

输入饱和和非线性系统的周期自适应补偿学习控制

陶洪峰¹ 霏学会¹ 杨慧中¹

摘要 针对一类输入饱和和不确定 Brunovsky 标准型非线性时滞系统, 提出一种周期自适应跟踪补偿学习算法. 利用信号置换思想重组系统, 基于最小公倍周期函数变换, 将时滞时变项和不确定项合并为辅助参数, 进而设计周期自适应学习律估计该辅助量, 并利用饱和补偿器逼近和补偿超出饱和限的部分, 由此构成综合控制器, 以保证系统状态对有界期望值的跟踪, 解决了饱和输入周期系统的重复迭代学习控制问题. 最后通过构造 Lyapunov-Krasovskii 复合能量函数的差分, 计算证明了系统跟踪误差的收敛性和闭环信号值的有界性. 常见耦合非线性机械臂系统的力矩控制仿真, 进一步验证了该算法的有效性.

关键词 输入饱和, 非线性时滞系统, 周期自适应, 补偿学习

引用格式 陶洪峰, 霏学会, 杨慧中. 输入饱和和非线性系统的周期自适应补偿学习控制. 自动化学报, 2014, 40(9): 1998–2004

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.01998

Periodic Adaptive Compensating Learning Control of Nonlinear Systems with Saturated Input

TAO Hong-Feng¹ XIAN Xue-Hui¹ YANG Hui-Zhong¹

Abstract A periodic adaptive tracking compensating learning algorithm is proposed for a class of Brunovsky standard nonlinear uncertain systems with time delay and input saturation. By restructuring the system according to signal replacement theory and functional transformation with the lowest common cycle, the delay and other time-varying parameters are combined into an auxiliary time-varying parameter. Then a periodic adaptive learning algorithm is designed to estimate the auxiliary parameter for approximating and compensating the section which exceeds the saturated limit by a compensator. Finally a comprehensive controller is constituted so that the system state can track the bounded expected value and the repeated iterative learning control problem based on periodic system with input saturation is solved. It is proved that the track error is convergent and all the closed-loop signals are bounded by the difference calculation of Lyapunov-Krasovskii composite energy function. The torque control simulation of common coupled nonlinear manipulator further confirms the effectiveness of the algorithm.

Key words Saturated input, nonlinear time-delay systems, cyclical adaptive, compensating learning

Citation Tao Hong-Feng, Xian Xue-Hui, Yang Hui-Zhong. Periodic adaptive compensating learning control of the nonlinear systems with saturated input. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(9): 1998–2004

随着数字技术的发展, 特别是在数字信号处理和网络通信等工程实际中, 出现了多频采样控制、周期补偿控制、振荡控制等系统, 其实质都是周期系

统. 作为一种特殊的时变系统, 目前针对周期系统的研究多是对线性问题的讨论^[1]. 文献 [2] 采用提升法将周期系统提升为时不变系统, 进而用线性矩阵不等式技术求解可行的满意估计方案. 文献 [3] 利用周期系统参数在某区间的变化特性, 将周期系统的滤波问题转化为区间系统的鲁棒滤波问题. 文献 [4] 利用输出反馈闭环系统的单值性进行等价变换, 从而求解出周期输出反馈律的完全参数化解. 但是, 上述方法并没有充分利用周期系统的迭代性和周期性特点.

近年来, 研究学者利用学习控制的基本思想, 通过先前迭代或周期的信息来改善当前迭代或周期的控制输入. 一般而言, 学习控制主要包含迭代学习控制和重复控制两种控制策略. 传统方法多采用压

收稿日期 2013-07-11 录用日期 2014-01-10
Manuscript received July 11, 2013; accepted January 10, 2014
国家自然科学基金 (61273070, 61203092), 江苏省高校自然科学基金研究项目 (11KJB510007), 高等学校学科创新引智计划 (B12018), 江苏高校优势学科建设工程项目资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61273070, 61203092), the Higher Education Natural Science Basic Research of Jiangsu Province (11KJB510007), the 111 Project (B12018), and the Priority Academic Program Development of Higher Education Institutions of Jiangsu Province
本文责任编辑 刘德荣
Recommended by Associate Editor LIU De-Rong
1. 江南大学教育部轻工过程先进控制重点实验室 无锡 214122
1. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122

缩映射原理来获取闭环系统的稳定性, 导致无法充分利用系统的参数和结构信息来设计控制输入^[5-7]. 为此考虑引入自适应学习控制 (Adaptive learning control, ALC) 算法, 通过自适应方法估计系统的未知或时变参数, 进而获得控制输入, 从而改善周期系统的控制性能. 文献 [8] 基于复合能量函数, 构造了自适应控制器的参数周期自适应律, 解决了一阶线性参数化不确定性系统的周期自适应控制问题. 文献 [9] 针对一类既有控制系数未知且时变参数不确定的非线性系统, 给出了一种鲁棒自适应重复学习控制策略. 文献 [10] 针对含有时变和时不变未知参数的二阶非线性系统, 结合反推方法, 提出了一种自适应重复学习控制方法, 使跟踪误差平方在一个周期上的积分范数渐近收敛于 0. 文献 [11] 通过引入 S 类函数, 处理截断误差项, 设计严格反馈非线性周期系统的跟踪控制律. 文献 [12] 针对一阶和高阶非线性参数化周期时变时滞系统, 基于重构系统方程来保证跟踪误差的收敛性.

在现有研究的基础上, 本文研究输入饱和和特性下的自适应控制与学习控制算法, 考虑非线性周期系统的控制问题. 提出一种周期自适应补偿学习算法, 实现了输入饱和的不确定时滞周期非线性系统的跟踪控制. 其基本思想是: 一方面利用信号置换思想重组系统, 将时滞及其他不确定时变项合并为一个辅助时变参数, 进而基于 Lyapunov 函数设计周期自适应跟踪算法估计该辅助量; 另一方面利用饱和和补偿器逼近补偿系统超出饱和限的部分, 进而再由周期自适应控制器和饱和补偿器构成了周期自适应补偿学习控制器; 最后根据常见机械臂系统的结构特点, 将所提算法应用于机械臂的力矩输入控制仿真, 以验证其有效性.

1 系统描述

考虑具有 Brunovsky 标准型的非线性时变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n = a(t)v(t) + \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}(t-\tau))\boldsymbol{\vartheta} + f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau), z(t)) \\ \mathbf{x} = \mathbf{o}(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ 为系统状态向量; $v(t) \in \mathbf{R}$ 为控制输入; 连续时变未知函数 $z(t)$ 和时变函数 $a(t)$ 为周期函数且满足 $z(t+T_1) = z(t)$ 和 $a(t+T_2) = a(t) \neq 0$; $\mathbf{x}(t-\tau)$ 为 $\mathbf{x}(t)$ 之前

τ 时刻的状态; $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}(t-\tau))$ 为已知连续函数; $\boldsymbol{\vartheta}$ 为常值向量; $\mathbf{o}(t)$ 为系统的初始条件; 设 $\theta_1(\cdot)$ 和 $\theta_2(\cdot)$ 是未知连续函数, 则未知函数 $f(\cdot)$ 满足不等式 $|f(t, x_1, x_1(t-\tau), z(t)) - f(t, x_2, x_2(t-\tau), z(t))| \leq |x_1 - x_2| \cdot \theta_1^2(z) + |x_1(t-\tau) - x_2(t-\tau)| \cdot \theta_2^2(z)$.

对控制输入 $v(t)$ 定义如下:

$$v(t) = \begin{cases} v_{\max}, & u(t) \geq v_{\max} \\ u(t), & v_{\min} < u(t) < v_{\max} \\ v_{\min}, & u(t) \leq v_{\min} \end{cases} \quad (2)$$

超出饱和限的部分 $\alpha(t)$ 为:

$$\alpha(t) = \begin{cases} v_{\max} - u(t), & u(t) \geq v_{\max} > 0 \\ 0, & v_{\min} < u(t) < v_{\max} \\ v_{\min} - u(t), & u(t) \leq v_{\min} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中, v_{\max} 、 v_{\min} 为饱和限幅. 对于给定的有界期望状态 $\mathbf{x}_d(t)$, 假设存在唯一的有界输入 $v_d(t)$, 使系统 (1) 存在对应的期望状态.

本文的控制目标为: 对于给定的参考信号 $\mathbf{x}_d(t) = [x_{d1}(t), \dots, x_{dn}(t)]^T = [x_{d1}(t), \dots, x_{d1}^{(n-1)}(t)]^T$, 周期函数 $x_{d1}(t)$ 的周期为 T (T 为周期 T_1 和 T_2 的最小公倍数), 寻找有界输入 $v_d(t)$, 使得当 $t \rightarrow \infty$ 时, 通过重复学习得到的系统信号 $\mathbf{x}(t)$ 尽可能地跟踪期望输出, 即跟踪误差 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)$ 收敛于 0, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-T}^t \mathbf{e}^T(\sigma)\mathbf{e}(\sigma)d\sigma = 0$.

2 控制律设计

对跟踪误差 $\mathbf{e}(t)$ 求导得到其动态方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_d(t) = \\ &K_c \mathbf{e} + \mathbf{a}_c \left[\mathbf{k}^T \mathbf{e} + a(t)v + \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}(t-\tau))\boldsymbol{\vartheta} + f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau), z(t)) - \dot{x}_{dn} \right] = \\ &K_c \mathbf{e} + \mathbf{a}_c \left[v + a^{-1} \mathbf{k}^T \mathbf{e} + a^{-1} \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}(t-\tau))\boldsymbol{\vartheta} + a^{-1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau), z(t)) - a^{-1} \dot{x}_{dn} \right] = \\ &K_c \mathbf{e} + \mathbf{a}_c \left[v + \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{dn}) + a^{-1} \Gamma + a^{-1} \Xi(t) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

其中,

$$K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_0 & -k_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}]^T \in \mathbf{R}^n$$

$$\mathbf{a}_c = [0, \dots, 0, 1]^T \in \mathbf{R}^n$$

$$\boldsymbol{\rho} = [a^{-1}, a^{-1}\boldsymbol{\vartheta}]^T$$

$$\Gamma = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau), z(t)) -$$

$$f(t, \mathbf{x}_d(t), \mathbf{x}_d(t-\tau), z(t))$$

$$\Xi(t) = f(t, \mathbf{x}_d(t), \mathbf{x}_d(t-\tau), z(t))$$

$$\Psi(\mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{dn}) = [\mathbf{k}^T \mathbf{e} - \dot{x}_{dn}, \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}(t-\tau))]^T$$

周期函数 $z(t)$ 和 $a(t)$ 有共同周期 T , 因此包含 $z(t)$ 和 $a(t)$ 的时变函数 $\Xi(t)$ 的周期也为 T .

设计参数 \mathbf{k} 使 K_c 为 Hurwitz 矩阵, 则对于给定的常数 $l > 0$, 必定存在正定阵 P 满足:

$$K_c^T P + P K_c = -lI \quad (5)$$

在以下推导证明过程中, 定义 $\tilde{\Delta} = \Delta - \hat{\Delta}$ 为 Δ 的估计误差. 考虑跟踪误差系统的一个 Lyapunov 泛函数:

$$V = \frac{1}{2a(t)} \mathbf{e}^T P \mathbf{e} + \frac{l}{2} \int_{t-\tau}^t \mathbf{e}^T(\sigma) \mathbf{e}(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2\mu_1} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{2\mu_2} \tilde{\alpha}^T \tilde{\alpha} + \frac{1}{2\mu_3} \tilde{W}^T \tilde{W} \quad (6)$$

其中, ι, μ_1, μ_2 和 μ_3 均为正数. 对 V 求导:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{l}{2a(t)} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c [a^{-1} \Xi(t) + a^{-1} \Gamma + \\ & \nu + \boldsymbol{\rho}^T \Psi(\mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{dn})] - \\ & \frac{l}{2} \mathbf{e}^T(t-\tau) \mathbf{e}(t-\tau) + \frac{l}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \\ & \frac{1}{\mu_1} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\rho}}} + \frac{1}{\mu_2} \tilde{\alpha}^T \dot{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{\mu_3} \tilde{W}^T \dot{\tilde{W}} \end{aligned} \quad (7)$$

由前面描述, 对于 $f(\cdot)$ 有:

$$\begin{aligned} |f(t, \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d(t-\tau), z(t)) - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}(t-\tau), z(t))| \leq \\ |\mathbf{x}_d - \mathbf{x}| \cdot \theta_1^2(z) + |\mathbf{x}_d(t-\tau) - \mathbf{x}(t-\tau)| \cdot \theta_2^2(z) \end{aligned} \quad (8)$$

即

$$|\Gamma| \leq |\mathbf{e}| \cdot \theta_1^2(z) + |\mathbf{e}(t-\tau)| \cdot \theta_2^2(z) \quad (9)$$

根据基本不等式 $a \cdot b \leq (a^2 + b^2)/2, \forall(a, b) \in \mathbf{R}^2$, 若 $b(t) \leq b(t-\tau)$, 则由式 (9) 可得:

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c a^{-1} \Gamma| \leq \\ |\mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c a^{-1} (|\mathbf{e}| \cdot \theta_1^2(z) + |\mathbf{e}(t-\tau)| \cdot \theta_2^2(z))| \leq \\ (\mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c)^2 \frac{\theta_1^2(z) + \theta_2^2(z)}{2a^2\iota} + \frac{\iota \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{2} + \\ \frac{\iota \mathbf{e}^T(t-\tau) \mathbf{e}(t-\tau)}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

把式 (10) 代入式 (7), 得:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c [\nu + \boldsymbol{\rho}^T \Psi(\mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{dn}) + \\ & \boldsymbol{\omega}^T(t) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e})] + \left(\frac{\iota}{2} - \frac{l}{2a(t)} \right) \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \\ & \frac{1}{\mu_1} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\rho}}} + \frac{1}{\mu_2} \tilde{\alpha}^T \dot{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{\mu_3} \tilde{W}^T \dot{\tilde{W}} \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) = & \left[\frac{\Xi(t)}{a(t)}, \frac{\theta_1^2(z) + \theta_2^2(z)}{a^2(t)\iota} \right]^T \\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}) = & \left[1, \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c \right]^T \end{aligned}$$

根据饱和非线性等式 (2) 和式 (3), 上面的非线性系统可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c [u + \boldsymbol{\omega}^T(t) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}) + \\ & (\alpha + \boldsymbol{\rho}^T \Psi(\mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{dn}))] + \frac{1}{\mu_1} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\rho}}} + \\ & \frac{1}{\mu_2} \tilde{\alpha}^T \dot{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{\mu_3} \tilde{W}^T \dot{\tilde{W}} + \\ & \left(\frac{\iota}{2} - \frac{l}{2a(t)} \right) \mathbf{e}^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (12)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理, 控制律 u 应当由跟踪控制器 \hat{v} 和饱和补偿器 \hat{w} 组成, 具体形式设计如下:

$$\begin{aligned} u = & \hat{v} - \hat{w} \\ \hat{v} = & -\hat{\boldsymbol{\omega}}^T(t) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}) \\ \hat{w} = & \hat{\boldsymbol{\rho}}^T \Psi(\mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{dn}) + \hat{\alpha} + \left(\frac{\hat{W}}{\mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\hat{\omega}$ 是对饱和限 α 和常值参数 ρ 的补偿估计. 将式 (13) 代入式 (12) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c \left[u + \boldsymbol{\omega}^T(t) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}) + \alpha + \right. \\ & \left. \boldsymbol{\rho}^T \Psi(\mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{dn}) + \frac{1}{\mu_1} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T \dot{\boldsymbol{\rho}} + \right. \\ & \left. \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2a(t)} \right) \mathbf{e}^T \mathbf{e} \right] + \frac{1}{\mu_2} \tilde{\alpha}^T \dot{\alpha} + \frac{1}{\mu_3} \tilde{W}^T \dot{W} \leq \\ & \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c [\boldsymbol{\omega}^T(t) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}) - \hat{\boldsymbol{\omega}}^T(t) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}) + \tilde{\alpha} + \\ & \left. \boldsymbol{\rho}^T \Psi(\mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{dn}) - (\hat{W}/\mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c)] + \right. \\ & \left. \frac{1}{\mu_1} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T (\dot{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}) + \frac{1}{\mu_2} \tilde{\alpha}^T (\dot{\alpha} - \dot{\hat{\alpha}}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{\mu_3} \tilde{W}^T (\dot{W} - \dot{\hat{W}}) + \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2a(t)} \right) \mathbf{e}^T \mathbf{e} \leq \right. \\ & \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c [\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T(t) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}) + \tilde{\alpha} + \boldsymbol{\rho}^T \Psi(\mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{dn})] + \\ & \tilde{W} - \frac{1}{\mu_1} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T \dot{\boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{\mu_2} \tilde{\alpha}^T \dot{\alpha} - \frac{1}{\mu_3} \tilde{W}^T \dot{W} + \\ & \left. \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2a(t)} \right) \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad (14) \right. \end{aligned}$$

其中, 假设任选常数 W 满足 $(\tilde{\alpha} \dot{\alpha} / \mu_2) + (\tilde{\boldsymbol{\rho}}^T \dot{\boldsymbol{\rho}} / \mu_1) \leq W$. 则根据自适应理论, 设计参数 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 、 $\hat{\alpha}$ 和 \hat{W} 的自适应律为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} &= \mu_1 \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c \Psi(\mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{dn}) \\ \dot{\hat{\alpha}} &= \mu_2 \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c \\ \dot{\hat{W}} &= \mu_3 t \quad (15) \end{aligned}$$

结合系统的周期特性, 设计时变参数 $\hat{\omega}$ 的周期自适应律为:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\omega}}(t-T) + g(t) \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}), & t \in [T, \infty) \\ g(t) \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}), & t \in [0, T) \end{cases} \quad (16)$$

其中, $g(t)$ 严格单调增, $g(0) = 0, g(T) = g_T$, 则 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$ 在以 $t = iT, i \in \mathbf{N}$ 为中心的邻域内连续.

选取参数足够小, 使得:

$$k_c = \frac{l}{2a(t)} - \frac{l}{2} > 0$$

将式 (13)、(14) 代入式 (12), 得:

$$\dot{V} \leq -k_c \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T(t) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}) \quad (17)$$

3 收敛性分析

定理 1. 对具有输入饱和和特性式 (2)~(3) 的非线性被控系统 (1), 若设计控制参数满足周期自适应学习律 (15)~(16), 则闭环系统在控制器 (13) 的作用下具有以下特性: 1) 系统输出能够跟踪上给定的参考信号, 即跟踪误差 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}(t)$ 收敛于 0; 2) 闭环系统的所有信号是有界的.

证明. 定义以下 Lyapunov-Krasovskii 型复合能量函数为:

$$E(t) = V(t) + \frac{1}{2r} \int_{t-T}^t \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T(\sigma) \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) d\sigma \quad (18)$$

其中, r 为正数.

步骤 1. 计算复合能量函数的差分. 根据式 (16) 和式 (17), $E(t)$ 在周期区间 $[t-T, t)$ 的差分为:

$$\begin{aligned} \Delta E(t) &:= E(t) - E(t-T) = \\ & \frac{1}{2r} \int_{t-T}^t \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T(\sigma) \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T(\sigma-T) \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma-T) d\sigma + \\ & V(t) - V(t-T) = \\ & \int_{t-T}^t [-\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \boldsymbol{\phi} \mathbf{e} - \frac{r}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T(\sigma-T) \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma-T)] d\sigma + \\ & \int_{t-T}^t \dot{V}(\sigma) d\sigma \quad (19) \end{aligned}$$

即

$$\Delta E(t) \leq \int_{t-T}^t -k_c \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \frac{r}{2} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c)^2 d\sigma \leq 0 \quad (20)$$

步骤 2. 证明跟踪误差的收敛性. 对 $\forall t \in [iT, (i+1)T], t = t_0 + iT, t_0 \in [0, T], i = 1, 2, \dots$, 显然 $t \rightarrow \infty \Leftrightarrow i \rightarrow \infty$, 有:

$$E(t) = E(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta E(t-jT) \quad (21)$$

根据式 (20) 和 (21), 由于 $t_0 \in [0, T]$, 得:

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(t_0) - k_c \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_0+(j-1)T}^{t_0+jT} \mathbf{e}^T \mathbf{e} d\sigma - \\ & \frac{r}{2} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_0+(j-1)T}^{t_0+jT} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c)^2 d\sigma \quad (22) \end{aligned}$$

下面证明 $E(t_0)$ 的有界性. 根据文献 [13] 和前面分析, 自适应律式 (15) 中的函数在区间 $[0, T)$ 上

连续,且系统(1)等式右边部分关于自变量 $\mathbf{x}(t)$ 和 t 也连续. 根据泛函微分方程解的存在性定理,必存在子区间 $[0, T_1) \subset [0, T)$, 使闭环系统(1)在该区间的解连续有界,因此 $E(t)$ 在 $[0, T_1)$ 上有界. 对于 $t \in [T_1, T)$, 对 $E(t)$ 求导数:

$$\dot{E}(t) = \dot{V} + \frac{1}{2r} \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \quad (23)$$

把式(15)代入式(22),进一步可得:

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &\leq -k_c \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \tilde{\omega}^T \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{e}^T P \mathbf{a}_c + \frac{1}{2r} \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} = \\ &-k_c \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\omega}^T \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} + \frac{1}{2r} \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} = \\ &-k_c \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\omega}^T \boldsymbol{\omega} + \gamma \cdot \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $\gamma = 1/(2r) - 1/\varepsilon < 0$, 由 Young 不等式, 对 $\ell > 0$ 有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\omega}^T \boldsymbol{\omega} &\leq \frac{1}{\varepsilon} (\ell \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} + \frac{1}{4\ell} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}) \leq \\ &\frac{\ell}{\varepsilon} \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} + \frac{1}{4\ell\varepsilon} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (25)$$

选择合适的参数 ℓ , 则:

$$\dot{E} \leq -k_c \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \varsigma \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} + \frac{1}{4\ell\varepsilon} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \quad (26)$$

其中, $\varsigma < 0$.

由于时变参数 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 是连续周期函数, 因此必然存在常数 ω_{\max} 使得 $\forall t \in [0, \infty)$ 时, 满足 $\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \leq \omega_{\max}$. 进而根据式(25)可知在紧集 $\left\{ (\mathbf{e}, \tilde{\omega}) \in \mathbf{R}^3 \mid k_c \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \varsigma \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \leq 1/(4\ell\varepsilon) \omega_{\max} \right\}$ 以外 $E(t)$ 负定, 可见 $E(t)$ 在 $[T_1, T)$ 上有界.

综上, $E(t)$ 在区间 $[0, T)$ 上有界, 即 $E(t_0)$ 有界, 又知式(26)中 $E(t)$ 是正定的, 由级数收敛的必要条件可知, 系统跟踪误差 $\mathbf{e}(t)$ 收敛于 0.

步骤 3. 证明闭环信号的有界性. 由 $E(t)$ 的有界性可知, \mathbf{e} 和 $\tilde{\omega}$ 有界. 又知 $\mathbf{x}_d(t)$ 和 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 有界, 由 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{e}(t)$ 和 $\tilde{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) - \hat{\omega}(t)$ 可推得 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\tilde{\omega}(t)$ 是有界的. \square

4 仿真实例

机械臂是一种强耦合、高度非线性且含诸多不确定因素的复杂系统, 其动态方程为^[14-15]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = J_m^{-1}(f(t) - gl_m \cos(x_1(t - \tau))) + \nu(t) \end{cases}$$

其中, $f(t)$ 为作用于节点的力矩, g 为重力加速度, $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别为力臂旋转角度和角速度, $\nu(t) = \exp(-z(t)[x_1^2(t - \tau) + x_2^2(t - \tau)])$ 是外界干扰, $z(t) = |\cos(2t)|$. 机械臂属性参数取 $m = 3 \text{ kg}$, $l_m = 1 \text{ m}$, $J_m = ml^2$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, 令 $\nu(t) = f(t)$, 且 $v_{\max} = 0.8$, $v_{\min} = -0.8$, $a = J_m^{-1}$, $\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}(t - \tau)) = \cos(x_1(t - \tau))$, $\boldsymbol{\vartheta} = -J_m^{-1} gl_m$. 系统周期 $T = 2\pi$, 则对象可写为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a\nu(t) + \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}(t - \tau))\boldsymbol{\vartheta} + \\ \quad \mathbf{e}^{-z(t)[x_1^2(t - \tau) + x_2^2(t - \tau)]} \end{cases}$$

为验证本文算法的有效性, 取参考轨迹 $\mathbf{x}_d = [x_{d1}, x_{d2}] = [x_{d1}, \dot{x}_{d1}]$, $x_{d1} = \sin t$, 依据控制律(13)~(15), 取 $\mathbf{a}_c = [0, 1]^T$, $\Psi(\mathbf{x}(t - \tau), \mathbf{e}, \dot{x}_{d2}) = [\mathbf{k}^T \mathbf{e} - \dot{x}_{d2}, \cos(x_1(t - \tau))]^T$, $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{e}) = [1, 0.5\mathbf{e}^T P b_c]^T$, 控制参数取 $\mathbf{k} = [1, 2]^T$, $\Gamma = 0.1$, $l = 8$, 则 $P = [12, 4; 4, 4]$; 自适应增益取:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{2t}{2\pi}, & t \in [0, 2\pi) \\ 0.5, & t \in [2\pi, \infty) \end{cases}$$

仿真结果如图 1~3 所示. 图 1 和图 2 分别为闭环系统变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的响应曲线; 图 3 为实时控制输入曲线.

从图 1~3 可以看出, 在存在输入饱和的情况下, 该机械臂系统跟踪误差很快趋近于 0, 即系统输出能够快速跟踪上给定信号, 因此算法是有效的.

5 结论

本文以不确定非线性时滞系统为研究对象, 讨论其跟踪控制问题, 在输入饱和的情况下, 提出了一种周期自适应补偿学习算法, 通过饱和补偿器补偿超出饱和限的部分, 并基于 Lyapunov 理论给出了收敛性证明. 常见机械臂系统的力矩输入控制仿真证明了该方法的有效性. 该方法不仅适用于机械臂控制系统, 而且还可以广泛地应用于如发酵过程等带有诸多不确定因素的复杂实际工程系统中.

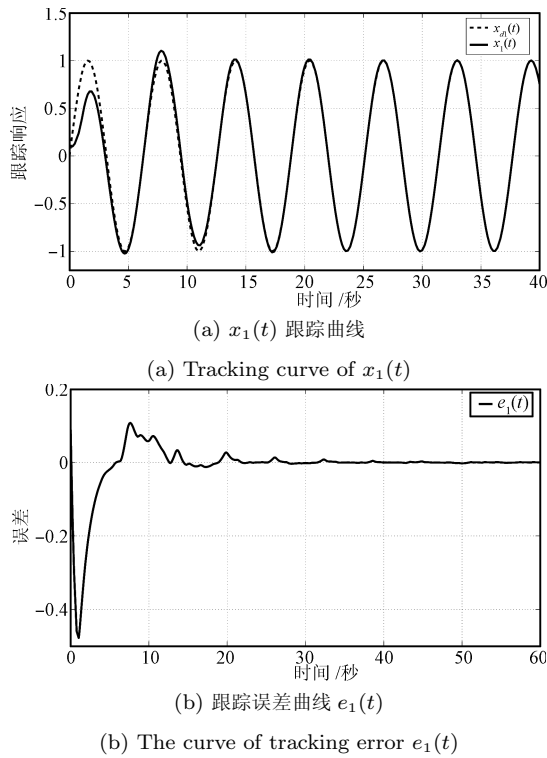


图 1 变量 $x_1(t)$ 的响应曲线

Fig. 1 The response curve of variable $x_1(t)$

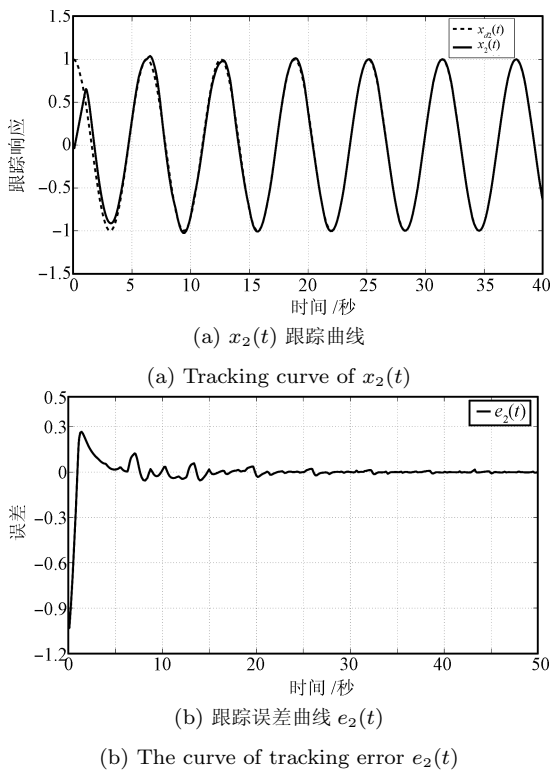


图 2 变量 $x_2(t)$ 的响应曲线

Fig. 2 The response curve of variable $x_2(t)$

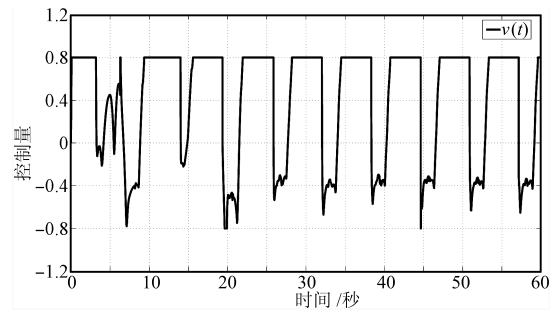


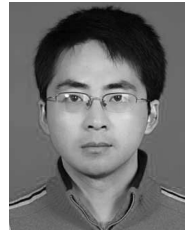
图 3 控制输入曲线

Fig. 3 The control input curve

References

- 1 Lv Ling-Ling, Duan Guang-Ren, Su Hai-Bin, Zhu An-Fu. A survey on linear discrete periodic systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 973–980
(吕玲玲, 段广仁, 苏海滨, 朱安福. 线性离散周期系统研究综述. 自动化学报, 2013, **39**(7): 973–980)
- 2 Liu Shi-Qian, Wang Yuan-Gang, Sheng An-Dong, Guo Zhi. Satisfactory estimation of linear discrete periodic systems. *Control Theory and Applications*, 2005, **22**(3): 359–363
(刘世前, 王远钢, 盛安冬, 郭治. 线性离散周期系统满意估计. 控制理论与应用, 2005, **22**(3): 359–363)
- 3 Liu Shi-Qian, Guo Zhi, Qian Long-Jun, Wang Yuan-Gang. Robust state estimation with desired indices of a class of linear periodic systems. *Control and Decision*, 2002, **17**(6): 843–846
(刘世前, 郭治, 钱龙军, 王远钢. 期望指标下一类线性周期系统鲁棒状态估计. 控制与决策, 2002, **17**(6): 843–846)
- 4 Lv Ling-Ling, Duan Guang-Ren, Zhou Bin. Parametric pole assignment for discrete-time linear periodic systems via output feedback. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(1): 113–120
(吕玲玲, 段广仁, 周彬. 线性离散周期系统输出反馈参数化极点配置. 自动化学报, 2010, **36**(1): 113–120)
- 5 Moor K L. *Iterative Learning Control for Deterministic Systems*. London: Springer-Verlag, 1993.
- 6 Xu J X, Yan R. *Linear and Nonlinear Iterative Learning Control*. New York: Springer-Verlag, 2003.
- 7 Longman R W. Iterative learning control and repetitive control for engineering practice. *International Journal of Control*, 2000, **73**(10): 930–954
- 8 Xu J X. A new periodic adaptive control approach for time-varying parameters with known periodicity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 579–583

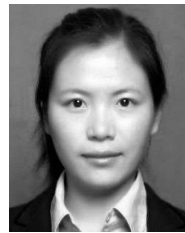
- 9 Yan R, Er M J, Pan Y J. Multi-period repetitive learning control for a class of unmatched systems with unknown control direction. In: Proceedings of American Control Conference. Minneapolis, USA: IEEE, 2006. 238–243
- 10 Sun Yun-Ping, Liu Yun, Li Jun-Min. Adaptive repetitive learning control for a class of second order nonlinear time-varying systems with mixed parameters. *Journal of Xidian University*, 2006, **33**(3): 495–499
(孙云平, 刘贇, 李俊民. 一类二阶时变非线性系统的混合自适应重复学习控制. 西安电子科技大学学报, 2006, **33**(3): 495–499)
- 11 Zhu Sheng, Sun Ming-Xuan, He Xiong-Xiong. S-class function based adaptive controller design for a class of periodically time-varying nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(8): 1137–1143
(朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 基于 S 类函数的严格反馈非线性周期系统的自适应控制. 自动化学报, 2010, **36**(8): 1137–1143)
- 12 Chen Wei-Sheng, Wang Yuan-Liang, Li Jun-min. Adaptive learning control for nonlinear parameterized systems with periodically time-varying delays. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(12): 1556–1560
(陈为胜, 王元亮, 李俊民. 周期时变时滞非线性参数化系统的自适应学习控制. 自动化学报, 2008, **34**(12): 1556–1560)
- 13 Chen W S, Li R H, Li J. Observer-based adaptive iterative learning control for nonlinear systems with time-varying delays. *International Journal of Automation and Computing*, 2010, **7**(4): 438–446
- 14 Tao Hong-Feng, Ding Bao, Yang Hui-Zhong. Forgetting learning algorithm with batches for iterative tracking control of nonlinear systems. *Information and Control*, 2011, **40**(6): 772–776
(陶洪峰, 丁保, 杨慧中. 非线性系统迭代跟踪控制的批次遗忘学习算法. 信息与控制, 2011, **40**(6): 772–776)
- 15 Sun Yun-Ping, Li Jun-Min, Wang Yuan-Liang. Adaptive repetitive learning control for a class of nonlinearly parameterized uncertain systems. *Control and Decision*, 2008, **23**(11): 1286–1290
(孙云平, 李俊民, 王元亮. 一类高阶非线性参数化系统自适应重复学习控制. 控制与决策, 2008, **23**(11): 1286–1290)



陶洪峰 江南大学物联网工程学院副教授. 2009 年获南京航空航天大学博士学位. 主要研究方向为复杂系统的迭代学习控制和容错技术. 本文通信作者.

E-mail: taohongfeng@hotmail.com

(**TAO Hong-Feng** Associate professor at the Institute of Automation, Jiangnan University. He received his Ph.D. degree from Nanjing University of aeronautics and Astronautics in 2009. His research interest covers iterative learning control, and fault tolerant control of complex systems. Corresponding author of this paper.)



霏学会 江南大学物联网工程学院硕士研究生. 2009 年获江南大学物联网工程学院学士学位. 主要研究方向为复杂系统的迭代学习控制.

E-mail: rs37521@126.com

(**XIAN Xue-Hui** Master student at the Institute of Automation, Jiangnan University. She received her bachelor degree from the School of Internet of Things, Jiangnan University in 2009. Her research interest covers iterative learning control of complex system.)



杨慧中 江南大学物联网学院教授. 2001 年获华东理工大学控制理论与控制工程专业博士学位. 主要研究方向复杂工业过程的建模与优化.

E-mail: yhz@jiangnan.edu.cn

(**YANG Hui-Zhong** Professor at the Institute of Automation, Jiangnan University. She received her Ph. D. degree in control theory and control engineering from East China University of Science and Technology in 2001. Her research interest covers modeling and analysis of complex industrial process.)