

基于模型降阶的平面三连杆欠驱动机械系统位置控制

盛洋¹ 赖旭芝² 吴敏²

摘要 针对第一关节为被动的平面三连杆欠驱动机械系统, 提出一种基于模型降阶的位置控制方法. 首先, 建立平面三连杆欠驱动系统数学模型, 并分析其积分特性; 其次, 将部分可积的三连杆系统分段降阶为两个完全可积的两连杆子系统, 并基于两子系统获得系统驱动杆与欠驱动杆之间的状态约束关系; 然后, 利用粒子群优化算法, 根据系统末端点目标位置计算驱动杆目标角度; 最后, 分别设计两连杆子系统控制器, 实现系统从任意初始位置到任意目标位置的控制目标. 仿真结果验证所提控制策略的有效性.

关键词 平面欠驱动机械系统, 模型降阶, 位置控制, 粒子群优化算法, Lyapunov 函数

引用格式 盛洋, 赖旭芝, 吴敏. 基于模型降阶的平面三连杆欠驱动机械系统位置控制. 自动化学报, 2014, 40(7): 1303–1310

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.01303

Position Control of a Planar Three-link Underactuated Mechanical System Based on Model Reduction

SHENG Yang¹ LAI Xu-Zhi² WU Min²

Abstract This paper presents a position control method based on model reduction for a planar three-link passive-active-active (PAA) under-actuated mechanical system with a passive first joint. Firstly, a mathematical model of the system is built, and its integral characteristic is analyzed. Next, the partially integrable three-link system is reduced to two completely integrable two-link systems by the method of piecewise degree reduction, and the state constraint relationships of the system between the active link and the passive link can be obtained based on the two subsystems. Then, the target angles of the active links are calculated by particle swarm optimization (PSO) algorithm according to the target position of the end of the system. Finally, the controllers of the two link subsystems are designed respectively to achieve the system control objective from any initial position to any target position. Simulation results demonstrate the validity of the proposed control method.

Key words Planar under-actuated mechanical system, model reduction, position control, particle swarm optimization (PSO) algorithm, Lyapunov function

Citation Sheng Yang, Lai Xu-Zhi, Wu Min. Position control of a planar three-link underactuated mechanical system based on model reduction. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(7): 1303–1310

欠驱动机械系统分为垂直欠驱动机械系统(含重力项)和平面欠驱动机械系统(不含重力项). 近十几年来, 国内外学者对垂直欠驱动机械系统进行了广泛的研究, 并且取得了一些成果^[1–4]. 但对于平面欠驱动机械系统由于重力项的缺失, 使其在平衡点的近似线性模型不可控^[5], 而无法用一般的线性二

次型调节控制方法实现系统的稳定控制. 讨论平面欠驱动系统控制问题, 能够进一步完善欠驱动领域的研究理论. 由于太空设备在正常的操控下存在失重现象, 在太空运行的机械臂可等效为平面机械运动, 研究平面欠驱动机械系统末端位置的稳定控制, 对正在迅速发展的航空航天系统的控制研究具有较大的战略意义.

对于平面欠驱动机械系统, Luca 等^[6]提出了小时域局部可控性 (Small-time local controllability, STLC) 判定条件, 并通过实例证明了第二关节为被动的平面两连杆欠驱动机械系统 (平面 Pendubot) 的局部可控性. 利用 STLC 判定条件, 文献 [7–8] 研究了平面 Pendubot 的轨迹预测和跟踪控制问题; Mahindrakar 等^[9]分析了第三关节为被动的平面三连杆 (Passive-active-active, PAA) 欠驱动系统的可控性, 文献 [10] 在可控性分析基础上讨论了无碰撞的轨迹规划控制. 从上述文献可以看出, 即使对于局

收稿日期 2013-06-14 录用日期 2013-12-09
Manuscript received June 14, 2013; accepted December 9, 2013
国家自然科学基金 (61374106, 61074112), 中南大学中央高校基本科研业务费专项资金 (2014zzts209) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61374106, 61074112), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Central South University (2014zzts209)
本文责任编辑 谭民
Recommended by Associate Editor TAN Min
1. 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083 2. 中国地质大学自动化学院 武汉 430074
1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083 2. School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan 430074

部可控的平面 Pendubot 系统, 控制器也只能保证在平衡点附件摆动, 无法实现系统的稳定控制.

第一关节为被动的平面欠驱动系统, 由于不满足 STLC 判定条件^[11], 其稳定控制比平面 Pendubot 的控制更加困难, 控制问题成为了欠驱动研究领域的一个难点.

Oriolo 等^[12] 对平面欠驱动系统的可积性进行了初步研究, 并证明了第一关节为被动的平面两连杆欠驱动系统 (平面 Acrobot) 具有完全可积的特性, 能够通过二次积分得到两杆角速度之间和角度之间的约束关系, 属于完整系统. 文献 [13] 利用平面 Acrobot 完全可积的特性, 提出了基于轨迹特性的平面 Acrobot 运动控制方法, 但该方法仅适用于二阶完整系统, 存在一定的局限性.

第一关节为被动的平面三连杆 PAA 欠驱动系统, 由于不满足 STLC 判定条件, 且不属于二阶完整系统, 使得上述文献所提控制方法均不再可行. 基于以上研究背景, 本文针对平面三连杆 PAA 欠驱动系统提出一种基于模型降阶的控制策略. 首先, 建立平面三连杆 PAA 欠驱动系统数学模型, 并分析积分特性为一阶非完整系统 (部分可积系统); 其次, 利用平面 Acrobot 完全可积和平面 PAA 欠驱动系统部分可积的特性, 将部分可积的三连杆系统分段降阶为两个完全可积的两连杆子系统, 对两个子系统分别进行分部积分运算, 获得系统驱动杆与欠驱动杆之间的状态约束关系; 然后, 使用粒子群优化算法, 根据系统末端点目标位置计算驱动杆目标角度; 最后, 对于两个两连杆子系统, 分别设计控制器, 实现系统从任意初始位置到任意目标位置的控制目标. 仿真结果验证所提控制策略的有效性.

1 动力学模型与积分特性

第一关节为被动的平面三连杆 PAA 欠驱动系统模型如图 1 所示, 其中 m_i 为第 i 连杆的质量 ($i = 1, 2, 3$), L_i 为第 i 连杆的长度 ($i = 1, 2, 3$), l_i 为第 i 连杆质心到前一关节的长度 ($i = 1, 2, 3$), J_i 为第 i 连杆的转动惯量 ($i = 1, 2, 3$), τ_i 为第 i 关节的驱动力矩 ($i = 1, 2, 3$).

记 $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$, 平面三连杆 PAA 欠驱动系统在平面运动, 系统势能 E_p 恒为零. 选择系统的拉格朗日函数为

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1)$$

其中, $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为系统动能; $\dot{\mathbf{q}}$ 为系统的角速度; $M(\mathbf{q})$ 为系统的惯性矩阵, 具有正定性和对称性, 形式如下:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{cases} M_{11} = a_1 + a_2 + a_4 + 2a_3 \cos q_2 + 2a_6 \cos(q_3) + 2a_5 \cos(q_2 + q_3) \\ M_{12} = a_2 + a_4 + a_3 \cos q_2 + 2a_6 \cos q_3 + a_5 \cos(q_2 + q_3) \\ M_{13} = a_4 + a_5 \cos(q_2 + q_3) + a_6 \cos q_3 \\ M_{21} = M_{12} \\ M_{22} = a_2 + a_4 + 2a_6 \cos q_3 \\ M_{23} = a_4 + a_6 \cos q_3 \\ M_{31} = M_{13} \\ M_{32} = M_{23} \\ M_{33} = a_4 \end{cases}$$

a_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) 为系统的结构参数,

$$\begin{cases} a_1 = m_1 l_1^2 + J_1 + (m_2 + m_3) L_1^2 \\ a_2 = J_2 + m_2 l_2^2 + m_3 L_2^2 \\ a_3 = (m_2 l_2 + m_3 L_2) L_1 \\ a_4 = J_3 + m_3 l_3^2 \\ a_5 = m_3 l_3 L_1 \\ a_6 = m_3 L_2 l_3 \end{cases} \quad (3)$$

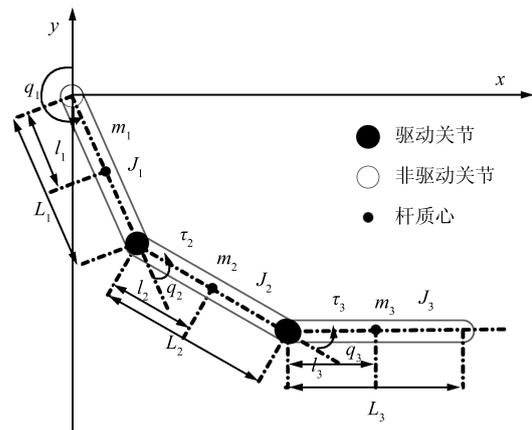


图 1 平面三连杆 PAA 欠驱动机械系统

Fig. 1 Planar three-link PAA under-actuated mechanical system

由欧拉-拉格朗日公式可以得到系统的动力学方程为

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = \tau_i, i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

上式可改写成

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5)$$

其中, $H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [H_1, H_2, H_3]^T$ 是科里奥利力与离心力的结合矩阵, $\ddot{\mathbf{q}}$ 为系统的角加速度, $\boldsymbol{\tau} = [0, \tau_2, \tau_3]^T$ 是驱动力矩矩阵,

$$\begin{aligned} H_1 &= -a_5(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) - \\ &\quad a_6(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3 \sin q_3 - \\ &\quad a_3(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 \sin q_2 \\ H_2 &= a_3\dot{q}_1^2 \sin q_2 - a_6(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3 \sin q_3 + \\ &\quad a_5\dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) \\ H_3 &= a_5\dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) + a_6(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin q_3 \end{aligned}$$

从系统动力学方程式 (5), 可知欠驱动杆的状态约束方程为:

$$M_{11}\ddot{q}_1 + M_{12}\ddot{q}_2 + M_{13}\ddot{q}_3 + H_1 = 0 \quad (6)$$

下面, 根据平面三连杆 PAA 系统的动力学描述, 分析系统的积分特性.

定义 1. 约束方程 (6) 的第一可积分条件^[12]:

- 1) 约束方程 (6) 中的重力项为常数;
- 2) 被动关节变量不在惯性矩阵中出现.

根据系统约束方程 (6), 可知重力项为 0, 且被动关节变量 q_1 未出现在惯性矩阵 $M(\mathbf{q})$ 中, 因此, 系统满足第一可积分条件.

为了得到系统角速度约束关系, 首先根据 M_{11} 、 M_{12} 、 M_{13} 和 H_1 的数学关系, 可得

$$H_1 = \dot{M}_{11}\dot{q}_1 + \dot{M}_{12}\dot{q}_2 + \dot{M}_{13}\dot{q}_3 \quad (7)$$

基于式 (7), 方程式 (6) 可改写为

$$\begin{aligned} (M_{11}\ddot{q}_1 + \dot{M}_{11}\dot{q}_1) + (M_{12}\ddot{q}_2 + \dot{M}_{12}\dot{q}_2) + \\ (M_{13}\ddot{q}_3 + \dot{M}_{13}\dot{q}_3) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

利用分部积分方法, 对式 (8) 从 $0 \rightarrow t$ 求定积分, 可得

$$(M_{11}\dot{q}_1 + M_{12}\dot{q}_2 + M_{13}\dot{q}_3) \Big|_0^t = 0 \quad (9)$$

即

$$M_{11}\dot{q}_1 + M_{12}\dot{q}_2 + M_{13}\dot{q}_3 - n_1 = 0 \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} n_1 &= [a_1 + a_2 + a_4 + 2a_3 \cos q_2(0) + 2a_6 \cos(q_3(0)) + \\ &\quad 2a_5 \cos(q_2(0) + q_3(0))] \dot{q}_1(0) + \\ &\quad [a_2 + a_4 + a_3 \cos q_2(0) + 2a_6 \cos q_3(0) + \\ &\quad a_5 \cos(q_2(0) + q_3(0))] \dot{q}_2(0) + \\ &\quad [a_4 + a_5 \cos(q_2(0) + q_3(0)) + \\ &\quad a_6 \cos q_3(0)] \dot{q}_3(0) \end{aligned}$$

当初始角速度 $\dot{q}_1(0)$ 、 $\dot{q}_2(0)$ 、 $\dot{q}_3(0)$ 都为 0 时, $n_1 = 0$. 式 (10) 可表示为

$$M_{11}\dot{q}_1 + M_{12}\dot{q}_2 + M_{13}\dot{q}_3 = 0 \quad (11)$$

由式 (11) 可知, 当控制两驱动杆角速度为 0 时, 欠驱动杆角速度也必然为 0, 从而达到系统静止的目标. 设系统惯性矩阵中欠驱动部分为 $\mathbf{M}_u = [M_{11}, M_{12}, M_{13}]$, 则式 (11) 可写成 $\mathbf{M}_u \dot{\mathbf{q}} = 0$.

定义 2. 约束方程 (6) 的第二可积分条件^[12]:

- 1) 第一可积分条件成立;
- 2) \mathbf{M}_u 的零空间分布是对合的.

定义 2 中的条件 1) 显然成立. \mathbf{M}_u 的零空间分布 $\Delta = \text{span}\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2\}$, 其中 $\boldsymbol{\theta}_1 = [-M_{12}, M_{11}, 0]^T$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2 = [-M_{13}, 0, M_{11}]^T$. 若李括号 $[\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2] \in \Delta$, 即矩阵 $A = [\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, [\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2]]$ 不满秩, 则分布 Δ 是对合的, 而

$$[\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2] = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_2}{\partial \mathbf{q}^T} \boldsymbol{\theta}_1 - \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_1}{\partial \mathbf{q}^T} \boldsymbol{\theta}_2 = \begin{bmatrix} -2a_6 \sin q_3 \\ 2a_5 \sin(q_2 + q_3) + 2a_6 \sin q_3 \\ -2a_3 \sin q_2 - 2a_5 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} M_{11}$$

则矩阵 A 的行列式为

$$\det A = (M_{11}^2) z(q_2, q_3)$$

其中

$$\begin{aligned} z(q_2, q_3) &= M_{11}(-2a_6 \sin q_3) + \\ &\quad M_{12}[2a_5 \sin(q_2 + q_3) + 2a_6 \sin q_3] - \\ &\quad M_{13}[2a_3 \sin q_2 + 2a_5 \sin(q_2 + q_3)] \end{aligned}$$

分别将 M_{11} 、 M_{12} 和 M_{13} 的参数代入 $z(q_2, q_3)$, 可得

$$\begin{aligned} z(q_2, q_3) &= (2a_5a_6 - 2a_3a_4) \sin q_2 + \\ &\quad (2a_3a_5 - 2a_1a_6) \sin q_3 + \\ &\quad (2a_2a_5 - 2a_3a_6) \sin(q_2 + q_3) \end{aligned}$$

假设 $q_2 = q_3 = \pi/2$ 时, $z(q_2, q_3) = (2a_5a_6 - 2a_3a_4) + (2a_3a_5 - 2a_1a_6)$, 根据式 (3), 可知

$$a_5a_6 - a_3a_4 < 0, \quad a_3a_5 - a_1a_6 < 0$$

即 $z(q_2, q_3) < 0$, 而 $M_{11}^2 > 0$, 所以矩阵 A 的行列式小于零, 矩阵 A 满秩, $[\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2] \notin \Delta$, 分布 Δ 不对合. 因此, 系统不满足第二可积分条件.

通过上述分析可知, 平面三连杆 PAA 欠驱动系统为一阶非完整系统, 不能直接通过分部积分得到系统角度约束关系.

2 系统模型的分段降阶

本节利用平面 Acrobot 完全可积和平面三连杆 PAA 系统部分可积的特性, 将部分可积的三连杆系统分成两阶段进行控制, 各阶段维持其中一个驱动连杆角度不变, 从而将部分可积的三连杆系统降阶为两个完全可积分的两连杆子系统。

在第一阶段控制过程中, 维持第三杆初始角度不变, 将第二、第三杆虚拟为第一根杆, 控制第二杆角度达到目标值; 在第二阶段控制过程中, 维持第二杆角度为目标值不变, 将第一、第二杆虚拟为第一根杆, 控制第三杆角度达到目标值。

基于系统模型的分段降阶, 在不同阶段, 利用平面 Acrobot 完全可积的特性, 通过分部积分运算, 分别获得不同阶段驱动杆与欠驱动杆之间的角度约束关系。

第一阶段维持第三杆初始角度和角速度不变, 利用 Matlab 工具中的积分函数 $\text{int}(\cdot)$, 对式 (11) 进行积分运算, 整理可得:

$$q_1 - q_1^1(0) = -\frac{-2a_6 \cos q_3(0)}{\sqrt{D_1}} \arctan E_1 - \frac{a_1 - a_2 - a_4}{\sqrt{D_1}} \arctan E_1 - \frac{q_2}{2} - f_1(q_2(0)) \quad (12)$$

其中, $q_1^1(0)$ 为第一杆在第一阶段的初始角度, $q_2(0)$ 和 $q_3(0)$ 分别为第二杆和第三杆初始角度,

$$D_1 = (-8a_3a_5 + 4a_2a_6 + 4a_1a_6 + 4a_4a_6) \cos q_2(0) + a_1^2 + a_2^2 + 4a_6^2 \cos^2 q_2(0) + a_4^2 - 4a_5^2 - 4a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_4 + 2a_2a_4$$

$$E_1 = \frac{G_1}{\sin q_2 \sqrt{D_1}}$$

$$G_1 = (a_1 + a_2 + a_4 + 2a_6 \cos q_2(0) - 2a_5 \cos q_2(0) - 2a_3)(\cos q_2 - 1) + 2a_5 \sin q_2(0) \sin q_2$$

$$f_1 = -\frac{-2a_6 \cos q_3(0) + a_1 - a_2 - a_4}{\sqrt{D_1}} \arctan E_1 - \frac{q_2}{2}$$

当第一阶段使第二杆角度达到目标值时, 即 $q_2 = q_{2d}$, 系统切换到控制过程的第二阶段. 此阶段维持第二杆角度和角速度不变, 同样利用 Matlab 工具中的积分函数 $\text{int}(\cdot)$, 对式 (11) 进行积分运算, 整理可得:

$$q_1 - q_1^2(0) = -\frac{2a_3 \cos q_{2d} + a_1 + a_2 - a_4}{\sqrt{D_2}} \arctan E_2 - \frac{q_3}{2} - f_2(q_3(0)) \quad (13)$$

其中, $q_1^2(0)$ 为第一杆在第二阶段的初始角度, q_{2d} 为第二杆目标角度,

$$D_2 = (4a_2a_3 + 4a_1a_3 + 4a_3a_4 - 8a_5a_6) \cos q_{2d} + a_1^2 + a_2^2 + 4a_3^2 \cos^2 q_{2d} + a_4^2 - 4a_5^2 - 4a_6^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_4 + 2a_2a_4$$

$$E_2 = \frac{G_2}{\sin q_3 \sqrt{D_2}}$$

$$G_2 = (a_1 + a_2 + a_4 + 2a_3 \cos q_{2d} - 2a_5 \cos q_{2d} - 2a_6)(\cos q_3 - 1) + 2a_5 \sin q_{2d} \sin q_3$$

$$f_2 = -\frac{q_3}{2} - \frac{2a_3 \cos q_{2d} + a_1 + a_2 - a_4}{\sqrt{D_2}} \arctan E_2$$

式 (12) 和式 (13) 分别为系统模型降阶后不同阶段, 其中一个驱动杆角度与欠驱动杆角度之间的约束关系. 基于这两组角度约束关系, 可通过控制驱动连杆连带实现控制欠驱动连杆的目标。

3 系统驱动杆的目标角度

对系统模型降阶后, 分别得到了不同阶段的驱动杆与欠驱动杆之间的角度约束关系. 本节基于粒子群优化算法, 在驱动杆与欠驱动杆之间角度约束关系的基础上, 计算系统末端点目标位置对应的各杆目标角度。

下面, 结合平面三连杆系统结构 (见图 2), 利用几何方法, 计算系统末端点坐标与各杆角度之间的约束关系。

图 2 中, X_1 、 X_2 、 X_3 分别为第一、二、三杆杆长在 x 轴上的投影, Y_1 、 Y_2 、 Y_3 分别为第一、二、三杆杆长在 y 轴上的投影. 分别为

$$\begin{cases} X_1 = -\sin q_1 L_1 \\ X_2 = -\sin(q_1 + q_2) L_2 \\ X_3 = -\sin(q_1 + q_2 + q_3) L_3 \\ Y_1 = \cos q_1 L_1 \\ Y_2 = \cos(q_1 + q_2) L_2 \\ Y_3 = \cos(q_1 + q_2 + q_3) L_3 \end{cases} \quad (14)$$

系统末端点坐标为

$$(X, Y) = (X_1 + X_2 + X_3, Y_1 + Y_2 + Y_3) \quad (15)$$

根据式 (14) 和式 (15), 有

$$\begin{cases} X = -\sin q_1 L_1 - \sin(q_1 + q_2) L_2 - \sin(q_1 + q_2 + q_3) L_3 \\ Y = \cos q_1 L_1 + \cos(q_1 + q_2) L_2 + \cos(q_1 + q_2 + q_3) L_3 \end{cases} \quad (16)$$

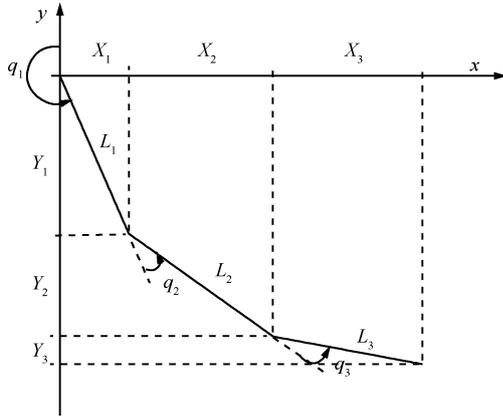


图2 平面三连杆系统结构图

Fig.2 Structure diagram of planar three-link system

在不同阶段, 分别存在驱动杆角度与欠驱动杆角度之间的约束关系, 如式 (12) 和式 (13) 所示. 将式 (12) 中的 q_1 作为在第二阶段的初始值, 代入式 (13), 可得系统在第二阶段稳定时 q_1 与 q_2 、 q_3 的关系式, 再将式 (16) 中的 q_1 用仅含有 q_2 、 q_3 的关系式代替, 可获得系统末端点 P 的坐标与 q_2 、 q_3 之间的约束关系.

根据系统末端点目标坐标求取驱动杆角度, 本质上就是系统的逆运动学求解. 对于平面三连杆欠驱动系统, 考虑其系统模型较为复杂且关节角度存在一定的约束关系, 本文采用粒子群优化算法, 实现其逆运动学求解.

粒子群优化算法^[14] 通过设计符合系统特性的迭代规则和评价函数, 使得粒子群在迭代过程中不断向解空间内的最优区域移动, 最终得到全局或局部的最优解. 粒子群优化算法的第 i 个粒子在第 j 维空间的运动方程为

$$\begin{aligned} v_i^j(t+1) &= \omega v_i^j(t) + p_1 r_1 (g_i^j - s_i^j(t)) + \\ &\quad p_2 r_2 (b^j - s_i^j(t)) \\ s_i^j(t+1) &= s_i^j(t) + v_i^j(t+1) \end{aligned} \quad (17)$$

其中, ω 为惯性权重, p_1 和 p_2 为权重因子, r_1 和 r_2 是介于 $[0, 1]$ 之间的随机数, $s_i^j(t)$ 和 $v_i^j(t)$ 分别表示粒子的位置和速度, g_i^j 为粒子个体最优位置, b^j 为整个粒子群的最优位置, 每次迭代后通过计算评价函数值进行更新.

选取评价函数 $f = |X - X_d| + |Y - Y_d|$. 其中, X 和 Y 表示当前系统末端点坐标, 可由系统末端点坐标与驱动杆角度约束关系计算得到. X_d 和 Y_d 表示系统末端点目标坐标.

该评价函数可使粒子群不断向解空间内的最优区域移动, 进而得到驱动杆的目标角度. 所得角度可保证实际系统末端点坐标与期望系统末端点目标坐标的距离误差在系统误差允许范围内.

4 系统控制器设计

根据系统驱动杆的目标角度, 在不同阶段分别构造 Lyapunov 函数, 使系统在第一阶段实现第二杆角度达到目标角度, 维持第三杆为初始状态的控制目标; 而在第二阶段最终实现系统的位置控制目标.

定义 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T$, 则系统模型的状态空间形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = F_1(\mathbf{x}) + b_1(\mathbf{x})\tau_2 + c_1(\mathbf{x})\tau_3 \\ \dot{x}_5 = F_2(\mathbf{x}) + b_2(\mathbf{x})\tau_2 + c_2(\mathbf{x})\tau_3 \\ \dot{x}_6 = F_3(\mathbf{x}) + b_3(\mathbf{x})\tau_2 + c_3(\mathbf{x})\tau_3 \end{cases} \quad (18)$$

式 (18) 可改写为如下向量形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} \quad (19)$$

其中, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [x_4, x_5, x_6, F_1, F_2, F_3]^T$, F_1 、 F_2 和 F_3 组成的列向量满足 $[F_1, F_2, F_3]^T = -M^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x})]^T$, $g_1(\mathbf{x})$ 为全 0 的 3 阶矩阵,

$$g_2(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & b_1(\mathbf{x}) & c_1(\mathbf{x}) \\ 0 & b_2(\mathbf{x}) & c_2(\mathbf{x}) \\ 0 & b_3(\mathbf{x}) & c_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} = M^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}$$

其中, b_1 、 b_2 、 b_3 、 c_1 、 c_2 和 c_3 为关于 \mathbf{x} 的非线性函数.

4.1 第一阶段控制器设计

构造第二、三驱动杆的 Lyapunov 函数, 维持第三杆初始角度不变, 实现第二杆角度的控制目标.

可构造 Lyapunov 函数 V_1 和 V_2 ,

$$\begin{aligned} V_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(x_2 - x_{2d})^2 + \frac{1}{2}x_5^2 \\ V_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(x_3 - x_3(0))^2 + \frac{1}{2}x_6^2 \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $x_{2d} = q_{2d}$, $x_3(0) = q_3(0)$. 分别对 V_1 和 V_2 求导, 并结合系统状态方程式 (19) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\mathbf{x}) &= x_5(x_2 - x_{2d} + F_2 + b_2\tau_2 + c_2\tau_3) \\ \dot{V}_2(\mathbf{x}) &= x_6(x_3 - x_3(0) + F_3 + b_3\tau_2 + c_3\tau_3) \end{aligned} \quad (21)$$

依据上式, 为保证系统姿态的持续收敛, 驱动杆的控制律设计为

$$\begin{aligned} \tau_2 &= (-x_2 + x_{2d} - F_2 - \lambda_1 x_5 - c_2\tau_3)b_2^{-1} \\ \tau_3 &= (-x_3 + x_3(0) - F_3 - \lambda_2 x_6 - b_3\tau_2)c_3^{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

式中, 常数 λ_1 和 λ_2 均大于 0, 为调节收敛速度的常数参数, 同时为避免奇异问题, 保证 b_2 和 c_3 均大于 0.

式 (22) 的控制律保证了下述收敛条件成立:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\mathbf{x}) &= -\lambda_1 x_5^2 \leq 0 \\ \dot{V}_2(\mathbf{x}) &= -\lambda_2 x_6^2 \leq 0\end{aligned}\quad (23)$$

下面利用 Lasalle 不变性原理, 证明式 (22) 的控制律可实现系统第一阶段的控制目标. 首先给出不变集的定义.

定义 3 (不变集). 设 $\mathbf{x}(t)$ 为系统 (19) 的解, 如果存在一个集合 Ω , 使得当 $\mathbf{x}(0) \in \Omega$ 时有 $\mathbf{x}(t) \in \Omega, \forall t \geq 0$, 那么称 Ω 为系统 (19) 的不变集.

定理 1 (Lasalle 不变性原理). 设 Ω 为系统不变集, $\Phi = \{\mathbf{x}(t) \in \Omega | \dot{V}_1(\mathbf{x}) = 0, \dot{V}_2(\mathbf{x}) = 0\}$, W 为 Φ 中最大不变集. 则对于 $\mathbf{x}(0) \in \Phi, \mathbf{x}(t) \in W, t \rightarrow \infty$.

集合 Φ 为系统 (19) 在 $\dot{V}_1(\mathbf{x}) = 0$ 和 $\dot{V}_2(\mathbf{x}) = 0$ 成立时的解, 根据式 (23) 可知 $x_5 = 0$ 和 $x_6 = 0$, 即 $V_1(\mathbf{x})$ 、 $V_2(\mathbf{x})$ 、 x_2 和 x_3 都为常数.

当 $x_5 = 0$ 和 $x_6 = 0$ 时, 根据式 (26), 可知 $x_4 = 0$. 另外, $[F_1, F_2, F_3]^T = -M^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, 根据式 (22) 中的 H_1 、 H_2 和 H_3 , 可得

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0 \quad (24)$$

由式 (19) 可知

$$[\dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6]^T = [F_1, F_2, F_3]^T + g_2(\mathbf{x})\tau \quad (25)$$

进而得

$$g_2(\mathbf{x})\tau = M^{-1}(\mathbf{q})\tau = \mathbf{0} \quad (26)$$

因为矩阵 M 是正定的, 根据式 (26), 有 $\tau = [0 \ \tau_2 \ \tau_3]^T = \mathbf{0}$. 将 $\tau = [0 \ \tau_2 \ \tau_3]^T = \mathbf{0}$ 代入式 (22), 可得到 $(x_2, x_3) = (x_{2d}, x_3(0))$. 系统的最大不变集含 W 为 $[x_2 \ x_3 \ x_5 \ x_6]^T = [x_{2d} \ x_3(0) \ 0 \ 0]^T$, 即采用式 (22) 控制器, 系统实现了第一阶段的控制目标.

控制策略从第一阶段进入第二阶段的切换条件:

- 1) $|x_2 - x_{2d}| \leq e_1, |x_5| \leq e_2$;
- 2) $|x_3 - x_3(0)| \leq e_1, |x_6 - x_6(0)| \leq e_2$.

其中, e_1 和 e_2 为较小的正数.

在系统第一阶段控制中, 第三杆角度和角速度一直维持初始值, 即 $x_3 = x_3(0), x_6 - x_6(0) = 0$ rad/s. 因此, 当切换条件 1) 满足时, 控制策略就切换到第二阶段.

4.2 第二阶段控制器设计

与第一阶段控制器构造类似, 分别构造第二、三驱动杆的 Lyapunov 函数, 维持第二杆为目标角度,

控制第三杆达到目标角度, 最终实现系统的控制目标.

可构造 Lyapunov 函数 V_3 和 V_4

$$\begin{aligned}V_3(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(x_2 - x_{2d})^2 + \frac{1}{2}x_5^2 \\ V_4(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(x_3 - x_{3d})^2 + \frac{1}{2}x_6^2\end{aligned}\quad (27)$$

其中, x_{3d} 为第三杆目标角度. 分别对 V_3 和 V_4 求导, 并结合系统状态方程式 (19) 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(\mathbf{x}) &= x_5(x_2 - x_{2d} + F_2 + b_2\tau_2 + c_2\tau_3) \\ \dot{V}_4(\mathbf{x}) &= x_6(x_3 - x_{3d} + F_3 + b_3\tau_2 + c_3\tau_3)\end{aligned}\quad (28)$$

依据上式, 为保证系统姿态持续收敛, 第二杆的控制律设计为

$$\begin{aligned}\tau_2 &= (-x_2 + x_{2d} - F_2 - \lambda_1 x_5 - c_2\tau_3)b_2^{-1} \\ \tau_3 &= (-x_3 + x_{3d} - F_3 - \lambda_2 x_6 - b_3\tau_2)c_3^{-1}\end{aligned}\quad (29)$$

式 (29) 的控制律保证了下述收敛条件成立:

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(\mathbf{x}) &= -\lambda_1 x_5^2 \leq 0 \\ \dot{V}_4(\mathbf{x}) &= -\lambda_2 x_6^2 \leq 0\end{aligned}\quad (30)$$

$\dot{V}_3(\mathbf{x})$ 和 $\dot{V}_4(\mathbf{x})$ 为半负定, $\dot{V}_3(\mathbf{x}) = 0, \dot{V}_4(\mathbf{x}) = 0$ 当且仅当 $x_5 = 0, x_6 = 0$.

与第一阶段分析过程类似, 利用 Lasalle 不变性原理, 可知当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_2 = x_{2d}$ 和 $x_3 = x_{3d}$. $[x_2 \ x_3 \ x_5 \ x_6]^T = [x_{2d} \ x_{3d} \ 0 \ 0]^T$ 为系统第二阶段的不变集. 采用式 (29) 控制器, 可实现系统第二阶段的控制目标.

当驱动杆角度分别稳定在各自目标角度时, 根据式 (12) 和式 (13) 约束关系, 连带实现了欠驱动杆角度控制, 最终实现系统位置控制目标.

5 系统仿真研究

本节利用 Matlab 搭建系统模型, 并设计系统模型参数进行仿真研究, 验证上述方法的有效性. 平面 PAA 欠驱动系统的模型参数选择如表 1 所示.

表 1 平面三连杆 PAA 系统模型参数

Table 1 Model parameters of planar three-link PAA system

i	m_i (kg)	L_i (m)	l_i (m)	J_i (kg·m ²)
1	1	1	1	0.08333
2	1	1	1	0.08333
3	1	1	1	0.08333

取系统仿真步长为 0.001 s, 各杆的初始角度 $\mathbf{q}(0) = [0, 0, 0]^T$ 且各杆角速度 $\dot{\mathbf{q}}(0) = [0, 0, 0]^T$,

对应的初始末端点位置坐标为 $[0, 3]^T$. 控制系统末端点目标位置坐标为 $[-2.2, -1.3]$, $e_1 = 0.001$, $e_2 = 0.001$. 粒子群优化算法迭代方程的参数分别为 $p_1 = 2$, $p_2 = 1.8$ 和 $w = 0.53$, 粒子群中的粒子个数为 15, 搜索空间维数为 2, 系统最大迭代次数为 1500. 利用粒子群优化算法, 可得与末端点目标位置坐标对应的驱动杆目标角度为 $[x_{2d}, x_{3d}] = [7.6024, 18.4766]$.

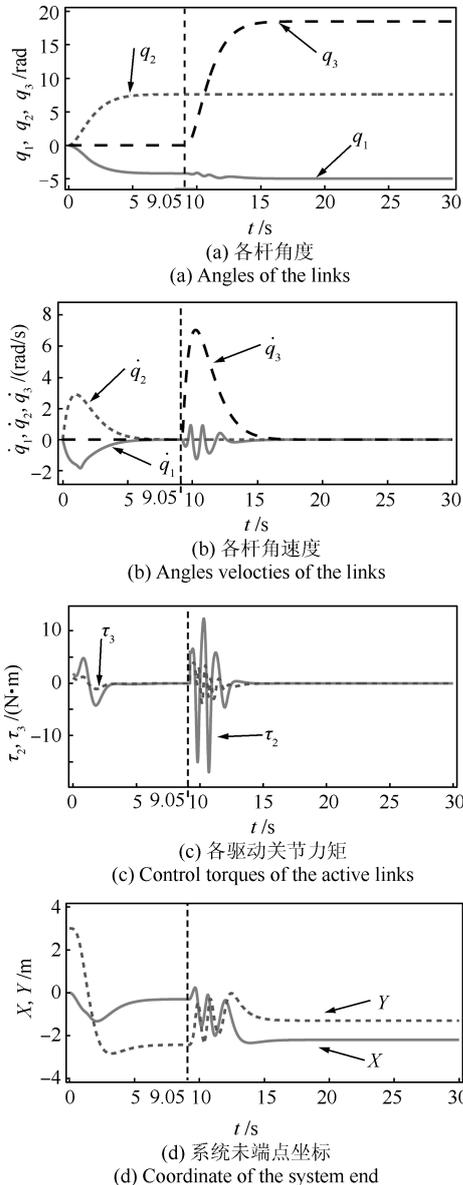


图 3 平面三连杆 PAA 系统位置控制仿真结果
Fig. 3 Simulations for position control of planar three-link PAA system

平面 PAA 欠驱动系统在整个运动过程中状态变量的变化规律如图 3 所示, 图 3(a)~(d) 分别表示各杆角度、各杆角速度、驱动力矩和末端点坐标随时间的变化规律。

1) 图 3(a) 表明, 系统各杆角度的变化分为两个阶段: 第一阶段是第三杆角度保持不变, 第二杆角度逐渐达到目标角度 x_{2d} ; 第二阶段是第二杆角度保持目标角度不变, 第三杆角度趋于目标角度 x_{3d} . 第一阶段在 9.05 s 结束, 其后控制策略进入第二阶段。

2) 图 3(b) 表明, 各杆的角速度均在 8 rad/s 以内, 变化较为平缓。

3) 图 3(c) 表明, 系统驱动杆的驱动力矩始终保持在 10 N·m 以内, 力矩较小。

4) 图 3(d) 表明, 末端点坐标在系统稳定时为 $[-2.2054, -1.2945]$ 。

对于不同的初始角度或不同的系统末端点目标坐标, 同样可以利用上述控制策略, 实现系统末端点的位置控制。

综上所述, 系统在有限时间内稳定到了给定的目标位置, 实现了平面欠驱动机械系统的稳定控制, 解决了平面欠驱动机械系统难以稳定在平衡点的难题。

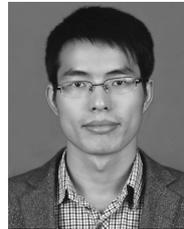
6 结论

为了使平面三连杆 PAA 欠驱动机械系统末端点从任意初始位置移动到任意目标位置, 本文提出了一种基于模型降阶的位置控制方法. 该控制方法是利用平面 Acrobot 完全可积和平面三连杆 PAA 系统部分可积的特性, 将部分可积的三连杆系统分段降阶为两个完全可积的两连杆子系统, 并基于两子系统获得系统驱动杆与欠驱动杆之间的状态约束关系; 其次, 利用粒子群优化算法, 根据系统末端点目标位置计算驱动杆目标角度; 最后, 分别设计控制器, 使各驱动杆角度趋于目标角度, 并实现欠驱动杆角度连带控制, 最终实现系统位置控制. 该方法实现了第一关节为被动的平面三连杆 PAA 欠驱动机械系统的位置控制。

References

- 1 Lai X Z, Pan C Z, Wu M, Yang S X. Unified control of n -link underactuated manipulator with single passive joint: a reduced order approach. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, **56**(12): 170–185
- 2 Huang Jing, Li Chuan-Jiang, Ma Guang-Fu, Liu Gang. Generalised inversion based maneuver attitude control for underactuated spacecraft. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(3): 285–292
(黄静, 李传江, 马广富, 刘刚. 基于广义逆的欠驱动航天器姿态机动控制. *自动化学报*, 2013, **39**(3): 285–292)
- 3 Xin X, She J H, Yamasaki T, Liu YN. Swing-up control based on virtual composite links for n -link underactuated robot with passive first joint. *Automatica*, 2009, **45**(9): 1986–1994

- 4 Zhang An-Cai, Lai Xu-Zhi, She Jin-Hua, Wu Min. Stabilization control of underactuated acrobot based on inverse method. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(8): 1263–1269 (张安彩, 赖旭芝, 余锦华, 吴敏. 基于倒转方法的欠驱动 Acrobot 系统稳定控制. *自动化学报*, 2012, **38**(8): 1263–1269)
- 5 Chen Wei, Yu Yue-Qing, Zhang Xu-Ping, Su Li-Ying. Vibration controllability of underactuated flexible manipulator. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(4): 391–398 (陈炜, 余跃庆, 张绪平, 苏丽颖. 欠驱动柔性机器人的振动可控性分析. *自动化学报*, 2007, **33**(4): 391–398)
- 6 Luca A D, Mattone R, Oriolo G. Stabilization of an underactuated planar 2R manipulator. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2000, **10**(4): 181–198
- 7 Akbarimajd A, Kia S. NARMA-L2 controller for 2-DOF underactuated planar manipulator. In: Proceedings of the 11th International Conference on Control Automation Robotics and Vision. Singapore: IEEE, 2010. 195–200
- 8 Alfredo J R F, Jaime A G, Rafael C L. Trajectory planning and control of an underactuated planar 2R manipulator. In: Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications. Mexico City, Mexico: IEEE, 2011. 548–552
- 9 Mahindrakar A D, Banavar R N, Reyhanoglu M. Controllability and point-to-point control of 3-DOF planar horizontal underactuated manipulators. *International Journal of Control*, 2005, **78**(1): 1–13
- 10 Mahindrakar A D, Banavar R N. Controllability properties of a planar 3R underactuated manipulator. In: Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications. Glasgow, Scotland, UK: IEEE, 2002. 489–494
- 11 Luca A D, Iannitti S, Mattone R, Oriolo G. Underactuated manipulators: control properties and techniques. *Machine Intelligence and Robotic Control*, 2002, **4**(3): 113–125
- 12 Oriolo G, Nakamura Y. Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: underactuated manipulators. In: Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control. Brighton, England: IEEE, 1991. 2398–2403
- 13 Cao S Q, Lai X Z, Wu M. Motion control method of planar acrobot based on trajectory characteristics. In: Proceedings of the 31st Chinese Control Conference. Hefei, China: IEEE, 2012. 4910–4915
- 14 Shi Y H, Eberhart R. A modified particle swarm optimizer. In: Proceedings of the 1998 IEEE World Congress on Computational Intelligence. Anchorage, AK: IEEE, 1998. 69–73



盛 洋 中南大学信息科学与工程学院硕士研究生. 主要研究方向为机器人控制和非线性系统控制.

E-mail: shengyangwh@csu.edu.cn

(**SHENG Yang** Master student at the School of Information Science and Engineering, Central South University. His research interest covers robot control and nonlinear system control.)



赖旭芝 中国地质大学自动化学院教授. 主要研究方向为智能控制, 机器人控制和非线性系统控制. 本文通信作者.

E-mail: laixz@cug.edu.cn

(**LAI Xu-Zhi** Professor at the School of Automation, China University of Geosciences. Her research interest covers intelligent control, robot control, and nonlinear system control. Corresponding author of this paper.)



吴 敏 中国地质大学自动化学院教授. 主要研究方向为鲁棒控制, 智能控制和过程控制. E-mail: wumin@cug.edu.cn

(**WU Min** Professor at the School of Automation, China University of Geosciences. His research interest covers robust control, intelligent control, and process control.)