使用近似的方法获得次优的非线性状态估计器. 高斯近似是一种被广泛使用的有效方法, 因为在实际应用中利用该方法推导出的高斯近似滤波器和平滑器具有良好的精度和计算效率^[1]. 基于不同的数值近似方法, 目前已经提出了许多次优的非线性状态估计器, 包括基于三阶球径容积准则的容积卡尔曼滤波器 (Cubature Kalman filter, CKF)^[4] 和容积卡尔曼平滑器 (Cubature Kalman smoother, CKS)^[5]; 基

收稿日期 2015-05-11 录用日期 2015-08-18
Manuscript received May 11, 2015; accepted August 18, 2015
国家自然科学基金 (61001154, 61201409, 61371173), 中国博士后科学基金 (2013M530147, 2014T70309), 黑龙江省博士后基金 (LBH-Z13052, LBH-TZ0505), 哈尔滨工程大学中央高校基本科研业务费专项基金 (HEUCFQ20150407) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61001154, 61201409, 61371173), China Postdoctoral Science Foundation (2013M530147, 2014T70309), Heilongjiang Postdoctoral Fund (LBH-Z13052, LBH-TZ0505), and Fundamental Research Funds for the Central Universities of Harbin Engineering University (HEUCFQ20150407)
本文责任编辑 方海涛
Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao
1. 哈尔滨工程大学自动化学院 哈尔滨 150001
1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001

于傅里叶埃尔米特准则的傅里叶埃尔米特滤波器^[6]和平滑器^[7]; 基于五阶球径容积准则的高阶 CKF^[8]和高阶 CKS^[9]; 基于高阶无迹准则的高阶无迹卡尔曼滤波器^[10]; 基于稀疏网格理论的稀疏网格求积滤波器^[11]; 基于随机积分准则的随机积分滤波器^[12]; 基于三阶嵌入式容积准则的嵌入式 CKF^[13]; 基于五阶嵌入式容积准则和极大似然准则的高阶自适应嵌入式 CKF^[14]; 基于球面单径准则的球面单径 CKF^[15]; 基于变换无迹准则的变换无迹卡尔曼滤波器^[16].

一般来说以上的这些非线性状态估计器都需要精确已知非线性状态空间模型. 但是在实际的工程应用中, 非线性状态空间模型可能是不准确的或者未知的, 从而恶化上述非线性状态估计器的性能, 甚至导致估计器发散. 为了解决这个问题, 最常用的方法就是利用非线性系统辨识技术来估计不准确的或者未知的系统参数^[17]. 利用不同的判据我们可以获得不同的最优参数估计, 比如利用最大似然判据, 可以得到最大似然估计, 利用最大后验判据, 可以获得最大后验估计^[18]. 赵琳等利用最大后验判据和指数加权方法提出了一种自适应无迹卡尔曼滤波器^[19], Zhao 等利用最大后验判据和方根容积准则提出了一种自适应鲁棒方根容积卡尔曼滤波器^[20], 王璐等利用最大似然判据和期望最大 (Expectation maximization, EM) 算法提出了一种自适应无迹卡尔曼滤波器^[21], 这三种方法都能实现高斯噪声均值和方差的实时估计. 但是, 这三种方法都采用滤波密度来代替平滑密度, 这样会大大降低噪声统计特性的估计精度, 特别是在非线性比较显著的情况下. 此外这三种方法只适用于估计噪声统计特性, 不能用于估计不准确的或者未知的模型参数. Bavdekar 等利用扩展卡尔曼平滑器和 EM 算法提出了一种专门用于估计噪声方差的辨识方法, 但是这种方法依然不能用于估计不准确的或者未知的模型参数^[22]. 为了解决这些问题, Schön 等利用粒子平滑器和 EM 算法提出了一种非线性状态空间模型辨识方法, 即粒子辨识方法, 为不准确的或者未知的系统参数提供了一种最大似然估计^[23]. 虽然这种方法精度高, 并适用于强非线性非高斯系统, 但是它的计算复杂度过高, 容易遭受维数灾难. 为了降低非线性状态空间模型辨识的计算复杂度, Gašperin 利用无迹平滑器和 EM 算法提出了一种无迹辨识方法, 这种方法适用于较弱非线性的系统, 并且它的计算复杂度远远小于粒子辨识方法^[18]. Väänänen 从高斯近似角度将无迹辨识方法推广到更一般的基于高斯近似平滑器和 EM 算法的非线性系统辨识方法^[24]. Kokkala 等将粒子辨识方法和无迹辨识方法统一为基于 EM 算法的近似最大似然方法^[25].

以上这些非线性系统辨识方法都需要假设量测噪声为白噪声过程. 然而, 在实际的工程应用中, 量测噪声可能是有色噪声. 比如在目标跟踪^[26]、语音信号处理^[27]以及信道和谱估计应用中^[28-29], 高的量测频率可能使得相邻的量测噪声之间存在相关性, 从而导致有色的量测噪声^[30-32]. 此外, 在 GPS 多径参数估计应用中, 白色的外部干扰经反馈和积分环节形成了有色的量测噪声^[30-33]. 从理论上来说, 上述的非线性系统辨识方法在有色量测噪声情况下将会失效, 因为带白色量测噪声的贝叶斯递推关系将不再适用于有色量测噪声情况. 因此, 讨论有色量测噪声情况下的非线性系统辨识问题极具理论价值和现实意义.

利用最大似然判据, 本文提出了一种带有有色量测噪声的非线性系统辨识方法. 首先, 利用量测差分方法将有色量测噪声白色化, 获得新的量测方程, 从而将带有有色量测噪声的非线性系统辨识问题转化成带白色量测噪声和一步延迟状态的非线性系统辨识问题. 其次, 利用 EM 算法提出了一种新的基于最大似然估计的非线性系统辨识方法, 该算法由期望步骤 (Expectation step, E-step) 和最大化步骤 (Maximization step, M-step) 两部分组成. 在 E-step 中, 基于当前估计的参数并利用带有有色量测噪声的高斯近似滤波器和平滑器, 近似计算完整的对数似然函数的期望. 在 M-step 中, 近似计算的似然函数期望值被最大化, 并且通过解析更新获得噪声参数估计, 通过 Newton 更新方法获得模型参数的估计. 最后, 数值仿真验证了本文提出算法的有效性.

1 问题陈述

1.1 带有有色量测噪声和未知参数的状态空间模型

考虑如下以状态空间模型形式给出的含有未知模型参数向量 θ' 的离散时间非线性系统^[23]

$$\text{系统方程 } \mathbf{x}_t = \mathbf{f}_{t-1}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \theta') + \mathbf{w}_{t-1} \quad (1)$$

$$\text{量测方程 } \mathbf{z}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t, \theta') + \mathbf{v}_t \quad (2)$$

其中, t 表示离散时间序列, $\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{R}^l$ 和 $\mathbf{z}_t \in \mathbf{R}^m$ 是可观测的输入和输出响应, $\theta' \in \mathbf{R}^s$ 是未知的模型参数向量, $\mathbf{w}_t \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{v}_t \in \mathbf{R}^m$ 分别为系统噪声和量测噪声. $\mathbf{w}_t \in \mathbf{R}^n$ 是高斯白噪声, $\mathbf{v}_t \in \mathbf{R}^m$ 为高斯有色噪声, 它的一阶自回归模型可以表示如下^[30-32]:

$$\mathbf{v}_t = \Psi_{t-1}\mathbf{v}_{t-1} + \xi_{t-1} \quad (3)$$

其中, Ψ_{t-1} 是已知的相关参数, 并假设 $\Psi_0 = \mathbf{0}$ (在实际的工程应用中, 因为 $k=0$ 时刻的量测 \mathbf{z}_0 不存

在, 所以这个假设是合理的). $\xi_t \in \mathbf{R}^m$ 是高斯白噪声. w_t 和 ξ_t 不相关, 并分别满足 $w_t \sim N(w_t; \mathbf{q}, Q)$ 和 $\xi_t \sim N(\xi_t; \mathbf{r}, R)$. 初始状态 \mathbf{x}_0 是一个均值和协方差矩阵分别为 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ 和 $P_{0|0}$ 的高斯随机向量, 它与 w_t, ξ_t 互不相关.

注 1. 在许多实际应用中, 它们的有色量测噪声是白色的外部干扰经积分和反馈形成的, 可以采用式 (3) 中的一阶自回归模型来表征它们的有色量测噪声^[30-32]. 例如在 GPS 多径参数估计中, 本地码扩频后的白色噪声经积分和反馈形成了有色噪声, 可以采用式 (3) 中的一阶自回归模型来对其建模, 其中相关参数矩阵 $\Psi_{t-1} = e^{-\Delta t B_{Ipf}} I_m$, B_{Ipf} 为积分累加器等效的低通滤波器带宽, Δt 为积分累加时间, I_m 为 m 维单位矩阵^[30-33]. 此外, 式 (3) 中的一阶自回归模型因具有良好精度、容易处理等优点也被广泛地用于建模目标跟踪^[26]、惯性导航^[34]、信道和谱估计^[28-29]、语音信号处理^[27] 中的有色噪声. 文献 [26] 提出了一种方法估计目标跟踪应用中的未知相关参数矩阵 Ψ_{t-1} . 在一般的工程应用中, 可以利用带遗忘因子的递归最小二乘算法估计式 (3) 中的相关参数 Ψ_{t-1} ^[35-36].

在本文中, 我们考虑系统噪声 w_t 和白色量测噪声 ξ_t 的均值和协方差矩阵都是未知的情况, 并将 $\mathbf{q}, \mathbf{r}, Q, R$ 称为未知的噪声参数. 我们将未知模型参数 θ' 和未知噪声参数 $\mathbf{q}, \mathbf{r}, Q, R$ 统一表示为未知的参数向量 $\theta = \{\theta', Q, R, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$. 此外, 为了方便后文的推导, 我们仅考虑输入信号 $\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$ 的情况. 但是, 本文提出的方法依然适用于输入信号不为零的情况.

为了辨识带有色量测噪声非线性系统的未知参数向量 θ , 我们将利用差分方法对有色量测 z_t 进行如下的白色化^[32]:

$$z_t^* = z_t - \Psi_{t-1} z_{t-1} \quad (4)$$

其中, z_t^* 为重新构造的白色量测. 基于方程 (4), 我们可以构造一个新的带白色量测噪声和一步延迟状态的量测方程^[32]

$$z_t^* = h_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \theta') + \xi_{t-1} \quad (5)$$

$$h_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \theta') = h_t(\mathbf{x}_t, \theta') - \Psi_{t-1} h_{t-1}(\mathbf{x}_{t-1}, \theta') \quad (6)$$

从方程 (2)~(6) 中可以看到, 带白色量测噪声和一步延迟状态的量测方程 (4)~(6) 等价于带有色量测噪声的量测方程 (2)~(3), 从而 (1)~(3) 中的带有色量测噪声的非线性系统辨识问题可以等价地转化为式 (1) 和式 (4)~(6) 中的带白色量测噪声和一步延迟状态的非线性系统辨识问题.

1.2 EM 算法

我们的目的是估计式 (1) 和式 (4)~(6) 中的未知参数向量 $\theta = \{\theta', Q, R, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$. 利用不同的判据我们可以获得不同的最优参数估计, 并且所使用的判据依赖于最优性的定义^[18]. 考虑到最大似然判据具有好的理论性质, 比如强一致性、渐近归一化性和渐近有效性^[23], 因而本文将利用这一判据来估计未知参数向量 θ . 最大似然方法通过最大化如下的对数似然函数 $L_\theta(\mathbf{Z}_M^*)$ 来获得 θ 的最大似然参数估计^[23].

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L_\theta(\mathbf{Z}_M^*) := \arg \max_{\theta} \log p_\theta(\mathbf{Z}_M^*) \quad (7)$$

其中, M 表示量测的样本数量, $p_\theta(\cdot)$ 表示依赖于未知参数向量 θ 的密度函数, \log 表示对数函数, $\mathbf{Z}_M^* = \{z_j^*\}_{j=1}^M$.

但是, 对于式 (1) 和式 (4)~(6) 中描述的复杂非线性系统, 我们不可能通过直接最大化对数似然函数 $L_\theta(\mathbf{Z}_M^*)$ 获得参数向量的最大似然估计, 因为量测 \mathbf{Z}_M^* 依赖于不可观测的状态向量 $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_j\}_{j=0}^M$. 为此, 本文将利用 EM 算法来解决这个问题. EM 算法是一种基于贝叶斯推断在概率模型中寻找未知参数向量的近似最大似然估计的迭代算法, 通过应用 EM 算法, 能够更加直观和简单地获得参数的最大似然估计^[21]. 与传统的最大似然方法不同, EM 方法通过最大化如下联合对数似然函数 $L_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*) = \log p_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*)$ 得到一个近似的最大似然解^[18, 23, 25]:

$$\hat{\theta} \approx \arg \max_{\theta} L_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*) := \arg \max_{\theta} \log p_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*) \quad (8)$$

其中, $L_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*)$ 是完整数据的对数似然, 但是它依然是不可利用的, 因为状态向量 \mathbf{X}_M 是不可观测的. EM 算法通过构造 $L_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*)$ 的一个近似 $Q(\theta, \theta_k)$ 来处理不可观测的状态向量 \mathbf{X}_M , 其中 $Q(\theta, \theta_k)$ 是 $L_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*)$ 在给定量测 \mathbf{Z}_M^* 和参数向量 θ 的第 k 步近似 θ_k 的条件下的最小方差估计, 即^[18, 23, 25]

$$\begin{aligned} L_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*) &\approx Q(\theta, \theta_k) := \\ E_{\theta_k} [L_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*) | \mathbf{Z}_M^*] &= \\ \int L_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*) p_{\theta_k}(\mathbf{X}_M | \mathbf{Z}_M^*) d\mathbf{X}_M &\quad (9) \end{aligned}$$

根据贝叶斯定理, 联合对数似然函数可以被分解如下:

$$L_\theta(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*) = \log p_\theta(\mathbf{X}_M | \mathbf{Z}_M^*) + L_\theta(\mathbf{Z}_M^*) \quad (10)$$

在方程 (10) 两边同时取关于密度 $p_{\theta_k}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*)$ 的条件期望, 并利用方程 (9), 可以得到:

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k) = \int \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*) p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*) d\mathbf{X}_M + L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}_M^*) \quad (11)$$

利用式 (10) 和 (11), 可以推导出 $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}_M^*)$ 和 $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)$ 的关系如下^[18, 23]:

$$L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}_M^*) - L_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{Z}_M^*) = Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k) - Q(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_k) + \text{KL}(p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*) || p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*)) \quad (12)$$

其中, 表达式 $\text{KL}(p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*) || p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*))$ 表示密度函数 $p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*)$ 相对于密度函数 $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*)$ 的 Kullback-Leibler 距离. 因为 Kullback-Leibler 距离是非负的, 从而根据方程 (12) 可以得到如下不等式:

$$L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}_M^*) - L_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{Z}_M^*) \geq Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k) - Q(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_k) \quad (13)$$

从方程 (13) 中可以看到, 如果存在第 $k+1$ 步 $\boldsymbol{\theta}$ 的一个合适近似 $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$, 使得 $Q(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\theta}_k) \geq Q(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_k)$, 那么 $L_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}}(\mathbf{Z}_M^*) \geq L_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{Z}_M^*)$. 因此 EM 算法能保证 $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}_M^*)$ 在迭代过程中是非递减的. EM 算法的具体实施被总结在如下的算法 1 中.

算法 1. EM 算法

- 1) 选择一个未知参数的初始估计 $\boldsymbol{\theta}_0$;
- 2) E-step: 根据方程 (9), 计算 $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)$;
- 3) M-step:

$$\text{最优化计算 } \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k) \quad (14)$$

- 4) 重复步骤 2) 和 3), 直到满足收敛要求.

从算法 1 中我们可以看出, EM 算法分为两步, 即 E-step 和 M-step. 下面给出 E-step 和 M-step 的详细计算方法.

2 带有色量测噪声非线性系统辨识

2.1 E-step

E-step 利用现有未知参数的估计值计算完整数据对数似然的期望.

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k) = \int \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*) p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*) d\mathbf{X}_M \quad (15)$$

利用新构造的状态空间模型的马尔科夫性质和贝叶斯定理, 我们可以将联合的概率密度

$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*)$ 分解如下:

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_M, \mathbf{Z}_M^*) = p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}_M^*|\mathbf{X}_M) p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_M) = \prod_{t=0}^{M-1} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}_{t+1}^*|\mathbf{Z}_t^*, \mathbf{X}_M) p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{X}_t) = \prod_{t=0}^{M-1} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}_{t+1}^*|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) \quad (16)$$

将方程 (16) 代入方程 (15) 中, 可以得到:

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k) = \sum_{t=0}^{M-1} \int [\log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) + \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}_{t+1}^*|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t)] p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{X}_M|\mathbf{Z}_M^*) d\mathbf{X}_M = \sum_{t=0}^{M-1} \int \int \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t|\mathbf{Z}_M^*) \times d\mathbf{x}_{t+1} d\mathbf{x}_t + \sum_{t=0}^{M-1} \int \int \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}_{t+1}^*|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) \times p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t|\mathbf{Z}_M^*) d\mathbf{x}_{t+1} d\mathbf{x}_t = Q_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k) + Q_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k) \quad (17)$$

从方程 (17) 中我们可以看到, 为了计算 $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)$, 需要解决两个问题. 第一个问题是计算平滑密度 $p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_t|\mathbf{Z}_M^*)$ ($t=0, \dots, M$), 其中 $\boldsymbol{\theta}_k$ 是在第 k 步迭代中获得的未知参数估计. 为了解决这个问题, 我们将使用带有色量测噪声高斯近似平滑器来计算此平滑密度. 考虑到文献 [32] 已经详细地介绍并推导了此平滑器, 因此本文不再赘述. 第二个问题是关于计算联合平滑密度 $p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t|\mathbf{Z}_M^*)$. 接下来, 我们将详细地推导此联合平滑密度的计算公式.

根据贝叶斯定理, $p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t|\mathbf{Z}_M^*)$ 可以被分解如下:

$$p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t|\mathbf{Z}_M^*) = p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{Z}_M^*) \times p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{Z}_M^*) \quad (18)$$

利用新构造的状态空间模型的马尔科夫性质, 可以得到如下表达式:

$$p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{Z}_M^*) = p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{Z}_{t+1}^*) \quad (19)$$

根据贝叶斯准则, 密度 $p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{Z}_{t+1}^*)$ 可以表示为

$$p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{Z}_{t+1}^*) = \frac{p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^*|\mathbf{Z}_t^*)}{p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^*|\mathbf{Z}_t^*)} = \frac{p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{z}_{t+1}^*|\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{Z}_t^*) p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{Z}_t^*)}{p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^*|\mathbf{Z}_t^*)} = \frac{p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{z}_{t+1}^*|\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_t|\mathbf{Z}_t^*)}{p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^*|\mathbf{Z}_t^*)} \quad (20)$$

将方程 (19) 和 (20) 代入到方程 (18) 中, 可以得到:

$$p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t | \mathbf{Z}_M^*) = p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{Z}_M^*) p_{\theta_k}(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}_t^*) \times \frac{p_{\theta_k}(\mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t)}{p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{Z}_t^*)} \quad (21)$$

根据总概率准则和贝叶斯定理, 联合预测密度 $p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{Z}_t^*)$ 可以被计算如下:

$$p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{Z}_t^*) = \int p_{\theta_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{Z}_t^*) d\mathbf{x}_t = \int p_{\theta_k}(\mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{Z}_t^*) p_{\theta_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{Z}_t^*) d\mathbf{x}_t = \int p_{\theta_k}(\mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) p_{\theta_k}(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}_t^*) d\mathbf{x}_t \quad (22)$$

在带有色量测噪声高斯近似滤波器和平滑器的框架下, 滤波密度 $p_{\theta_k}(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}_t^*)$ 和平滑密度 $p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{Z}_M^*)$ 都可被近似为^[31-32]

$$p_{\theta_k}(\mathbf{x}_t | \mathbf{Z}_t^*) = N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) \quad (23)$$

$$p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{Z}_M^*) = N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) \quad (24)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ 和 $P_{t|t}$ 是 t 时刻的滤波估计和相应的估计误差协方差矩阵, $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}$ 和 $P_{t+1|M}$ 是 $t+1$ 时刻的平滑估计和相应的估计误差协方差矩阵, 且 $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$, $P_{t|t}$, $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}$, $P_{t+1|M}$ 都是当前未知参数估计 θ_k 的函数.

将方程 (23) 和 (24) 代入到方程 (21) 和 (22), 联合平滑密度 $p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t | \mathbf{Z}_M^*)$ 可以被计算如下:

$$p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t | \mathbf{Z}_M^*) = g_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) \times N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) \quad (25)$$

其中, $g_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t)$ 和 $p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{Z}_t^*)$ 可以被表示如下:

$$g_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) = \frac{p_{\theta_k}(\mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t)}{p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{Z}_t^*)} \quad (26)$$

$$p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{Z}_t^*) = \int p_{\theta_k}(\mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) \times p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \quad (27)$$

将方程 (25) 代入方程 (17) 中, 我们可以计算 $Q_1(\theta, \theta_k)$ 和 $Q_2(\theta, \theta_k)$ 如下:

$$Q_1(\theta, \theta_k) = \sum_{t=0}^{M-1} \int \int \log p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) g_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) \times$$

$$N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \quad (28)$$

$$Q_2(\theta, \theta_k) = \sum_{t=0}^{M-1} \int \int \log p_{\theta}(\mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) \times g_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) d\mathbf{x}_{t+1} \times N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \quad (29)$$

其中, 方程 (28) 和 (29) 是两个双重的高斯加权积分. 我们可以利用数值积分的方法来近似地计算这两个高斯加权积分, 比如容积准则^[4, 8, 14-15]、无迹变换^[10, 16]、稀疏网格求积准则^[11]、傅里叶埃尔米特准则^[6]、随机蒙特卡洛方法^[23].

2.2 M-step

在本节中, 我们将解决方程 (14) 的最大化问题. 利用系统方程 (1) 和新构造的带白色量测噪声的量测方程 (4) ~ (6), 状态转移密度 $p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t)$ 和似然密度 $p_{\theta}(\mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t)$ 可以被表示如下:

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi Q|}} \exp[-0.5(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \theta') - \mathbf{q})^T Q^{-1}(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \theta') - \mathbf{q})] \quad (30)$$

$$p_{\theta}(\mathbf{z}_{t+1}^* | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi R|}} \exp[-0.5(\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^* \times (\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \theta') - \mathbf{r})^T R^{-1}(\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^* (\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \theta') - \mathbf{r})] \quad (31)$$

其中, $|\cdot|$ 表示矩阵的行列式.

将方程 (30) 代入方程 (28), $Q_1(\theta, \theta_k)$ 可以被重新表示为

$$Q_1(\theta, \theta_k) = \sum_{t=0}^{M-1} \int \int [-0.5n \log 2\pi - 0.5 \log |Q| - 0.5(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \theta') - \mathbf{q})^T Q^{-1}(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \theta') - \mathbf{q})] g_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) \times d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \quad (32)$$

将方程 (31) 代入方程 (29), $Q_2(\theta, \theta_k)$ 可以被重新表示为

$$Q_2(\theta, \theta_k) = \sum_{t=0}^{M-1} \int \int [-0.5m \log 2\pi - 0.5 \log |R| - 0.5(\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^* (\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \theta') - \mathbf{r})^T R^{-1}(\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^* (\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \theta') - \mathbf{r})] g_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1};$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M} d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \quad (33)$$

利用方程 (32) 和 (33), $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)$ 关于 $Q, R, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ 的一阶导数被分别计算如下:

$$\begin{aligned} \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{dQ} &= \sum_{t=0}^{M-1} \int \int [-0.5Q^{-1} + 0.5Q^{-1} \times \\ &(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}') - \mathbf{q})(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}') - \mathbf{q})^T \times \\ &Q^{-1}] g_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) d\mathbf{x}_{t+1} \times \\ &N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{dR} &= \sum_{t=0}^{M-1} \int \int [-0.5R^{-1} + 0.5R^{-1}(\mathbf{z}_{t+1}^* - \\ &\mathbf{h}_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}') - \mathbf{r})(\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}') - \\ &\mathbf{r})^T R^{-1}] g_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) \times \\ &d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d\mathbf{q}} &= \sum_{t=0}^{M-1} \int \int 0.5Q^{-1}(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}') - \\ &\mathbf{q}) g_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) d\mathbf{x}_{t+1} \times \\ &N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d\mathbf{r}} &= \sum_{t=0}^{M-1} \int \int 0.5R^{-1}(\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}, \\ &\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}') - \mathbf{r}) g_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, \\ &P_{t+1|M}) d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (37)$$

根据方程 (14) 中 $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ 的定义, $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ 需要满足如下条件:

$$\left. \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{dQ} \right|_{Q=Q_{k+1}, \mathbf{q}=\mathbf{q}_{k+1}} = \mathbf{0} \quad (38)$$

$$\left. \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{dR} \right|_{R=R_{k+1}, \mathbf{r}=\mathbf{r}_{k+1}} = \mathbf{0} \quad (39)$$

$$\left. \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d\mathbf{q}} \right|_{Q=Q_{k+1}, \mathbf{q}=\mathbf{q}_{k+1}} = \mathbf{0} \quad (40)$$

$$\left. \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d\mathbf{r}} \right|_{R=R_{k+1}, \mathbf{r}=\mathbf{r}_{k+1}} = \mathbf{0} \quad (41)$$

$$\left. \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d\theta'^j} \right|_{\theta'^j = \theta'^j_{k+1}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (42)$$

其中, $\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \{\theta'_{k+1}, Q_{k+1}, R_{k+1}, \mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}\}$ 和 $\boldsymbol{\theta}'_{k+1} = [\theta'^1_{k+1}, \dots, \theta'^j_{k+1}, \dots, \theta'^s_{k+1}]^T$.

根据方程 (38) ~ (41), 我们可以获得第 $k+1$ 步未知噪声参数估计 $\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}, Q_{k+1}$ 和 R_{k+1} 的解析表达式如下:

$$\mathbf{q}_{k+1} = A^{-1}\mathbf{B} \quad (43)$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = A^{-1}\mathbf{C} \quad (44)$$

$$Q_{k+1} = A^{-1}D \quad (45)$$

$$R_{k+1} = A^{-1}E \quad (46)$$

其中, A 为一个标量, \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 为向量, D 和 E 为方阵, 它们的计算式可以表示如下:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{t=0}^{M-1} \int \int g_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, \\ &P_{t+1|M}) d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \sum_{t=0}^{M-1} \int \int (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}')) \times \\ &g_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) \times \\ &d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \sum_{t=0}^{M-1} \int \int (\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}')) \times \\ &g_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) \times \\ &d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{t=0}^{M-1} \int \int (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}') - \mathbf{q}_{k+1})(\mathbf{x}_{t+1} - \\ &\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}') - \mathbf{q}_{k+1})^T g_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, \\ &P_{t+1|M}) d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=0}^{M-1} \int \int (\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}') - \mathbf{r}_{k+1}) \times \\ &(\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}') - \mathbf{r}_{k+1})^T g_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) \times \\ &N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (51)$$

利用方程 (47) ~ (51), 方阵 D 和 E 可以重新表示如下:

$$D = F - \mathbf{q}_{k+1}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{q}_{k+1}^T + A\mathbf{q}_{k+1}\mathbf{q}_{k+1}^T \quad (52)$$

$$E = H - \mathbf{r}_{k+1} \mathbf{C}^T - \mathbf{C} \mathbf{r}_{k+1}^T + A \mathbf{r}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1}^T \quad (53)$$

其中, F 和 H 可以表示如下:

$$F = \sum_{t=0}^{M-1} \int \int (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}')) \times (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}'))^T \mathbf{g}_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) \times N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) d\mathbf{x}_{t+1} \times N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \quad (54)$$

$$H = \sum_{t=0}^{M-1} \int \int (\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}')) (\mathbf{z}_{t+1}^* - \mathbf{h}_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}'))^T \mathbf{g}_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) N(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|M}, P_{t+1|M}) d\mathbf{x}_{t+1} N(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \quad (55)$$

代入方程 (52) 和 (53) 到方程 (45) 和 (46), 并利用方程 (43) 和 (44), 我们可以得到:

$$Q_{k+1} = A^{-1} F - \mathbf{q}_{k+1} A^{-1} \mathbf{B}^T - A^{-1} \mathbf{B} \mathbf{q}_{k+1}^T + \mathbf{q}_{k+1} \mathbf{q}_{k+1}^T = A^{-1} F - \mathbf{q}_{k+1} \mathbf{q}_{k+1}^T \quad (56)$$

$$R_{k+1} = A^{-1} H - \mathbf{r}_{k+1} A^{-1} \mathbf{C}^T - A^{-1} \mathbf{C} \mathbf{r}_{k+1}^T + \mathbf{r}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1}^T = A^{-1} H - \mathbf{r}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1}^T \quad (57)$$

但是, 根据方程 (42), 我们不可能求得 $\boldsymbol{\theta}'_{k+1}$ 的一个解析解, 因为 $\boldsymbol{\theta}'_{k+1}$ 被耦合在复杂的非线性方程中. 为此, 我们需要借助数值方法来求解其最大似然估计. 本文将采用 Newton 方法来处理这个问题, 因为 Newton 方法具有二次收敛速度. 在第 k 次迭代的基础上, 第 $k+1$ 次迭代 $\boldsymbol{\theta}'_{k+1}$ 可以被更新如下^[37-38]:

$$\boldsymbol{\theta}'_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k^j - \alpha^j \left(\frac{d^2 Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d(\boldsymbol{\theta}^j)^2} \Big|_{\boldsymbol{\theta}^j = \boldsymbol{\theta}_k^j} \right)^{-1} \times \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d\boldsymbol{\theta}^j} \Big|_{\boldsymbol{\theta}^j = \boldsymbol{\theta}_k^j} \quad (58)$$

其中, $\frac{d^2 Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d(\boldsymbol{\theta}^j)^2}$ 为 $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)$ 关于 $\boldsymbol{\theta}^j$ 的二阶导数, α^j 为 Newton 搜索步长. 通过合理的选择搜索步长可以保证 $Q(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\theta}_k) \geq Q(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_k)$, 从而使得 $L_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}}(\mathbf{Z}_M^*) \geq L_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{Z}_M^*)$, 即 $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ 将比 $\boldsymbol{\theta}_k$ 更接近真实的 $\boldsymbol{\theta}$. 一般来说, 当迭代步数 k 达到预先设定的迭代次数 N 时, 迭代搜索将终止^[18].

本文提出的带有色量测噪声非线性系统辨识算法被详细地总结在算法 2 中.

算法 2. 带有色量测噪声非线性系统的辨识算法

1) 选择一个初始估计 $\boldsymbol{\theta}_0$, 搜索步长 α^j , 迭代次数 N , 并设置初始迭代步数 $k = 0$.

2) 基于当前的未知参数估计 $\boldsymbol{\theta}_k$, 并利用带有色量测噪声的高斯近似滤波器和平滑器计算滤波密度 (23) 和平滑密度 (24).

3) 将计算得到的滤波密度和平滑密度代入方程 (47) ~ (49) 和方程 (54) 和 (55) 中求得 A, B, C, F, H , 并利用滤波密度和平滑密度计算 $\frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d\boldsymbol{\theta}^j} \Big|_{\boldsymbol{\theta}^j = \boldsymbol{\theta}_k^j}$ 和 $\frac{d^2 Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d(\boldsymbol{\theta}^j)^2} \Big|_{\boldsymbol{\theta}^j = \boldsymbol{\theta}_k^j}$.

4) 将获得的信息 $A, B, C, F, H, \frac{dQ(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d\boldsymbol{\theta}^j} \Big|_{\boldsymbol{\theta}^j = \boldsymbol{\theta}_k^j}$ 和 $\frac{d^2 Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)}{d(\boldsymbol{\theta}^j)^2} \Big|_{\boldsymbol{\theta}^j = \boldsymbol{\theta}_k^j}$ 代入方程 (43) 和 (44), (56) ~ (58) 中更新 $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$.

5) $k+1 \rightarrow k$ 并检查迭代终止条件 $k > N$. 如果这个条件满足, 那么迭代终止; 否则, 迭代继续, 并返回步骤 2).

2.3 收敛性讨论

从方程 (13) 中可以看出, 如果 $Q(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\theta}_k) \geq Q(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_k)$, 那么

$$L_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}}(\mathbf{Z}_M^*) \geq L_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{Z}_M^*) \quad (59)$$

并且等号成立当且仅当满足如下条件^[23]:

$$Q(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\theta}_k) = Q(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_k) \quad (60)$$

$$p_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}}(\mathbf{X}_M | \mathbf{Z}_M^*) = p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{X}_M | \mathbf{Z}_M^*) \quad (61)$$

根据方程 (59) ~ (61), 当 $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}_M^*)$ 是一个关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的凸函数时, 并满足^[23]:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} [Q(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\theta}_k) - Q(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_k)] = 0 \quad (62)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} [p_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}}(\mathbf{X}_M | \mathbf{Z}_M^*) - p_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{X}_M | \mathbf{Z}_M^*)] = 0 \quad (63)$$

那么

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta} \quad (64)$$

非线性系统辨识的收敛性是一个重要但非常困难的问题. 文献 [23] 指出, 在非线形系统辨识中, 因为其包含的多维非线性积分一般无法解析求解, 从而无法获得 $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)$ 和 $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_M | \mathbf{Z}_M^*)$ 的解析解, 所以通常情况下无法分析 EM 算法的收敛性或给出 EM 算法的收敛性条件. 文献 [18] 指出, 在实际工程应用中, 似然函数 $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}_M^*)$ 可能是一个多峰函数, 存在多个局部解, 而 EM 算法无法避开这个问题. 为此, 接下来本文将定性地讨论参数选择对所提出算

法收敛性的影响,并说明该算法的适用领域和适用条件.

当似然函数 $L_{\theta}(\mathbf{Z}_M^*)$ 是一个多峰函数时,初始估计 θ_0 和搜索步长 α^j 对提出算法的收敛性有显著的影响. 如果 θ_0 与最优解很接近,并且 α^j 较小,那么 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta_k = \theta$. 如果 θ_0 与最优解很接近,但是 α^j 较大,那么随着迭代的进行, θ_k 可能会偏离最优解. 如果 θ_0 与最优解相差很大,并且 α^j 较小,那么随着迭代的进行, θ_k 可能会陷入局部解. 如果 θ_0 与最优解相差很大,但是 α^j 较大,随着迭代进行 θ_k 依然可能偏离最优解或者陷入局部解. 因此,通过选取与最优解相近的初值和适当的搜索步长可以改善提出算法的收敛性. 在很多实际应用中,用户对模型中的未知参数的大致取值范围都有一定的了解,这种信息可以帮助用户选择合理的初值,以更好地应用本文所提出的算法.

在本文所提出的辨识算法中,滤波密度 $p_{\theta_k}(\mathbf{x}_t|\mathbf{Z}_t^*)$ 和平滑密度 $p_{\theta_k}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{Z}_M^*)$ 都被近似为高斯分布,并且它们的高斯近似精度会随着噪声方差的增大而降低,这是因为系统的非线性度会随着噪声方差 Q 和 R 增大而增大^[39]. 滤波密度和平滑密度的高斯近似误差会增大参数 θ 的估计误差,而参数 θ 的估计误差反过来又会增大滤波密度和平滑密度的高斯近似误差,从而使得参数 θ 的估计误差随着迭代的进行而累积,并且噪声方差越大这种累积误差也越大. 因此,本文所提出算法的辨识精度会随着噪声方差增大而降低. 此外,与文献 [18, 24–25] 一样,本文所提出算法只有在具有较低或者适中噪声方差的非线性系统中才会收敛,而对于具有大噪声方差的非线性系统,提出的算法可能会出现发散的情况,这是因为大的噪声方差可能会导致巨大的累积误差.

3 仿真

本节将通过单变量非平稳增长模型、纯方位跟踪模型、二维数值模型以及调频信号模型的仿真来验证本文所提出的带有色量测噪声非线性系统辨识算法的有效性和性能. 为了实施本文所提出的算法,在接下来的仿真中,本文将使用带有色量测噪声的 CKF^[31] 和 CKS^[32] 来近似计算滤波密度 (23) 和平滑密度 (24), 并采用三阶球径容积准则^[4] 来近似计算式 (47)~(49) 和式 (54)~(55) 中的高斯加权积分. 此外,与文献 [18, 23] 一样,在每次独立的蒙特卡洛仿真中,本文都从以真实参数为中心的对称区间中随机选取未知参数的初值 θ_0 .

正如引言中所阐述的,对于带有色量测噪声的非线性系统辨识问题,现有的非线性系统辨识算法都将会失效,因为带白色量测噪声的贝叶斯递推关

系将不再适用于有色量测噪声情况. 此外,在接下来的带有色量测噪声的非线性系统辨识的仿真实验中,现有的非线性系统辨识算法都出现了发散情况. 为此在接下来的仿真中将不再给出现有的非线性系统辨识方法的仿真结果.

3.1 单变量非平稳增长模型

单变量非平稳增长模型具有强非线性,并且它已经被广泛地用作一个标准问题来验证非线性滤波器、非线性平滑器以及非线性系统辨识算法的性能^[3, 18, 23]. 它的系统方程可以表示如下:

$$x_t = ax_{t-1} + b \frac{x_{t-1}}{1 + x_{t-1}^2} + u_{t-1} + w_{t-1} \quad (65)$$

其中, $u_{t-1} = 8 \cos(1.2t)$ 为控制输入,初始状态 $x_0 \sim N(x_0; 0, P_0)$, 系统噪声 $w_t \sim N(w_t; 0, Q)$ 为高斯白噪声过程. 为了研究本文所提出算法的性能,在接下来的仿真中,我们将考虑如下的线性量测模型和非线性量测模型,其中线性的量测模型表示如下^[25]:

$$z_t = dx_t + v_t \quad (66)$$

非线性的量测模型表示如下^[3, 18, 23]:

$$z_t = ex_t^2 + v_t \quad (67)$$

在这两个量测模型中,量测噪声 v_t 都为高斯有色噪声过程,它的一阶自回归模型表示如下:

$$v_t = 0.5v_{t-1} + \xi_{t-1} \quad (68)$$

其中, $\xi_t \sim N(\xi_t; 0, R)$ 为高斯白噪声过程,并且它与 w_t 不相关. 在接下来的仿真中,本文运行了 130 次独立的蒙特卡洛仿真,其中每次蒙特卡洛仿真的量测样本数 $M = 2000$, 搜索步长 $\alpha = 1$, 迭代次数为 $N = 100$. 为了验证所提出算法的性能,我们将考虑如下三种仿真.

仿真 1. 在仿真 1 中,我们将研究提出算法在线性量测和非线性量测情况下的性能. 仿真参数选择如下, $P_0 = 0.01$, 真实的模型参数和噪声参数^[18]:

$$[a, b, d, e, Q, R] = [0.5, 2, 0.5, 0.05, 0, 0.001] \quad (69)$$

在此仿真中,为了保证辨识算法的稳定性,系统噪声方差被初始化为 $Q = 0.001$ ^[18, 23]. 在线性量测情况下,模型参数 a, b, d 和噪声参数 Q, R 的估计结果如图 1 和图 2 所示. 在非线性量测情况下,模型参数 a, b, e 和噪声参数 Q, R 的估计结果如图 3 和图 4 所示. 此外,为了进一步展示本文所提出算法的性能,表 1 和表 2 分别给出了未知模型参数和噪声参数在线性量测和非线性量测情况下的最终估计.

表 1 线性量测情况下, 真实的参数值和估计的参数值 (均值 \pm 标准差)

Table 1 True parameter values and estimated parameter values (mean values \pm standard deviations) for linear measurement case

参数	真实值	估计值
a	0.5	$0.500 \pm 7.315 \times 10^{-4}$
b	2	$1.996 \pm 1.888 \times 10^{-2}$
d	0.5	$0.500 \pm 1.489 \times 10^{-4}$
Q	0	$8.696 \times 10^{-5} \pm 6.450 \times 10^{-5}$
R	0.001	$1.241 \times 10^{-3} \pm 4.404 \times 10^{-5}$

表 2 非线性量测情况下, 真实的参数值和估计的参数值 (均值 \pm 标准差)

Table 2 True parameter values and estimated parameter values (mean values \pm standard deviations) for nonlinear measurement case

参数	真实值	估计值
a	0.5	$0.500 \pm 1.502 \times 10^{-4}$
b	2	1.999 ± 0.004
e	0.05	$0.050 \pm 1.696 \times 10^{-5}$
Q	0	$2.421 \times 10^{-4} \pm 1.187 \times 10^{-4}$
R	0.001	$9.229 \times 10^{-4} \pm 4.890 \times 10^{-5}$

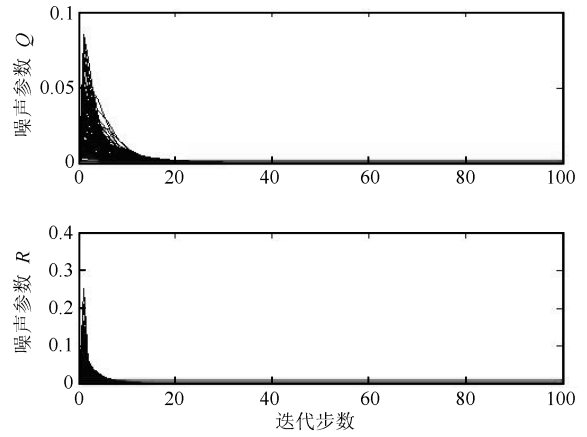


图 2 线性量测情况下噪声参数 Q 和 R 的估计结果
Fig. 2 The estimated results of noise parameters Q and R for linear measurement case

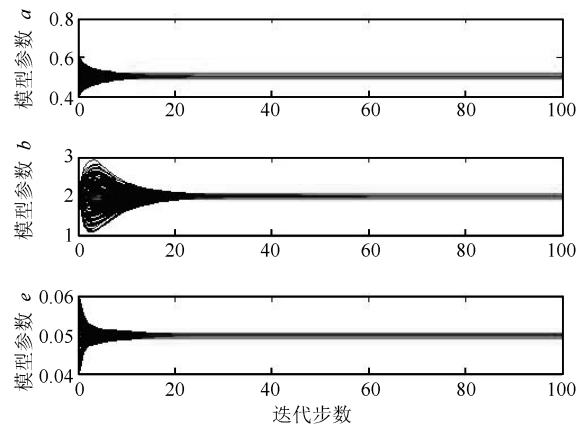


图 3 非线性量测情况下模型参数 a 、 b 、 e 的估计结果
Fig. 3 The estimated results of model parameters a , b and e for nonlinear measurement case

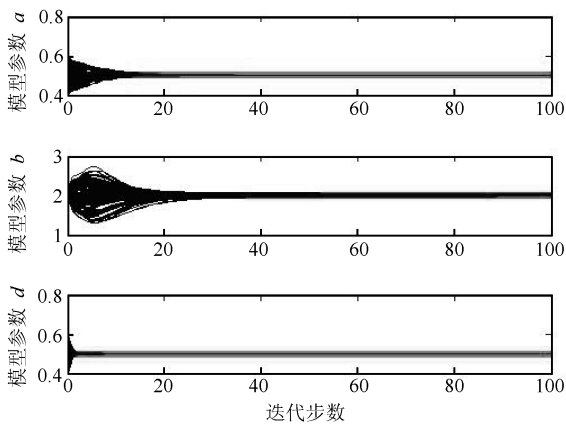


图 1 线性量测情况下模型参数 a 、 b 、 d 的估计结果 (水平的线表明真实的参数值在 $a = 0.5$)

Fig. 1 The estimated results of model parameters a , b and d for linear measurement case (Horizontal line indicates the true parameter value at $a = 0.5$.)

从图 1~图 4 中, 我们可以清晰地看到, 在线性和非线性量测情况下, 本文所提出的算法在每一次蒙特卡洛运行中都是收敛的, 并且这种收敛性独立于初始的参数值和系统量测输出. 从图 1~图 4 中, 我们也可以清晰地看到, 在两种量测情况下, 所有参数估计经 50 步迭代后都收敛了, 因而本文所提出的算法具有较快的收敛速度. 此外, 从图 1~图 4 中可以看出, 本文所提出的算法在线性量测情况下的收敛速度明显快于在非线性量测情况下的收敛速度, 这是因为带有色量测噪声的 CKF 和 CKS 在线性量测情况下比在非线性量测情况下具有更好的性能. 从表 1 和表 2 中, 我们还可以看到, 本文所提出的算法在线性和非线性量测情况下都具有良好的估计精度.

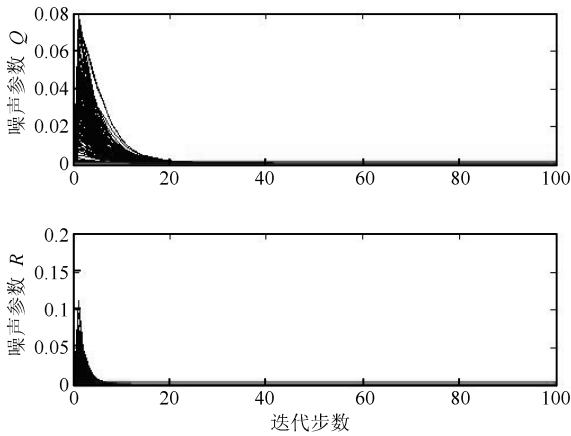


图 4 非线性量测情况下噪声参数 Q 和 R 的估计结果
Fig. 4 The estimated results of noise parameters Q and R for nonlinear measurement case

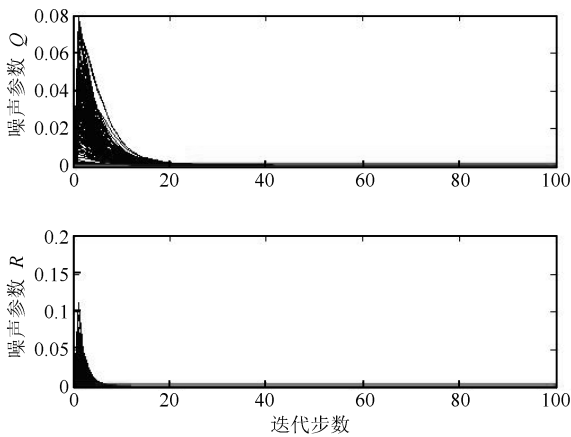


图 4 非线性量测情况下噪声参数 Q 和 R 的估计结果 (上: 非线性量测情况下, 噪声参数 Q 的估计结果; 下: 非线性量测情况下, 噪声参数 R 的估计结果.)

Fig. 4 The estimated results of noise parameters Q and R for nonlinear measurement case (Top: The estimated results of noise parameter Q for nonlinear measurement case; Bottom: The estimated results of noise parameter R for nonlinear measurement case.)

仿真 2. 在仿真 2 中, 我们将研究提出算法在非线性和大噪声方差情况下的性能. 仿真参数选择如下, $P_0 = 0.1$, 真实的模型参数和噪声参数:

$$[a, b, e, Q, R] = [0.5, 2, 0.05, 0.1, 0.1] \quad (70)$$

在非线性和大噪声方差情况下, 模型参数 a, b, e 和噪声参数 Q, R 的估计结果如图 5 和图 6 所示. 此外, 表 3 给出了未知模型参数和噪声参数在非线性和大噪声方差情况下的最终估计.

通过比较表 2 和表 3 中的仿真结果, 我们可以看到增大噪声方差和初始估计误差方差 P_0 会降低提出算法的辨识精度. 这是因为增大噪声方差和初

始估计误差方差 P_0 会降低带有色量测噪声的 CKF 和 CKS 的估计精度, 从而降低提出算法的精度. 但是, 从图 5、图 6 和表 3 中可以看到, 提出算法在这种情况下依然具有良好的精度和收敛速度.

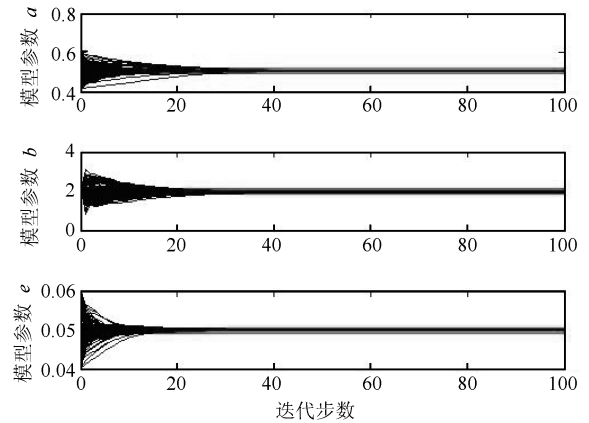


图 5 大噪声方差情况下模型参数 a, b, e 的估计结果
Fig. 5 The estimated results of model parameters a, b and e for large noise variance case

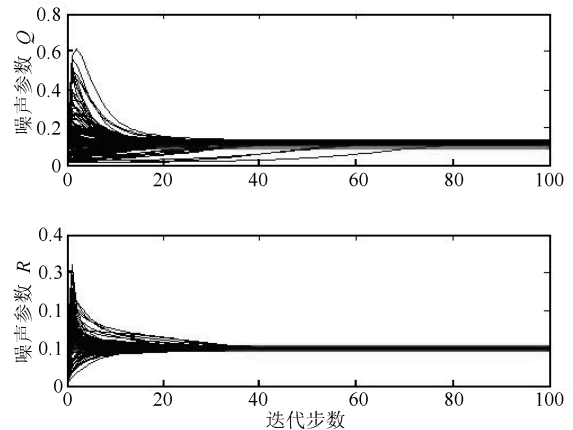


图 6 大噪声方差情况下噪声参数 Q 和 R 的估计结果
Fig. 6 The estimated results of noise parameters Q and R for large noise variance case

仿真 3. 在仿真 3 中, 我们将研究提出算法在非高斯分布情况下的性能. 在此仿真中, 系统噪声和量测噪声是均值为 0 方差为 Q 和 R 的指数过程. 仿真参数选择如下, $P_0 = 0.1$, 真实的模型参数和噪声方差参数:

$$[a, b, e, Q, R] = [0.5, 2, 0.05, 0.1, 0.1] \quad (71)$$

在非线性和指数噪声情况下, 模型参数 a, b, e 和噪声参数 Q, R 的估计结果如图 7 和图 8 所示. 此外, 表 4 给出了未知模型参数和噪声参数在非线性和指数噪声情况下的最终估计.

表 3 大噪声方差情况下, 真实的参数值和估计的参数值 (均值 \pm 标准差)

Table 3 True parameter values and estimated parameter values (mean values \pm standard deviations) for large noise variance case

参数	真实值	估计值
a	0.5	$0.502 \pm 1.037 \times 10^{-3}$
b	2	1.908 ± 0.025
e	0.05	$0.0500 \pm 9.122 \times 10^{-5}$
Q	0.1	$0.119 \pm 5.358 \times 10^{-3}$
R	0.1	$0.096 \pm 2.076 \times 10^{-3}$

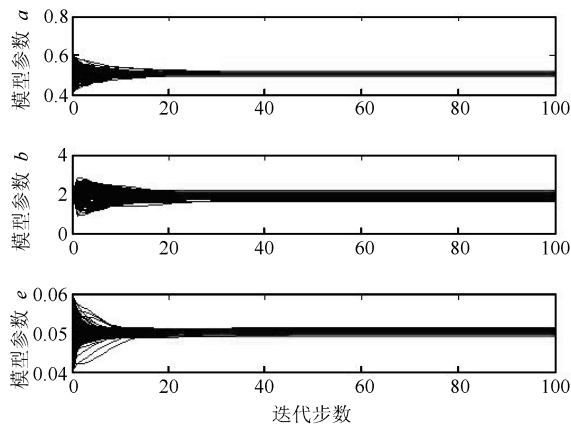


图 7 指数分布情况下模型参数 a 、 b 、 e 的估计结果

Fig. 7 The estimated results of model parameters a , b and e for exponential distribution case

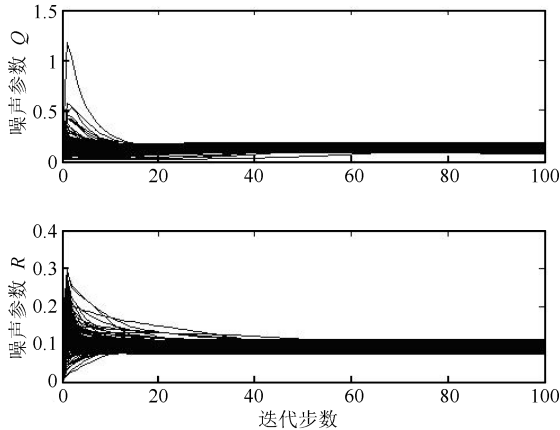


图 8 指数分布情况下噪声参数 Q 和 R 的估计结果

Fig. 8 The estimated results of noise parameters Q and R for exponential distribution case

通过比较表 3 和表 4 中的仿真结果, 我们可以看到提出的算法在指数分布情况下的辨识精度低于在高斯分布情况下的辨识精度. 这是因为本文所提出的算法是针对带高斯噪声的非线性系统而设计的. 因此分布有偏差会降低提出算法的辨识精度. 但是,

从图 7、图 8 和表 4 中可以看到, 提出算法在这种情况下依然具有良好的精度和收敛速度. 以上这些仿真结果展示了本文所提出算法在带有色量测噪声的非线性系统辨识问题中的有效性.

表 4 指数分布情况下, 真实的参数值和估计的参数值 (均值 \pm 标准差)

Table 4 True parameter values and estimated parameter values (mean values \pm standard deviations) for exponential distribution case

参数	真实值	估计值
a	0.5	$0.505 \pm 3.035 \times 10^{-3}$
b	2	1.852 ± 0.079
e	0.05	$0.0502 \pm 2.572 \times 10^{-4}$
Q	0.1	$0.129 \pm 1.871 \times 10^{-2}$
R	0.1	$0.092 \pm 8.101 \times 10^{-3}$

3.2 纯方位跟踪

纯方位跟踪模型为二维非线性模型, 其离散模型如下^[40-41]:

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1} \quad (72)$$

$$z_t = \text{atan2}(\mathbf{x}_{2,t} - 5 \sin(t), \mathbf{x}_{1,t} - 5 \cos(t)) + v_t \quad (73)$$

$$v_t = 0.5v_{t-1} + \xi_{t-1} \quad (74)$$

其中, $\mathbf{u}_{t-1} = [8 \sin(t), 8 \sin(t)]^T$ 为控制输入, 状态 $\mathbf{x}_t = [\mathbf{x}_{1,t} \ \mathbf{x}_{2,t}]^T = [s \ t]^T$, 表示 $s-t$ 平面内 (笛卡尔坐标系) 的位置, 初始状态真实值 $\mathbf{x}_0 = [20 \ 5]^T$, 初始协方差阵 $P_{0|0} = 0.01 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 量测噪声 v_t 为高斯有色噪声, 它的一阶自回归模型如式 (74) 所示. \mathbf{w}_t 和 ξ_t 为不相关的高斯白噪声过程, 它们的分布函数如下:

$$\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N} \left(\mathbf{w}_t; \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \right) \\ \xi_t \sim \mathcal{N}(\xi_t; r, R) \quad (75)$$

在此仿真中, 真实的噪声参数被设置为

$$[q_1, q_2, Q_1, Q_2, r, R] = [0.1, 0.1, 0, 0, 0.5, 0.001] \quad (76)$$

在此仿真例子中, 150 次独立的蒙特卡洛仿真被执行, 其中每次蒙特卡洛仿真的量测样本数 $M =$

3000, 迭代次数为 $N = 50$. 此外, 为了保证所提出辨识算法的稳定性, 系统噪声方差被初始化为 $Q_1 = Q_2 = 0.001$ ^[18, 23]. 噪声参数 q_1, q_2, Q_1, Q_2, r, R 的估计结果如图 9~图 11 所示. 此外, 为了进一步展示本文所提出算法的性能, 表 5 中给出了未知噪声参数的最终估计.

从图 9~图 11 中, 可以看到本文所提出的算法在每一次蒙特卡洛运行中都是收敛的, 并且这种收敛性独立于初始的参数值和系统量测输出. 从图 9~图 11 中, 也可以看到所有参数估计经 50 步迭代后都收敛了, 因而本文所提出的算法具有较快的收敛速度. 从表 5 中, 还可以看到本文所提出的算法具有良好的估计精度. 以上这些仿真结果说明了本文所提出算法可以用于解决带有色量测噪声的非线性系统辨识问题.

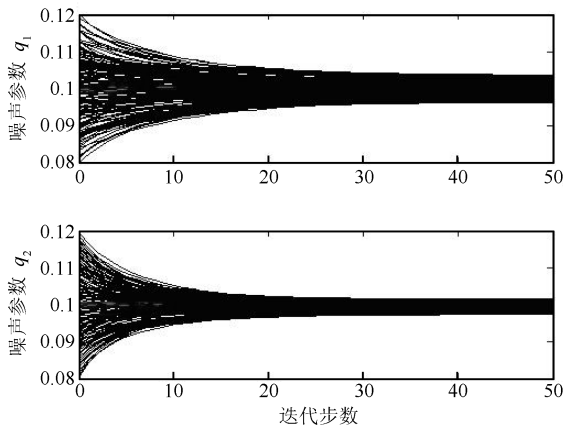


图 9 噪声参数 q_1 和 q_2 的估计结果
Fig. 9 The estimated results of noise parameters q_1 and q_2

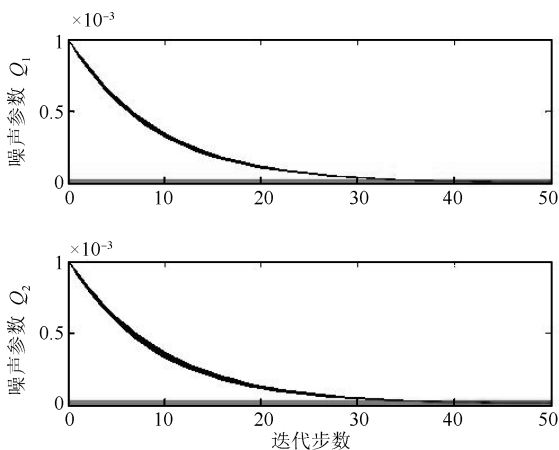


图 10 噪声参数 Q_1 和 Q_2 的估计结果
Fig. 10 The estimated results of noise parameters Q_1 and Q_2

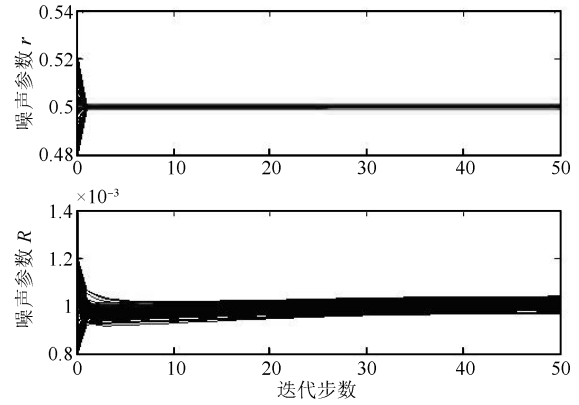


图 11 噪声参数 r 和 R 的估计结果
Fig. 11 The estimated results of noise parameters r and R

表 5 真实的参数值和估计的参数值 (均值 \pm 标准差)
Table 5 True parameter values and estimated parameter values (mean values \pm standard deviations)

参数	真实值	估计值
q_1	0.1	0.0997 ± 0.0023
q_2	0.1	0.0995 ± 0.0012
Q_1	0	$3.3252 \times 10^{-6} \pm 1.4133 \times 10^{-7}$
Q_2	0	$3.4805 \times 10^{-6} \pm 1.6434 \times 10^{-7}$
r	0.5	$0.5000 \pm 3.6925 \times 10^{-4}$
R	0.001	$0.0010 \pm 1.7187 \times 10^{-5}$

3.3 二维数值模型

考虑如下的二维带有色量测噪声的非线性离散状态空间模型:

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,t} \\ \mathbf{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \mathbf{x}_{1,t-1} + u_{t-1} \\ \lambda \arctan(\mathbf{x}_{1,t-1} + \mathbf{x}_{2,t-1}) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_{t-1} \quad (77)$$

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{x}_{1,t}) \\ \sin(\mathbf{x}_{2,t}) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_t \quad (78)$$

$$\mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{t-1} + \boldsymbol{\xi}_{t-1} \quad (79)$$

其中, $u_{t-1} = 8 \cos(1.2t)$ 为控制输入, 初始状态真实值 $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T$, 初始协方差阵 $P_{0|0} = 0.01 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 量测噪声 v_t 为高斯有色噪声, 它的一阶自回归模型如 (79) 所示. $\mathbf{w}_t \sim$

$N(\mathbf{w}_t; \mathbf{0}, Q)$ 和 $\xi_t \sim N(\xi_t; \mathbf{0}, R)$ 为不相关的零均值高斯白噪声过程, 其中

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

在此仿真中, 真实的模型参数和噪声参数被设置为

$$[\mu, \lambda, Q_1, Q_2, R_1, R_2] = [0.5, 0.8, 0, 0, 0.001, 0.001] \quad (81)$$

在此仿真例子中, 100 次独立的蒙特卡洛仿真被执行, 其中每次蒙特卡洛仿真的量测样本数 $M = 2000$, 搜索步长 $\alpha^1 = \alpha^2 = 0.5$, 迭代次数为 $N = 100$. 此外, 为了保证所提出辨识算法的稳定性, 系统噪声方差被初始化为 $Q_1 = 0.0001, Q_2 = 0.001$. 噪声参数 $\mu, \lambda, Q_1, Q_2, R_1, R_2$ 的估计结果如图 12~图 14 所示. 此外, 为了进一步展示本文所提出算法的性能, 表 6 中展示了未知模型参数和噪声参数的最终估计.

表 6 真实的参数值和估计的参数值 (均值 \pm 标准差)

Table 6 True parameter values and estimated parameter values (mean values \pm standard deviations)

参数	真实值	估计值
μ	0.5	$0.5000 \pm 2.201 \times 10^{-4}$
λ	0.8	$0.8002 \pm 7.892 \times 10^{-4}$
Q_1	0	$2.9190 \times 10^{-5} \pm 6.673 \times 10^{-6}$
Q_2	0	$2.9142 \times 10^{-4} \pm 4.992 \times 10^{-5}$
R_1	0.001	$0.0010 \pm 2.336 \times 10^{-5}$
R_2	0.001	$0.00092 \pm 2.884 \times 10^{-5}$

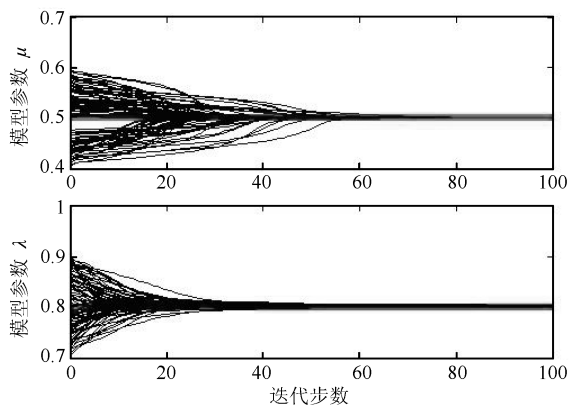


图 12 模型参数 μ 和 λ 的估计结果

Fig. 12 The estimated results of model parameters μ and λ

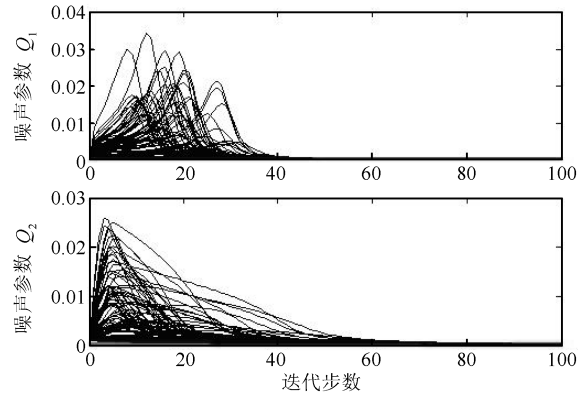


图 13 噪声参数 Q_1 和 Q_2 的估计结果

Fig. 13 The estimated results of noise parameters Q_1 and Q_2

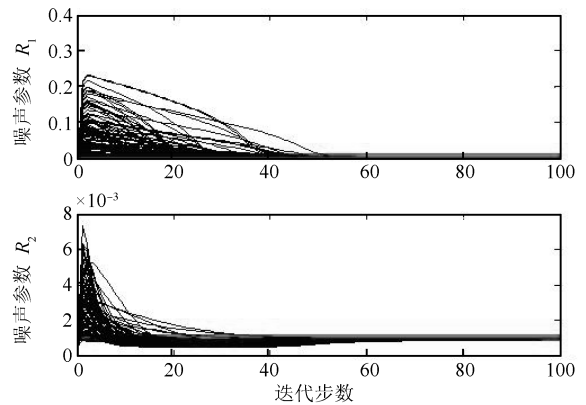


图 14 噪声参数 R_1 和 R_2 的估计结果

Fig. 14 The estimated results of noise parameters R_1 and R_2

从图 12~图 14 中, 可以看到本文所提出的算法在每一次蒙特卡洛运行中都是收敛的, 并且这种收敛性独立于初始的参数值和系统量测输出. 从图 12~图 14 中, 我们也可以看到, 所有参数估计经 70 步迭代后都已经收敛, 因而本文所提出的算法具有较快的收敛速度. 从表 6 中, 还可以看到本文所提出的算法具有良好的估计精度. 以上这些仿真结果说明了本文所提出算法适用于带有色量测噪声的非线性系统辨识.

3.4 调频信号模型

在本节中, 我们将应用本文所提出的算法来估计调频信号模型中的量测噪声方差. 在通信应用中, 调频信号模型经常被用于解调调频信号^[42]. 为了更好地近似实际的通信系统, 文献 [42] 提出利用饱和和非线性函数代替单纯的积分器, 得到如下的离散调

频信号模型^[42-44]:

$$\begin{bmatrix} \omega_{t+1} \\ \varphi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9\omega_t \\ \arctan(0.99\varphi_t + \omega_t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1,t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$z_t = \begin{bmatrix} \cos \varphi_t \\ \sin \varphi_t \end{bmatrix} + \mathbf{v}_t \quad (83)$$

$$\mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{t-1} + \boldsymbol{\xi}_{t-1} \quad (84)$$

当系统具有小的系统噪声方差时,模型的输出是调频信号,当系统具有大的系统噪声方差时,模型的输出类似于一个相移键控信号^[44]. 状态向量 $\mathbf{x}_k := [\omega_k \ \varphi_k]^T$, ω_k 和 φ_k 分别表示信号的频率和相位. 初始状态真实值 $\mathbf{x}_0 = [0.1 \ 0.1]^T$, 初始协方差阵 $P_{0|0} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$. 量测噪声 \mathbf{v}_t 为高斯有色噪声,它的一阶自回归模型如式(84)所示. $w_{1,t} \sim N(w_{1,t}; 0, Q_1)$ 和 $\boldsymbol{\xi}_t \sim N(\boldsymbol{\xi}_t; \mathbf{0}, R)$ 为不相关的零均值高斯白噪声过程,其中

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (85)$$

在接下来的仿真中,100次独立的蒙特卡洛仿真被执行,其中每次蒙特卡洛仿真的量测样本数 $M = 2000$,迭代次数为 $N = 50$,真实的量测噪声方差为 $[R_1, R_2] = [0.1, 0.1]$. 为了研究提出算法的性能,我们考虑如下两种情况. 在第一种情况中,系统噪声方差 $Q_1 = 0.001$,它的仿真结果如图15和表7所示. 在第二种情况中,系统噪声方差 $Q_1 = 0.1$,它的仿真结果如图16和表8所示.(注意,为了保证所提出辨识算法的稳定性, Q_2 被初始化为 0.001.)

从图15和图16中,可以看到本文所提出的算法在每一次蒙特卡洛运行中都是收敛的,并且这种收敛性独立于初始的参数值和系统量测输出. 从表7和表8中,可以看到本文所提出的算法在 $Q_1 = 0.001$ 和 $Q_1 = 0.1$ 情况下都具有良好的估计精度,并且本文所提出算法在 $Q_1 = 0.001$ 情况下的精度高于在 $Q_1 = 0.1$ 情况下的精度,这是因为带有有色量测噪声的CKF和CKS在 $Q_1 = 0.001$ 情况下的精度高于在 $Q_1 = 0.1$ 情况下的精度.

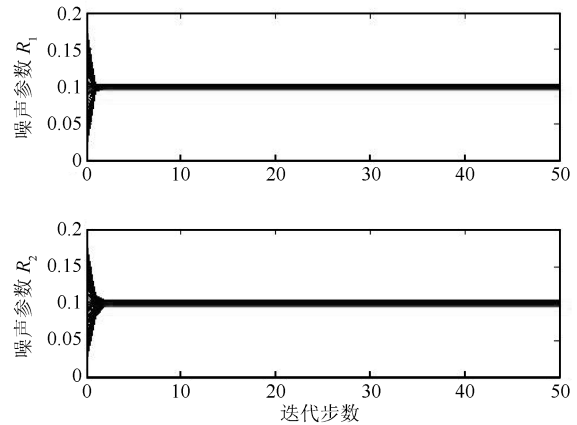


图15 当 $Q_1 = 0.001$ 时噪声参数 R_1 和 R_2 的估计结果
Fig. 15 The estimated results of noise parameters R_1 and R_2 when $Q_1 = 0.001$

表7 当 $Q_1 = 0.001$ 时,真实的参数值和估计的参数值 (均值 \pm 标准差)

Table 7 True parameter values and estimated parameter values when $Q_1 = 0.001$ (mean values \pm standard deviations)

参数	真实值	估计值
R_1	0.1	$0.100 \pm 1.305 \times 10^{-3}$
R_2	0.1	$0.100 \pm 1.686 \times 10^{-3}$

表8 当 $Q_1 = 0.1$ 时,真实的参数值和估计的参数值 (均值 \pm 标准差)

Table 8 True parameter values and estimated parameter values when $Q_1 = 0.1$ (mean values \pm standard deviations)

参数	真实值	估计值
R_1	0.1	$0.107 \pm 2.051 \times 10^{-3}$
R_2	0.1	$0.113 \pm 3.027 \times 10^{-3}$

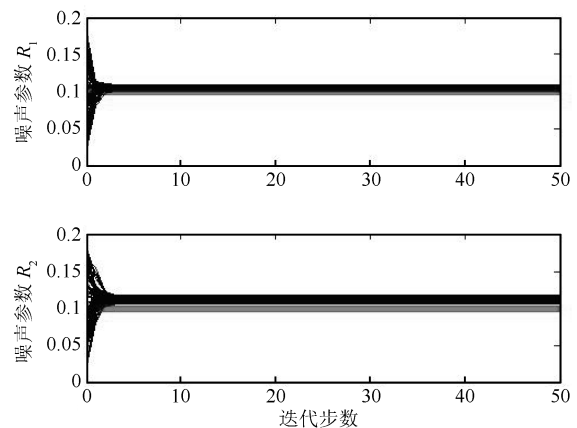


图16 当 $Q_1 = 0.1$ 时噪声参数 R_1 和 R_2 的估计结果
Fig. 16 The estimated results of noise parameters R_1 and R_2 when $Q_1 = 0.1$

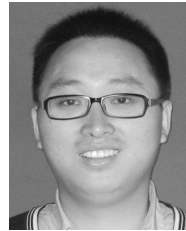
4 结论

本文提出了一种新的基于最大似然判据的带有色量测噪声的非线性系统辨识方法. 仿真结果表明本文所提出的算法适用于解决带有色量测噪声的非线性系统辨识问题, 并且所提出的算法具有较快的收敛速度和良好的估计精度.

References

- Zhang Yong-Gang, Huang Yu-Long, Zhao Lin. A general framework solution of Gaussian filter with multiple step randomly delayed measurements. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 122–135
(张勇刚, 黄玉龙, 赵琳. 一种带多步随机延迟量测高斯滤波器的一般框架解. *自动化学报*, 2015, **41**(1): 122–135)
- Lei M, van Wyk B J, Qi Y. Online estimation of the approximate posterior Cramer-Rao lower bound for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2011, **47**(1): 37–57
- Zhang Yong-Gang, Huang Yu-Long, Li Ning, Zhao Lin. Conditional posterior Cramer-Rao lower bound for nonlinear sequential Bayesian estimation with one-step randomly delayed measurements. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(3): 559–574
(张勇刚, 黄玉龙, 李宁, 赵琳. 带一步随机延迟量测非线性序列贝叶斯估计的条件后验克拉美罗下界. *自动化学报*, 2015, **41**(3): 559–574)
- Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1254–1269
- Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman smoothers. *Automatica*, 2011, **47**(10): 2245–2250
- Sarmavuori J, Särkkä S. Fourier-Hermite Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(6): 1511–1515
- Sarmavuori J, Särkkä S. Fourier-Hermite Rauch-Tung-Striebel smoother. In: Proceedings of the 20th European Signal Processing Conference. Bucharest, Romania: IEEE, 2012. 2109–2113
- Jia B, Xin M, Cheng Y. High-degree cubature Kalman filter. *Automatica*, 2013, **49**(2): 510–518
- Jia B, Xin M. A new class of nonlinear Rauch-Tung-Striebel cubature Kalman smoothers. *ISA Transactions*, 2015, **55**(3): 72–80
- Zhang Yong-Gang, Huang Yu-Long, Wu Zhe-Min, Li Ning. A high order unscented Kalman filtering method. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(5): 838–848
(张勇刚, 黄玉龙, 武哲民, 李宁. 一种高阶无迹卡尔曼滤波方法. *自动化学报*, 2014, **40**(5): 838–848)
- Jia B, Xin M, Cheng Y. Sparse-grid quadrature nonlinear filtering. *Automatica*, 2012, **48**(2): 327–341
- Duník J, Straka O, Šimandl M. Stochastic integration filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(6): 1561–1566
- Zhang X C. A novel cubature Kalman filter for nonlinear state estimation. In: Proceedings of the 2013 IEEE 52nd Annual Conference on Decision and Control. Firenze: IEEE, 2013. 7797–7802
- Zhang Y G, Huang Y L, Li N, Zhao L. Embedded cubature Kalman filter with adaptive setting of free parameter. *Signal Processing*, 2015, **114**: 112–116
- Wang S Y, Feng J C, Tse C K. Spherical simplex-radial cubature Kalman filter. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, **21**(1): 43–46
- Chang L B, Hu B Q, Li A, Qin F J. Transformed unscented Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(1): 252–257
- Ljung L. Perspectives on system identification. In: Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea: IFAC, 2008. 7172–7184
- Gašperin M, Juričić D. Application of unscented transformation in nonlinear system identification. In: Proceedings of the 18th IFAC World Congress. Milano, Italy: IFAC, 2011. 4428–4433
- Zhao Lin, Wang Xiao-Xu, Sun Ming, Ding Ji-Cheng, Yan Chao. Adaptive UKF filtering algorithm based on maximum a posteriori estimation and exponential weighting. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 1007–1019
(赵琳, 王小旭, 孙明, 丁继成, 闫超. 基于极大后验估计和指数加权的自适应 UKF 滤波算法. *自动化学报*, 2010, **36**(7): 1007–1019)
- Zhao L Q, Wang J L, Yu T, Jian H, Liu T J. Design of adaptive robust square-root cubature Kalman filter with noise statistic estimator. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, **256**: 352–367
- Wang Lu, Li Guang-Chun, Qiao Xiang-Wei, Wang Zhao-Long, Ma Tao. An adaptive UKF algorithm based on maximum likelihood principle and expectation maximization algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1200–1210
(王璐, 李光春, 乔相伟, 王兆龙, 马涛. 基于极大似然准则和最大期望算法的自适应 UKF 算法. *自动化学报*, 2012, **38**(7): 1200–1210)
- Bavdekar V A, Deshpande A P, Patwardhan S C. Identification of process and measurement noise covariance for state and parameter estimation using extended Kalman filter. *Journal of Process Control*, 2011, **21**(4): 585–601
- Schön T B, Wills A, Ninness B. System identification of nonlinear state-space models. *Automatica*, 2011, **47**(1): 39–49
- Väänänen V. Gaussian Filtering and Smoothing based Parameter Estimation in Nonlinear Models for Sequential Data [Master dissertation], Aalto University, Finland, 2012
- Kokkala J, Solin A, Särkkä S. Expectation maximization based parameter estimation by sigma-point and particle smoothing. In: Proceedings of the 17th International Conference on Information Fusion. Salamanca, Spain: IEEE, 2014. 1–8
- Wu W R, Chang D C. Maneuvering target tracking with colored noise. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1996, **32**(4): 1311–1320
- Srinivasan S, Aichner R, Kleijn W B, Kellermann W. Multi-channel parametric speech enhancement. *IEEE Signal Processing Letters*, 2006, **13**(5): 304–307
- Jamoos A, Grivel E, Bobillet W, Guidorzi R. Errors-in-variables-based approach for the identification of AR time-varying fading channels. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, **14**(11): 793–796
- Mahmoudi A, Karimi M, Amindavar H. Parameter estimation of autoregressive signals in presence of colored AR(1) noise as a quadratic eigenvalue problem. *Signal Processing*, 2012, **92**(4): 1151–1156
- Wang Xiao-Xu, Liang Yan, Pan Quan, Zhao Chun-Hui, Li Han-Zhou. Unscented Kalman filter for nonlinear systems with colored measurement noise. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(6): 986–998
(王小旭, 梁彦, 潘泉, 赵春晖, 李汉舟. 带有色量测噪声的非线性系统 Unscented 卡尔曼滤波器. *自动化学报*, 2012, **38**(6): 986–998)

- 31 Wang X X, Pan Q. Nonlinear Gaussian filter with the colored measurement noise. In: Proceedings of the 17th International Conference on Information Fusion. Salamanca, Spain: IEEE, 2014. 1–7
- 32 Wang X X, Liang Y, Pan Q, Zhao C H, Yang F. Nonlinear Gaussian smoothers with colored measurement noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(3): 870–876
- 33 Yuan G N, Xie Y J, Song Y, Liang H B. Multipath parameters estimation of weak GPS signal based on new colored noise unscented Kalman filter. In: Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Information and Automation. Harbin, China: IEEE, 2010. 1852–1856
- 34 Titterton D H, Weston J L. *Strapdown Inertial Navigation Technology*. London: Peter Peregrinus, Ltd., 1997.
- 35 Goto S, Nakamura M, Uosaki K. On-line spectral estimation of nonstationary time series based on AR model parameter estimation and order selection with a forgetting factor. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, **43**(6): 1519–1522
- 36 Giurcăneanu C D, Razavi S A. AR order selection in the case when the model parameters are estimated by forgetting factor least-squares algorithms. *Signal Processing*, 2010, **90**(2): 451–466
- 37 Kok M, Dahlin J, Schön T B, Wills A. Newton-based maximum likelihood estimation in nonlinear state space models. In: Proceedings of the 17th IFAC Symposium on System Identification. IFAC, 2015
- 38 Poyiadjis G, Doucet A, Singh S S. Particle approximations of the score and observed information matrix in state space models with application to parameter estimation. *Biometrika*, 2011, **98**(1): 65–80
- 39 Li X R. Measure of nonlinearity for stochastic systems. In: Proceedings of the 15th International Conference on Information Fusion. Singapore: IEEE, 2012. 1073–1080
- 40 Bucy R S, Senne K D. Digital synthesis of non-linear filters. *Automatica*, 1971, **7**(3): 287–298
- 41 Dunik J, Simandl M, Straka O. Unscented Kalman filter: aspects and adaptive setting of scaling parameter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(9): 2411–2416
- 42 Einicke G A, White L B. Robust extended Kalman filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(9): 2596–2599
- 43 Li W L, Jia Y M. H-infinity filtering for a class of nonlinear discrete-time systems based on unscented transform. *Signal Processing*, 2010, **90**(12): 3301–3307
- 44 Jia B, Xin M. Sparse-grid quadrature H_∞ filter for discrete-time systems with uncertain noise statistics. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, **49**(3): 1626–1636



黄玉龙 哈尔滨工程大学自动化学院博士研究生。主要研究方向为惯性导航, 滤波算法, 组合导航。

E-mail: heuedu@163.com

(**HUANG Yu-Long** Ph.D candidate at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers inertial navigation, filtering algorithm, and integrated navigation.)



张勇刚 哈尔滨工程大学自动化学院研究员。2007 年获得英国 Cardiff 大学博士学位。主要研究方向为光纤陀螺, 惯性导航, 滤波算法, 组合导航。本文通信作者。E-mail: zhangyg@hrbeu.edu.cn

(**ZHANG Yong-Gang** Professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. He received his

Ph.D degree from Cardiff University, UK in 2007. His research interest covers fiber-optic gyroscope, inertial navigation, filtering algorithms, and integrated navigation. Corresponding author of this paper.)



李 宁 哈尔滨工程大学自动化学院副教授。主要研究方向为自适应滤波, 组合导航。E-mail: ningli@hrbeu.edu.cn

(**LI Ning** Associate professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. Her research interest covers adaptive filtering and integrated navigation.)



赵 琳 哈尔滨工程大学自动化学院教授。主要研究方向为惯性导航, 卫星导航, 组合导航。

E-mail: zhaolin@hrbeu.edu.cn

(**ZHAO Lin** Professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers inertial navigation, satellite navigation, and integrated navigation.)