

## 基于平衡截断法的离散时间线性 时滞系统的低频域模型降阶

杜鑫<sup>1</sup> 丁大伟<sup>2</sup>

**摘要** 研究在系统工作频率范围为低频区间情形下的离散时间线性时滞系统模型降阶问题. 首先根据时滞系统在零频点处传递函数的性质, 构造了一类匹配其零频响应的带有可调参数的扩展线性时滞系统, 进而在其基础上结合已有的时滞系统平衡截断法给出了新的低频模型降阶算法. 通过调节其中的设计参数, 新方法所得降阶时滞系统模型能够以任意精度逼近原系统的零频响应特性, 进而可以用于改善低频范围内的模型逼近性能. 数值算例验证了所提方法的有效性和优越性.

**关键词** 模型降阶, 平衡截断, 时滞系统, 低频

**引用格式** 杜鑫, 丁大伟. 基于平衡截断法的离散时间线性时滞系统的低频域模型降阶. 自动化学报, 2015, 41(10): 1825–1830

**DOI** 10.16383/j.aas.2015.c150082

## Model Order Reduction of Linear Delay Systems over Low-frequency Ranges via Balanced Truncation Based Approach

DU Xin<sup>1</sup> DING Da-Wei<sup>2</sup>

**Abstract** This paper deals with model's order reduction of discrete-time linear delay systems over low frequency ranges. By introducing a class of parameterized linear systems matching the given delay system at zero frequency, a new balanced truncation based model reduction method is proposed. It is shown that the approximation error at zero frequency can be regulated to be arbitrarily small by scaling the design parameter. A numerical example is included to show the effectiveness and superiority of the proposed method.

**Key words** Model order reduction, balanced truncation, linear delayed systems, low frequency

**Citation** Du Xin, Ding Da-Wei. Model order reduction of linear delay systems over low-frequency ranges via balanced truncation based approach. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(10): 1825–1830

模型降阶是一个在许多工程技术系统分析中必不可少的模型后处理环节<sup>[1-2]</sup>, 许多实际系统如柔性结构系统、电路系统等数学模型通常采用有限元分析、机理分析等手段建立<sup>[3]</sup>, 其模型的阶数(即状态的维数)通常比较高. 直接采用高阶模型来进行后续的仿真、分析及综合会带来计算和实

现上的困难, 要解决这一难题就需要对高阶模型进行降阶处理<sup>[4]</sup>, 即寻找一个低阶的系统模型来替代已有的高阶模型来描述系统输入输出信号之间的动力学特性.

作为一个广泛存在于多个学科领域的研究方向, 在过去的30多年里已有众多学者从不同角度提出了一系列不同类型的模型降阶理论和方法<sup>[5]</sup>. 在自动控制领域也存在许多相关的结果, 其中平衡截断法是一个得到广泛认可的经典模型降阶方法<sup>[6]</sup>, 此外常见的还有一些基于各类数值优化技术的模型降阶方法. 平衡截断法最早由 Moore 在文献 [7] 中提出, 其核心思想在于通过合理的坐标变换来对系统状态进行重新排序, 然后保留其中的“主要状态”来获得一个和原系统逼近程度较高的降阶系统. 该方法所得降阶模型可以在全频范围内都较好地逼近原系统的频率响应特性, 同时在还可以保持原系统的某些特性如稳定性、耗散性等, 此外这类方法通常仅需要求解一些简单的等式或者不等式, 以及进行一些基本的矩阵分解运算, 具有较低的计算复杂度. 因此, 平衡截断法得到了众多学者和工程技术人员的青睐和关注, 并已广泛地应用在包括电路系统、机械系统等众多工程领域. 在过去的30年中, 基于平衡截断的模型降阶理论不断完善, 并逐步推广和应用到一些复杂动力学系统如随机系统、切换系统等模型降阶问题. 与平衡截断法这种以“构造性”算法来获得理想的先验误差界的策略不同, 数值优化类的模型降阶方法通常直接以某种意义下的逼近误差指标函数作为优化目标<sup>[8-9]</sup>, 通过迭代优化计算来求得降阶模型的参数矩阵, 其误差界只有在优化过程完全结束才能明确. 从方法论上来看数值优化类方法和平衡截断法是本质不同的. 平衡截断法在算法复杂度上要明显优于数值优化类方法, 但在逼近误差指标设计的灵活性上则要稍逊一些.

时滞系统是一类常见的动力学系统, 多出现于网络控制系统、传输线系统、化工过程系统等实际工程系统中. 对时滞系统的各类问题研究在过去20年中得到了广泛的关注<sup>[10-11]</sup>, 其中时滞系统的模型降阶问题有着重要的工程应用背景, 如 RLC 电路内部链接传输线系统的建模与仿真等, 因此关于时滞系统的模型降阶研究已成为时滞系统研究领域的一个重要分支<sup>[12-15]</sup>. 在平衡截断理论框架下探讨时滞系统的模型降阶问题也有若干研究结果, 如在文献 [16] 中, Jarlebring 等针对连续时间线性时滞系统, 通过对其“时滞格拉姆矩阵”进行定义和分块, 给出了一类“位置平衡”的时滞系统平衡截断法; 在文献 [17] 中, Wang 等从“时滞格拉姆矩阵”快速数值计算的角度出发给出了相应的时滞系统平衡截断法. 针对离散时间线性时滞系统, Suh 在文献 [18] 中从离散时滞项的性质出发, 给出了一类基于对角时滞格拉姆矩阵的“对角平衡截断法”. 与标准线性系统情形下的相关结果类似, 这些现有的时滞系统平衡截断法通常可以在全频域内得到相对较好的模型逼近性能. 在许多实际系统中, 系统工作频率范围即输入信号的频率范围往往是一个已知的较窄的有界区间<sup>[19-21]</sup>, 其中低频区间为最常见的情形, 甚至在某些情况下输入信号为频率为零的阶跃信号. 另一方面, 模型降阶问题的本质就在于使得降阶模型尽可能好地模拟和逼近在相同输入信号激励下原系统的输出响应曲线. 因此对于输入信号为低频信号的情形, 仅需考虑在低频范围内对原系统进行逼近. 标准的平衡截断法虽然能使得整个频域上的逼近误差都相对较小, 但大量例子显示该方法在低频域内的逼近误差往往是较大的, 而且通常最大的逼近误差就出现在零频处, 这一性质对低频模型降阶问题而言是不够理想的. 针对标准线性系统的低频模型降阶问题, 可以通过采用与标准平衡

收稿日期 2015-02-12 录用日期 2015-06-13  
Manuscript received February 12, 2015; accepted June 13, 2015  
国家自然科学基金(61304143, 61473032, 61104013), 北京市自然科学基金(4153061), 教育部新世纪优秀人才计划(NCET-13-0662)  
Supported by National Natural Science Foundation of China(61304143, 61473032, 61104013), Beijing Natural Science Foundation(4153061), Program for New Century Excellent Talents in University(NCET-13-0662)  
本文责任编辑 张化光  
Recommended by Associate Editor ZHANG Hua-Guang  
1. 上海大学机电工程与自动化学院 上海 200072 2. 北京科技大学自动化学院 北京 100083  
1. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072 2. School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083

截断法同源共生的“奇异摄动平衡截断法”来进行很好的求解<sup>[22-25]</sup>, 这类方法通过使降阶模型和原模型在零频处的响应完全匹配, 进而改善了低频范围内的模型逼近性能. 遗憾的是, 针对线性时滞系统, 目前还没有类似于“奇异摄动平衡截断法”的解决方案来处理其低频模型降阶问题. 文献 [26] 中给出的方法试图采用无时滞项的标准线性系统来逼近时滞系统的低频响应特性, 但遗憾的是由于忽略掉时滞项对系统结构造成了过大的改变, 使得其难以获得零频点之外的低频区域上的良好逼近效果, 同时无法根据降阶系统模型来设计和原系统具有相同物理结构的简化实际系统.

本文考虑离散时间线性时滞系统的低频模型降阶问题. 与解决标准线性系统低频模型降阶问题的“奇异摄动平衡截断法”不同, 这里引入了一类具有特殊构造形式的参数化扩展时滞系统, 这类扩展时滞系统在任意给定的设计参数下都具有和原系统相同的零频响应, 且其可控/可观 Lyapunov 方程 (不等式) 的解随设计参数的不断减小而渐近趋近于零. 基于这样的参数化扩展时滞系统和已有的时滞系统“对角平衡截断法”<sup>[23]</sup>, 本文提出了一类新的针对时滞系统低频模型降阶问题的平衡截断法, 新方法给出了一个降阶系统与原系统在零频处的可调误差上界, 而且该误差上界可随着设计参数的不断减小而趋近于零, 因此可通过选择合适的设计参数来调整低频范围内的模型逼近性能. 仿真算例说明了该方法的有效性, 并指出了在实际算法中调节参数的选取原则.

## 1 问题描述

考虑下列差分方程描述的离散时间线性时滞系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k-d) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{x}(k) &= 0, k \in [-d, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$  为系统状态向量,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^l$  为系统输入向量,  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^m$  为系统输出向量,  $d > 0$  是未知的时延长度. 该系统在频域的表现形式为

$$\begin{aligned} e^{j\theta} X(e^{j\theta}) &= \mathbf{A}X(e^{j\theta}) + \mathbf{A}_d e^{-j\theta d} X(e^{j\theta}) + \mathbf{B}U(e^{j\theta}) \\ Y(e^{j\theta}) &= \mathbf{C}X(e^{j\theta}) + \mathbf{D}U(e^{j\theta}) \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $U(e^{j\theta})$ ,  $X(e^{j\theta})$  和  $Y(e^{j\theta})$  分别为信号  $u(t)$ ,  $x(t)$  和  $y(t)$  经傅里叶变换后的频域表达式. 输入输出信号之间的关系可在频域表达为  $Y(e^{j\theta}) = G(e^{j\theta})U(e^{j\theta})$ , 其中  $G(e^{j\theta})$  为系统的传递函数:

$$G(e^{j\theta}) = \mathbf{C} \left( e^{j\theta} \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A}_d e^{-j\theta d} \right)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3)$$

考虑到在许多实际系统中, 系统输入信号通常是频率为零的阶跃信号, 或者是一些频率不太高的慢变 (周期) 信号, 本文的主要目标是求解一个如下式所示的低阶线性时滞系统:

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= A_r x(k) + A_{dr} x_r(k-d) + B_r u(k) \\ y_r(k) &= C_r x(k) + D_r u(k) \\ x_r(k) &= 0, t \in [-d, 0] \end{aligned} \quad (4)$$

来很好地逼近原系统在低频域内特别是零频时的动态响应特性, 其中  $\mathbf{x}_r(k) \in \mathbf{R}^r$  是降阶系统的低维状态向量,  $\mathbf{u}_r(k) \in \mathbf{R}^r$  为和原系统相同的输入向量,  $\mathbf{y}_r(k) \in \mathbf{R}^m$  是降阶系统

输出向量,  $A_r, A_{dr}, B_r, C_r, D_r$  为待求参数矩阵. 同样, 降阶系统也可以在频域上进行描述, 其输入输出的频域关系为  $Y_r(e^{j\theta}) = G_r(e^{j\theta})U(e^{j\theta})$ , 其中  $G_r(e^{j\theta})$  为降阶系统的传递函数:

$$G_r(e^{j\theta}) = C_r \left( e^{j\theta} \mathbf{I} - A_r - A_{dr} e^{-j\theta d} \right)^{-1} B_r + D_r \quad (5)$$

本文中假设系统工作频率区间的上下界未知, 即仅知系统工作频率范围为零频的一个领域. 在这种情况下, 一个合适的刻画降阶模型逼近性能的指标函数为

$$\sigma_{\max}(G(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})) \quad (6)$$

显然, 该指标函数的大小反应了原系统和降阶系统在零频处的逼近误差. 由误差传递函数的连续性可知, 该指标函数越小, 相应的在零频附近频率上的逼近误差也越小, 也即意味着越好的低频模型逼近性能.

**注 1.** 指标函数 (6) 为原系统和降阶系统所组成的误差系统在零频处的最大奇异值, 事实上, 用误差传递函数的奇异值函数来作为模型逼近性能的指标函数有着明确的物理意义. 对系统工作频率信息完全未知的情况下, 通常采用全频域内的传递函数最大奇异值作为指标函数 (如经典的平衡截断法<sup>[7]</sup>); 对系统工作频率为有限区间且其上下界已知的情形, 则可以采用给定频率区间内传递函数的最大奇异值作为指标函数<sup>[21-24]</sup>.

## 2 基于零频扩展时滞系统的平衡截断模型降阶法

本节将给出本文的主要结果, 首先, 给出一类具有特殊构造形式的参数化扩展线性时滞系统; 然后以此为基础给出了相应的平衡截断算法及其在逼近性能上的性质.

**定义 1.** 给定线性时滞系统 (1), 则称下列由系统 (1) 中参数矩阵以及设计参数  $\epsilon > 0$  所构造的时滞系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_\epsilon x(k) + A_{d\epsilon} x(k) + B_\epsilon u(k) \\ y(k) &= C_\epsilon x(k) + D_\epsilon u(k) \end{aligned} \quad (7)$$

为系统 (6) 的零频扩展时滞系统, 其中

$$\begin{aligned} A_\epsilon &= \mathbf{I} - \epsilon(\epsilon \mathbf{I} + \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A}_d)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ A_{d\epsilon} &= \epsilon(\epsilon \mathbf{I} + \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{A}_d \\ B_\epsilon &= \epsilon(\epsilon \mathbf{I} + \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B} \\ C_\epsilon &= \epsilon \mathbf{C}(\epsilon \mathbf{I} + \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A}_d)^{-1} \\ D_\epsilon &= \mathbf{D} + \mathbf{C}(\epsilon \mathbf{I} + \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (8)$$

以式 (7) 和 (8) 中给出的特殊构造下的扩展时滞系统为基础, 并结合文献 [18] 中给出的时滞系统对角平衡截断法, 这里给出一类用于解决离散时间时滞系统低频模型降阶问题的平衡截断算法.

**算法 1.** 参数化时滞系统低频平衡截断法

**输入.** 原系统参数矩阵  $A, A_d, B, C, D$  以及设计参数  $\epsilon$ .

**输出.**  $A_r, A_{dr}, B_r, C_r, D_r$ .

**步骤 1.** 根据式 (8) 中给出的扩展系统参数矩阵构造方

程, 求解满足下列 Lyapunov 不等式

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_\epsilon & A_{d\epsilon} \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{c\epsilon} & 0 \\ 0 & X_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\epsilon & A_{d\epsilon} \\ I & 0 \end{bmatrix}^T - \\ & \begin{bmatrix} W_{c\epsilon} & 0 \\ 0 & X_\epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\epsilon B_\epsilon^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} A_\epsilon & A_{d\epsilon} \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_{o\epsilon} & 0 \\ 0 & Y_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\epsilon & A_{d\epsilon} \\ I & 0 \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} W_{o\epsilon} & 0 \\ 0 & Y_\epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\epsilon^T C_\epsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

**步骤 2.** 在求解式 (9) 所得矩阵  $W_{c\epsilon}$  和  $W_{o\epsilon}$  的基础上, 通过奇异值分解 (Singular value decomposition, SVD) 变换求得使矩阵  $W_{c\epsilon}$  和  $W_{o\epsilon}$  实现同时对角化的坐标变换矩阵  $T_\epsilon$ , 即

$$T_\epsilon^{-1} W_{c\epsilon} T_\epsilon^{-T} = T_\epsilon^T W_{o\epsilon} T_\epsilon = \Sigma_\epsilon \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \Sigma_\epsilon &= \text{diag}\{\Sigma_{\epsilon 1}, \Sigma_{\epsilon 2}\} \\ \Sigma_{\epsilon 1} &= \text{diag}\{\sigma_{\epsilon 1}, \sigma_{\epsilon 2}, \dots, \sigma_{\epsilon r}\} \\ \Sigma_{\epsilon 2} &= \text{diag}\{\sigma_{\epsilon(r+1)}, \sigma_{\epsilon(r+2)}, \dots, \sigma_{\epsilon n}\} \end{aligned}$$

**步骤 3.** 根据式 (11) 对时滞系统进行坐标变换, 以得到其低频平衡实现:

$$\begin{aligned} A_{b\epsilon} &= T_\epsilon^{-1} A_\epsilon T_\epsilon, \quad A_{bd\epsilon} = T_\epsilon^{-1} A_{d\epsilon} T_\epsilon, \quad B_{b\epsilon} = T_\epsilon^{-1} B_\epsilon \\ C_{b\epsilon} &= C_\epsilon T_\epsilon, \quad D_{b\epsilon} = D_\epsilon \end{aligned} \quad (11)$$

**步骤 4.** 根据下列截断方程求解降阶模型参数矩阵

$$\begin{aligned} A_r &= [I \ 0] M_r^{-1} N_r \\ A_{dr} &= [I \ 0] M_r^{-1} N_r \\ B_r &= \epsilon^{-1} (\epsilon I + I - A_r - A_{dr}) Z_r B_{b\epsilon} \\ C_r &= \epsilon^{-1} C_{b\epsilon} Z_r^T (\epsilon I + I - A_r - A_{dr}) \\ D_r &= D_{b\epsilon} - C_r (\epsilon I + I - A_r - A_{dr})^{-1} B_r \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} M_r &= \begin{bmatrix} Z_r A_{b\epsilon} Z_r^T & Z_r A_{d\epsilon} Z_r^T \\ Z_r A_{b\epsilon} Z_r^T - I & Z_r A_{d\epsilon} Z_r^T + I \end{bmatrix} \\ N_r &= \begin{bmatrix} (\epsilon + 1) Z_r A_{b\epsilon} Z_r^T - I \\ (\epsilon + 1) Z_r A_{d\epsilon} Z_r^T \end{bmatrix} \\ Z_r &= [I_r, 0_{(r, n-r)}] \end{aligned}$$

**定理 1.** 通过算法 1 得到的降阶系统 (4) 和原系统 (1) 在零频处的逼近误差满足:

$$\sigma_{\max} \left( G(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta}) \right) \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_{\epsilon i} \quad (13)$$

其中, 误差上界可由参数  $\epsilon$  来进行调节, 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 误差界趋近于零, 即

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma_{\epsilon i} = 0 \quad (14)$$

**证明.** 首先证明零频点处模型逼近误差界 (13) 成立, 由定义 1 中给出的零频扩展时滞系统的参数矩阵构造形式可证:

$$\begin{aligned} G(e^{j\theta}) - G_\epsilon(e^{j\theta}) &= \\ & C(e^{j\theta} I - A - A_d)^{-1} B + D - \\ & C_\epsilon(e^{j\theta} I - A_\epsilon - A_{d\epsilon})^{-1} B_\epsilon + D_\epsilon = \\ & \{C(e^{j\theta} I - A - A_d)^{-1} B + D\} - \\ & C_\epsilon \epsilon^{-1} (\epsilon I + I - A - A_d) (\epsilon I + I - A - A_d)^{-1} B_\epsilon - D_\epsilon = \\ & C(e^{j\theta} I - A - A_d)^{-1} B + D - \\ & C(I - A - A_d)^{-1} (\epsilon I + I - A - A_d)^{-1} \epsilon B - \\ & C(\epsilon I + I - A - A_d)^{-1} B - D = \\ & C(e^{j\theta} I - A - A_d)^{-1} B - C(I - A - A_d)^{-1} B = \\ & C(I - A - A_d)^{-1} B - C(I - A - A_d)^{-1} B = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

类似地, 我们可按照式 (8) 的构造方式, 对由式 (15) 求得的降阶系统来构造类似的扩展降阶时滞系统:

$$\begin{aligned} \hat{x}_r(k+1) &= A_{r\epsilon} \hat{x}_r(k) + A_{dr\epsilon} \hat{x}_r(k) + B_{r\epsilon} u(k) \\ y_r(k) &= C_{r\epsilon} \hat{x}_r(k) + D_{r\epsilon} u(k) \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{r\epsilon} &= I - \epsilon(\epsilon I + I - A_r - A_{dr})^{-1} (I - A_r) \\ A_{dr\epsilon} &= \epsilon(\epsilon I + I - A_r - A_{dr})^{-1} A_{dr} \\ B_{r\epsilon} &= \epsilon(\epsilon I + I - A_r - A_{dr})^{-1} B_r \\ C_{r\epsilon} &= \epsilon C_r (\epsilon I + I - A_r - A_{dr})^{-1} \\ D_{r\epsilon} &= D_r + C_r (\epsilon I + I - A - A_{dr})^{-1} B_r \end{aligned} \quad (17)$$

该扩展降阶时滞系统的传递函数可表示为

$$C_{r\epsilon} (e^{j\theta} I - A_{r\epsilon} - A_{dr\epsilon} e^{-j\theta d})^{-1} B_{r\epsilon} + D_{r\epsilon} \quad (18)$$

与式 (15) 的证明方式相同, 我们可以证明

$$G_{r\epsilon}(e^{j0}) - G_r(e^{j0}) = 0. \quad (19)$$

另一方面根据式 (15) 和式 (19) 可推出:

$$\begin{aligned} A_{r\epsilon} &= Z_r A_{b\epsilon} Z_r^T, \quad A_{dr\epsilon} = Z_r A_{d\epsilon} Z_r^T, \quad B_{r\epsilon} = Z_r B_{b\epsilon} \\ C_{r\epsilon} &= C_{b\epsilon} Z_r^T, \quad D_{r\epsilon} = D_{b\epsilon} \end{aligned} \quad (20)$$

结合文献 [14] 中“对角平衡截断法”的分析结果可知:

$$\sigma_{\max} \left( G_\epsilon(e^{j\theta}) - G_{r\epsilon}(e^{j\theta}) \right) \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_{i\theta}, \quad \forall \theta \in [-\pi, +\pi] \quad (21)$$

综合式 (15)、式 (19) 和式 (21), 以及矩阵奇异值的基本性质,

可知

$$\begin{aligned} & \sigma_{\max} (G(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})) = \\ & \sigma_{\max} \left\{ \begin{array}{l} (G(e^{j\theta}) - G_\varepsilon(e^{j\theta})) + (G_\varepsilon(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})) \\ G_{r\varepsilon}(e^{j\theta}) + (G_{r\varepsilon}(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})) \end{array} \right\} \leq \\ & \sigma_{\max} (G(e^{j\theta}) - G_\varepsilon(e^{j\theta})) + \\ & \sigma_{\max} (G_\varepsilon(e^{j\theta}) - G_{r\varepsilon}(e^{j\theta})) + \\ & \sigma_{\max} (G_{r\varepsilon}(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})) = \\ & \sigma_{\max} (G_\varepsilon(e^{j\theta}) - G_{r\varepsilon}(e^{j\theta})) \leq \\ & 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_{\varepsilon i} \end{aligned} \tag{22}$$

接下来我们进一步证明误差界的性质 (14). 根据低频扩展时滞系统 (7) 中参数矩阵的计算式 (8) 可知:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_{r\varepsilon} &= I \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_{dr\varepsilon} &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_{r\varepsilon} &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_{dr\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

进而式 (9) 中不等式两边在  $\varepsilon \rightarrow 0$  的情况下可写为

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} A_\varepsilon & A_{d\varepsilon} \\ I & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} W_{c\varepsilon} & 0 \\ 0 & X_\varepsilon \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} A_\varepsilon & A_{d\varepsilon} \\ I & 0 \end{array} \right]^T - \\ \left[ \begin{array}{cc} W_{c\varepsilon} & 0 \\ 0 & X_\varepsilon \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} B_\varepsilon B_\varepsilon^T & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\} = \\ \left[ \begin{array}{cc} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{c\varepsilon} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{c\varepsilon} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{c\varepsilon} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{c\varepsilon} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{c\varepsilon} & 0 \\ 0 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon \end{array} \right] < 0 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} A_\varepsilon & A_{d\varepsilon} \\ I & 0 \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} W_{o\varepsilon} & 0 \\ 0 & Y_\varepsilon \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} A_\varepsilon & A_{d\varepsilon} \\ I & 0 \end{array} \right] - \\ \left[ \begin{array}{cc} W_{o\varepsilon} & 0 \\ 0 & Y_\varepsilon \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} C_\varepsilon^T C_\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\} = \\ \left[ \begin{array}{cc} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{o\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_\varepsilon & 0 \\ 0 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_\varepsilon \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{o\varepsilon} & 0 \\ 0 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_\varepsilon \end{array} \right] < 0 \end{aligned} \tag{25}$$

由上面两个不等式中矩阵变量的约束关系以及矩阵变量  $W_{c\varepsilon}, W_{o\varepsilon}, X_\varepsilon, Y_\varepsilon$  为对称正定矩阵的内在要求, 不难看出满足式 (22) 和 (23) 两个不等式的矩阵变量  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{c\varepsilon}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{o\varepsilon}$  最优值为

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{c\varepsilon} &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{o\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

进而由式 (10) 可知当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 误差界趋近于零时  $\sigma_{\varepsilon i \varepsilon \rightarrow 0} = 0$ . □

**注 2.** 从定理 1 证明过程中的式 (15) 可以看出, 由于扩展时滞系统 (7) 中参数矩阵的特殊构造形式 (8), 对任意设计参数  $\varepsilon > 0$  两者间的零频响应都是相等的. 根据定理

1 中误差界的性质, 可知选择越小的设计参数  $\varepsilon$  将利于得到越小的零频点处模型逼近误差. 在实际应用中, 除了输入信号始终为零频阶跃信号的情形, 通常希望对输入为各类低频信号都能有较好的逼近效果, 因此一般不建议选择过小的设计参数  $\varepsilon$ , 而且过小的设计参数通常会使得矩阵的秩快速降低, 从而给算法中的奇异值分解等计算步骤带来数值计算上的困难. 一个合理的设计参数  $\varepsilon$  的选择原则是输入信号的频率范围越宽, 则设计参数应该越大, 反之则应选越小的参数  $\varepsilon$ . 根据大量的数值计算经验, 设计参数  $\varepsilon$  的合理区间大概在 0.01 ~ 100 之间, 在计算时间和存储空间允许的情况下, 可通过尝试若干不同的设计参数  $\varepsilon$ , 从中选择合适的取值以获得理想的低频逼近效果.

**注 3.** 和现有的针对时滞系统模型降阶问题提出的平衡截断方法<sup>[19-23]</sup> 相比, 本文主要侧重于考虑低频范围内的逼近性能, 本文所给算法是首个可以提高明确给出良好低频域模型逼近性能的有效方法, 但同时需要指出该方法无法从理论上保证降阶系统的稳定性. 在实际应用中, 这一缺点不会带来太大的困难, 一方面当设计参数  $\varepsilon$  趋近于无穷大时, 本文方法就会退化为文献 [18] 中的方法, 这意味着当设计参数  $\varepsilon$  足够大时, 降阶系统总是稳定的, 而且根据我们的仿真计算经验, 通常设计参数  $\varepsilon$  在正常数值范围内 ( $0.01 < \varepsilon < 100$ ) 选取时, 降阶系统一般也是稳定的, 至少通过尝试若干不同的参数  $\varepsilon$  即可生成稳定的降阶系统. 此外, 本文方法虽无法保证降阶系统的稳定性, 但也不再限制原系统必须为稳定系统, 而文献 [16-18] 中方法都要求原时滞系统为稳定系统. 本文方法只需选择参数  $\varepsilon$  使得使其扩展系统稳定即可, 提高了平衡截断法在时滞系统模型降阶中的适用范围. 需要指出的是, 目前还没有类似可用于不稳定时滞系统的模型降阶算法, 而且将可用于标准线性系统情形下的相关方法 (如“状态区分”非稳定系统平衡截断法) 推广到时滞系统也是一项比较困难的工作.

**注 4.** 本文方法与文献 [18] 方法之间的关系类似线性系统模型降阶中“标准平衡截断法”和“奇异摄动平衡截断法”之间的关系. 对于标准线性时滞系统的低频模型降阶问题, “奇异摄动平衡截断法”<sup>[10-12]</sup> 是一个非常好的解决方案, 但本文方法并非“奇异摄动平衡截断法”在时滞系统低频模型降阶问题上的推广. 事实上, 本文方法的核心技术手段和结果都与“奇异摄动平衡截断法”有着明显的不同. “奇异摄动平衡截断法”的出发点是构造原系统的“反向变换 (Reciprocal transformation) 系统”, 而这里是通过由式 (8) 给出的新型变换形式来构造参数化的低频扩展系统; 另外“奇异摄动平衡截断法”强行使得降阶模型同原模型的零频响应完全匹配, 而本文方法中降阶模型与原模型在零频点处是有误差的, 只是该误差可以通过调节设计参数来渐近的趋近于零. 在目前还没有办法将“奇异摄动平衡截断法”推广到时滞系统低频模型降阶的实际情况下, 本文方法为这类问题提供了一个非常有效的解决方案.

### 3 仿真算例

平衡截断法可用于大规模系统 (阶数可高达 100、1 000) 的模型降阶问题<sup>[7]</sup>, 这里为了方便和已有的时滞系统平衡截断类方法相比较, 考虑采用文献 [18] 中给出的数值算例, 其中原系统为一个 4 阶线性时滞系统, 其参数矩阵和时滞长度

分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0.26 & -0.12 & 0.14 & 0.21 \\ -0.13 & 0.37 & -0.19 & -0.11 \\ 0.12 & -0.21 & 0.31 & 0.13 \\ -0.23 & 0.32 & -0.37 & -0.48 \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.13 & -0.11 & 0.02 & -0.11 \\ 0.10 & 0.11 & -0.12 & 0.23 \\ 0.21 & -0.23 & 0.25 & 0.11 \\ 0.04 & -0.37 & -0.23 & 0.34 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = [0]$$

$$d = 5$$

为说明本文方法在提高低频域内模型逼近性能方面的特性, 我们分别考虑采用文献 [17] 中基于时滞格拉姆矩阵快速求解的平衡截断法、文献 [18] 中的“对角平衡截断法”、以及本文方法来求解相应的降阶系统模型. 这里我们是将文献 [17] 中针对连续时间时滞系统的方法直接推广到离散时间来求解. 在引言中提到的文献 [16] 的时滞系统平衡截断法由于其难以被直接推广到离散时间情形, 这里未进行比较. 我们在使用本文方法时, 分别选择设计参数  $\epsilon$  为 10, 1, 0.1 来求解不同的降阶系统模型. 下面图 1 给出了采用各类方法时, 所得一阶降阶系统在低频范围内的奇异值曲线.

从图 1 中可以清楚的看到, 相比于文献 [17-18] 的方法, 本文方法可以很好地提高低频域的模型逼近精度, 而且随着设计参数  $\epsilon$  不断减小, 模型在零频处的逼近误差也不断减小, 当取  $\epsilon = 0.1$  时, 本文方法所得降阶系统几乎完全匹配原系统在零频及其附近小邻域范围内的频域相应特性.

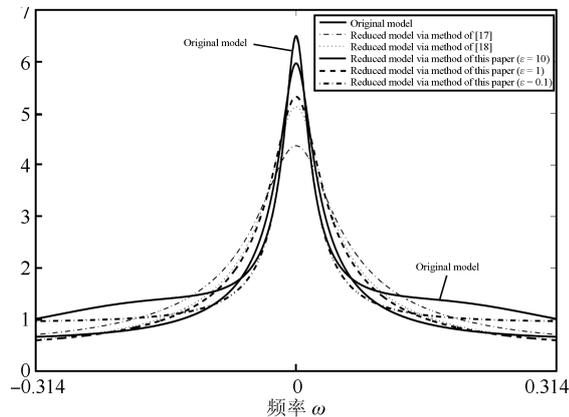


图 1 各降阶系统与原系统在低频域的奇异值曲线图

Fig. 1 Sigma plots of original system and reduced systems

为进一步说明本文方法的优越性, 下面我们从时域上分析和比较不同降阶模型在输入信号为低频信号时的逼近效果. 这里分别考虑输入信号为频率为零的阶跃信号  $u_1$ :

$$u_1 = \begin{cases} 0, & k < 10 \\ 0.1, & k \geq 10 \end{cases}$$

和输入信号为低频的三角信号  $u_2$ :

$$u_2 = \begin{cases} 0, & k < 10 \\ \sin(0.05k), & 10 \leq k < 400 \\ 0, & k \geq 400 \end{cases}$$

这两类情形. 下面图 2 和图 3 分别给出了原系统和上述各类方法所得 1 阶降阶系统在  $u_1$  和  $u_2$  激励下的输出信号曲线.

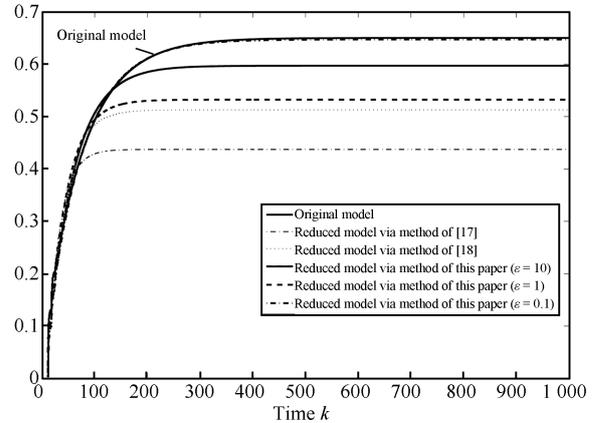


图 2 在输入信号  $u_1$  激励下原系统和各降阶系统的输出信号曲线

Fig. 2 Output plots of original system and reduced systems with input  $u_1$

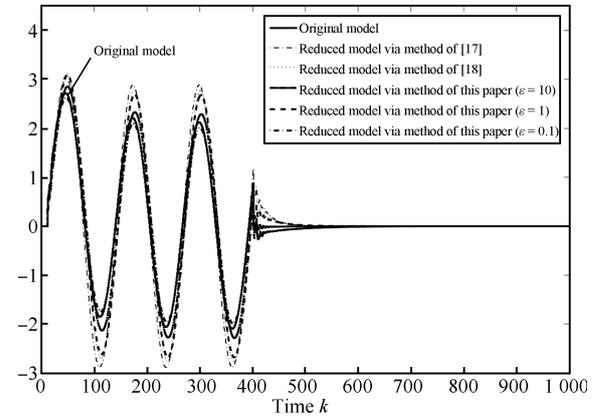


图 3 在输入信号  $u_2$  激励下原系统和各降阶系统的输出信号曲线

Fig. 3 Output plots of original system and reduced systems with input  $u_2$

从图 2 和图 3 中可以看出, 当输入为零频或低频信号时, 本文方法所得降阶系统可以更好地逼近原模型输出信号, 就本例而言, 当选取设计参数  $\epsilon$  为 0.1 时, 本文方法给出的降阶系统有着最好的低频逼近性能, 因此当选择输入信号为上述两类低频信号时, 对应于  $\epsilon$  为 0.1 的降阶系统的输出最接近原系统的输出信号. 这一例子说明了低频模型降阶的特点, 也充分体现了本文方法在解决时滞系统低频模型降阶问题上的有效性和优越性.

### 4 结论

本文探讨了离散时间线性时滞系统的低频模型降阶问题. 根据时滞系统传递函数在零频点处的响应特性, 首先, 构造了一类经过特殊参数化坐标变换所生成的扩展时滞系统.

基于扩展时滞系统及现有的离散时间时滞系统“对角平衡截断法”，本文给出了一类新的可以有效提高低频域内模型逼近性能的平衡截断算法。该方法理论上可以在零频点处得到任意精度下的模型逼近性能，而且通过选择合适的设计参数，还可以方便地对低频域内的模型逼近性能进行平衡和调节。

### References

- 1 Quarteroni A, Rozza G. *Reduced Order Methods for Modeling and Computational Reduction*. Berlin: Springer, 2014.
- 2 Benner P, Hinze M, ter Maten E J W. Lecture notes in electrical engineering. *Model Reduction for Circuit Simulation*. Dordrecht: Springer, 2011.
- 3 Antoulas A C. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Philadelphia: SIAM, 2005.
- 4 Sheng Yang, Lai Xu-Zhi, Wu Min. Position control of a planar three-link underactuated mechanical system based on model reduction. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(7): 1303–1310  
(盛洋, 赖旭芝, 吴敏. 基于模型降阶的平面三连杆欠驱动机械系统位置控制. 自动化学报, 2014, **40**(7): 1303–1310)
- 5 Besselink B, Tabak U, Lutowska A, van de Wouw N, Nijmeijer H, Rixen D J, Hochstenbach M E, Schilders W H A. A comparison of model reduction techniques from structural dynamics, numerical mathematics and systems and control. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(19): 4403–4422
- 6 Gugercin S, Antoulas A C. A survey of model reduction by balanced truncation and some new results. *International Journal of Control*, 2004, **77**(8): 748–766
- 7 Moore B. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(1): 17–32
- 8 Lee K H, Huang B.  $H_\infty$  structured model reduction algorithms for linear discrete systems via LMI-based optimisation. *International Journal of Systems Science*, 2009, **40**(7): 685–693
- 9 Geromel J C, Egas R G, Kawaoka F R R.  $H_\infty$  model reduction with application to flexible systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(3): 402–406
- 10 Li Xiu-Ying, Wang Jin-Yu, Sun Shu-Li.  $H_\infty$  filter design for networked systems with one-step random delays and multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(1): 155–160  
(李秀英, 王金玉, 孙书利. 具有一步随机时滞和多丢包的的网络系统  $H_\infty$  滤波器设计. 自动化学报, 2014, **40**(1): 155–160)
- 11 Du Da-Jun, Song Zhi-Hua, Fei Min-Rui, Wang Hai-Kuan.  $H_2/H_\infty$  filtering for networked systems with a kind of multi-channel hybrid network communication constraints. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2664–2672  
(杜大军, 宋志华, 费敏锐, 王海宽. 受一类多通道异构网络通信约束的网络系统  $H_2/H_\infty$  滤波研究. 自动化学报, 2014, **40**(11): 2664–2672)
- 12 Zhou P, Xiang B, Fu J, Chai T Y. Model approximation of multiple delay transfer function models using multiple-point step response fitting. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2012, **10**(1): 180–185
- 13 Wu L G, Su X J, Shi P, Qiu J B. Model approximation for discrete-time state-delay systems in the T-S fuzzy framework. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2011, **19**(2): 366–378
- 14 Xu S Y, Lam J, Zou Y. New results on delay-dependent robust  $H_\infty$  control for systems with time-varying delays. *Automatica*, 2006, **42**(2): 343–348
- 15 Wang Q, Wang Y Z, Lam E Y, Wong N. Model order reduction for neutral systems by moment matching. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2013, **32**(3): 1039–1063
- 16 Jarlebring E, Damm T, Michiels W. Model reduction of time-delay systems using position balancing and delay Lyapunov equations. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2013, **25**(2): 147–166
- 17 Wang X, Wang Q, Zhang Z, Chen Q, Wong N. Balanced truncation for time-delay systems via approximate Gramians. In: Proceedings of the 16th Asia and South Pacific Design Automation Conference. Yokohama, Japan: IEEE, 2011. 56–60
- 18 Suh Y S. Diagonal balanced truncation of discrete delay systems. *Automatica*, 1999, **35**(11): 1855–1860
- 19 Ghafoor A, Sreeram V. Model reduction via limited frequency interval Gramians. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2008, **55**(9): 2806–2812
- 20 Du X, Yang G H.  $H_\infty$  model reduction of linear continuous-time systems over finite-frequency interval. *IET control theory & applications*, 2010, **4**(3): 499–508
- 21 Ding D W, Du X, Li X L. Finite-frequency model reduction of two-dimensional digital filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(6): 1624–1629
- 22 Shi X F, Ding D W, Li X L, Shi Z G. Model reduction of discrete-time switched linear systems over finite-frequency ranges. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **71**(1–2): 361–370
- 23 Liu Y, Anderson B D O. Singular perturbation approximation of balanced systems. *International Journal of Control*, 1989, **50**(4): 1379–1405
- 24 Fatmawati, Saragih R, Bambang R T, Soeharyadi Y. Balanced truncation for unstable infinite dimensional systems via reciprocal transformation. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2011, **9**(2): 249–257
- 25 Saragih R, Fatmawati. Singular perturbation approximation of balanced infinite-dimensional systems. *International Journal of Control and Automation*, 2013, **6**(5): 409–420
- 26 Du X, Wang C, Tu K, Liu F W. Model reduction of linear time delay systems via a class of balanced truncation. In: Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference. Xi'an, China: IEEE, 2013. 8734–8739

杜 鑫 上海大学机电工程与自动化学院讲师。主要研究方向为模型降阶, 模型补偿及降阶控制器设计。E-mail: duxin@shu.edu.cn  
(DU Xin Lecturer at the School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University. His research interest covers model reduction, model compensation, and reduced-order control.)

丁大伟 北京科技大学自动化学院副教授。主要研究方向为鲁棒控制及滤波, 模糊系统, 模型降阶, 二维系统。本文通信作者。

E-mail: dingdawei@ustb.edu.cn

(DING Da-Wei Associate professor at the School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing. His research interest covers robust control and filtering, fuzzy systems, model reduction, and two-dimensional systems. Corresponding author of this paper.)