基于鲁棒优化的系统辨识算法研究

钱富才 [1,2] 黄姣茹 [1] 秦新强 [3]

摘 要 输入-输出数据是解决系统辨识问题的关键要素, 传统的辨识理论除了假定影响输入-输出数据干扰的密度函数已知外, 还要假定输入-输出数据能够精确获得, 完全忽略了所用数据的质量. 本文突破了传统理论的两个假设, 首先用工程上易于获得的干扰的有界集合代替干扰的密度函数, 并在特定数据不确定性结构下, 考虑了数据质量问题, 然后, 以半定规划为基础, 导出了鲁棒对等式, 从而将系统辨识转化为对数据质量具有鲁棒性的优化问题, 通过求解该优化问题, 得到了一种新的鲁棒优化辨识方法, 仿真结果表明了新方法的可行性和有效性.

关键词 系统辨识, 不确定性, 鲁棒优化, 半定规划

引用格式 钱富才, 黄姣茹, 秦新强. 基于鲁棒优化的系统辨识算法研究. 自动化学报, 2014, **40**(5): 988−993

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00988

Research on Algorithm for System Identification Based on Robust Optimization

QIAN Fu-Cai[1,2] HUANG Jiao-Ru[1] QIN Xin-Qiang[3]

Abstract Input-output data is a key element in solving the problem of system identification. The traditional identification theory takes into account the assumptions that the density function of the disturbance is known and the input-output data can be accurately obtained, while completely ignores the quality of the data used. In the paper, to overcom the limitation of the two assumptions, a bounded set is firstly taken which can be obtained easily in engineering as an alternative to the density function. Subsequently, with the specific uncertain data structure and considering the effect of the data quality, robust counterpart is derived by the semi-definite programming theory. And, the system identification problem is converted to an optimization problem which is robust to the uncertain data. By solving the optimization problem, a new identification algorithm based on robust optimization is proposed. Simulation results show the feasibility and effectiveness.

Key words System identification, uncertainty, robust optimization, semi-definite programming

Citation Qian Fu-Cai, Huang Jiao-Ru, Qin Xin-Qiang. Research on algorithm for system identification based on robust optimization. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(5): 988−993

收稿日期 2013-04-08 录用日期 2013-08-12
Manuscript received April 8, 2013; accepted August 12, 2013
国家自然科学基金 (61273127), 高等学校博士学科点专项科研基金 (20116118110008) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61273127), and Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (20116118110008)
本文责任编委 潘泉
Recommended by Associate Editor PAN Quan

1. 西安理工大学自动化与信息工程学院 西安 710048 2. 西安工业大学新型网络与检测控制国家地方联合工程实验室 西安 710032 3. 西安理工大学理学院 西安 710054
1. School of Automation and Information Engineering, Xi′an University of Technology, Xi′an 710048 2. The Notional-Local Joint Engineering Laboratory for New Network and Detection Control, Xi′an Technological University, Xi′an 710032 3. School of Science, Xi′an University of Technology, Xi′an 710054

系统辨识是在给定系统模型结构的前提下, 利用输入-输出数据, 按照一定的优化准则, 确定模型中的未知参数[1]. 经过半个多世纪的发展, 以随机理论为框架的系统辨识已经取得了丰富成果并得到了广泛应用, 产生了利用带噪声的观测数据对模型未知参数进行估计的一大批算法, 如最小二乘算法[2]、随机逼近算法[3]、信息准则算法[4] 和偏差补偿算法[5] 等. 另外, 当假设模型不确定扰动为高斯白噪声时, 以 Bayes 理论为基础, 提出了针对线性系统的 Kalman 方法[6] 和针对非线性系统的扩张 Kalman 方法[7]. 系统辨识的建模方法以控制系统为目的, 系统辨识与反馈机制相结合产生了自适应控制, 特别地, 当系统中存在两种不确定性时, 为解决控制与辨识的耦合问题, Li 等提出了一些新的对偶控制策略[8−11], 以此为基础设计出的控制器, 一方面能够驱动系统朝着期望的目标运行, 另一方面又能兼顾估计质量.

系统辨识方法的本质就是利用输入-输出数据把模型中未知参数的估计问题转化为优化问题. 近年来, 在优化领域中产生了许多新方法处理不确定性, 特别是鲁棒优化[12−14]. 鲁棒优化最早由 Soyster[15] 提出, 用于求解不确定线性规划问题 ($\min_x c'x$ s.t. $Ax = b$). 其基本思想为, 假定在线性规划中, 数据矩阵 A 中的每个列向量、向量 b 和 c 在一些给定的有界集 (如椭圆或圆) 内变化, 求决策变量 x, 使得对有界集内的所有向量, 目标函数达到最优. 由于该模型工程上的实用性和数学上的易处理性, 随后众多学者对其进行了进一步的深入研究和应用推广, 代表性工作有 Ben-Tal 等和 Bandi 等[16−17]. Ben-Tal 等对不确定集合下各类凸规划的鲁棒问题进行了研究, Bandi 等将重点放在了鲁棒对等式继承初始不确定优化问题的计算复杂度上, 建立了相应的鲁棒优化理论. 鲁棒优化的主要特点是获得一个 "鲁棒解", 这个解可能不是最好的, 但在给定的不确定有界集合中, 却始终能保持该方案的可行性, 使所建立的不确定模型能适应外界干扰在一定范围内变化带来的影响, 实现了最优性和鲁棒性间的有效折衷.

上述所有辨识方法有 2 个基本特点: 1) 影响系统的不确定性干扰具有随机统计特性, 即概率分布函数已知. 2) 所用的输入输出数据不但已知, 而且能够精确得到. 受鲁棒优化的启发, 本文对模型不确定性和数据不确定性共存的系统辨识问题进行深入研究.

我们有足够理由认为测量数据中存在不确定性, 这是因为: 1) 这些数据本身反映了特定技术下的设备工况或者过程特性的种种波动, 很难或者几乎无法精确已知. 2) 正如文献 [18] 指出的那样, 系统结构往往具有非随机不确定性以及数据信息不足而产生的不确定性. 系统结构上的不确定性多数来自于对复杂系统的简化, 如, 用线性模型近似非线性系统、低阶模型代替高阶系统、有限维模型描述无限维系统、简单非线性函数组合逼近未知结构的复杂系统. 所有这些都会引入未建模动态或者导致模型失配, 不可避免地会产生结构不确定性. 而这些不确定性不随时间和观测数据的改变而改变, 它们一般不具有随机性质, 这类不确定性对估计模型的精度有直接影响. 3) 存在一些不确定性也可能本质上具有随机性质, 但由于缺乏数据信息而得不到它们的统计性质[18]. 传统的统计类方法需要大量的实验数据. 研究表明, 即使统计数据的较小误差, 可能会导致推断出的分布与实际分布存在巨大差异, 因此, 在滤波器最初设计阶段, 就算有很多可用的实验数据, 也未必能获得不确定性变量可靠的分布函数, 但是, 如果把可用数据与工程经验、容忍范围相结合, 很容易能够确定出包含不确定性变量的某个集合. 对于上述两种不确定

性或者它们的混合形式, 用统计平均量来减少或消除它们的影响有很大困难; 4) 目前的工程问题都是以计算机作为求解基础, 也许这些数据向量在前若干位与真值相同, 而在其他位会差异很大, 同样的问题也存在于数/模转化之中. 文献 [19] 对于由 1 000 个决策变量和 410 个约束的线性规划问题进行了深入研究, 结果表明: 当第 372 个约束中的系数 a_j 扰动成 $a_j+\xi a_j$ (ξ 是来自于区间 $[-0.001, 0.001]$ 的均匀分布), 该约束不满足的概率高达 50% 以上. 由此可以看出, 尽管标称值 a_j 的扰动极小, 但其对解的影响应引起足够重视.

本文用系统噪声无穷范数有界条件替代了传统辨识问题中的概率分布已知的假设, 同时, 假定获得的数据也包含结构上的不确定性, 推广了传统的最小二乘算法 (Least square method, LS). 针对这类系统辨识问题, 提出了一种以鲁棒二阶锥规划理论为基础的鲁棒最小二乘算法 (Robust least square method, RLS). 与传统方法相比, 该方法只需知道未知干扰的变化范围, 从而弥补了噪声局限于特定概率分布的缺陷. 这样处理更适合解决实际问题, 因为验前估计不确定干扰的变化范围比验前假定其概率密度函数要容易得多. 同时, 从最坏情况出发, 即通过实现不确定集合中最大残差的最小化, 达到对未知系统的辨识, 具有更强的鲁棒性, 另外, 也考虑了基于数据辨识的数据质量问题, 即数据的不确定性.

1 问题描述

考虑如下单输入单输出离散线性系统:

$$\begin{aligned}y(k)=&a_1y(k-1)+\cdots+a_ny(k-n)+b_0u(k)+\\&b_1u(k-1)+\cdots+b_mu(k-m)+w(k)\end{aligned}\tag{1}$$

其中, $u(k)$ 为系统的输入, $y(k)$ 为系统的输出, m, n 为系统的模型阶次, a_1, $\cdots$, a_n, b_0, b_1, $\cdots$, b_m 为待辨识的系统参数, $w(k)$ 为系统噪声.

定义如下数据向量 $h(k)$ 和参数向量 θ:

$$\begin{aligned}h(k)=&[y(k-1),\cdots,y(k-n),\\&u(k),\cdots,u(k-m)]\end{aligned}\tag{2}$$

$$\theta=[a_1,a_2,\cdots,a_n,b_0,b_1,\cdots,b_m]^{\mathrm T}\tag{3}$$

根据式 (2) 和式 (3), 系统 (1) 可以表示为

$$y(k)=h(k)\theta+w(k)\tag{4}$$

对系统进行 L 次实验, 即 $k=1,\cdots,L$, 利用式 (4) 可得

$$Y=H\theta+w$$

其中

$$\begin{aligned}H^{\mathrm T}=&[h^{\mathrm T}(1),\cdots,h^{\mathrm T}(L)]\\Y=&[y(1),\cdots,y(L)]^{\mathrm T}\\w=&[w(1),\cdots,w(L)]^{\mathrm T}\end{aligned}$$

当噪声为白噪声时, 最小二乘方法可以实现对参数的无偏估计. 然而在实际问题中, 系统会受到各种外界的不确定因素干扰, 比如通过模数转化器或传感器进行测量所引入的误差, 机器数的摄入误差和建模误差等, 这些不一定服从某种概率分布.

本文给出下述假设:

假设 1. 噪声 w 无穷泛数有界, 即 $\|w\|_\infty\le\rho$, 其中 $\rho\,(\ge 0)$ 根据实际工程问题验前确定.

假设 2. 数据 H, Y 的不确定性如下描述:

$$H(\eta)=H_0+\sum_{i=1}^{s}\eta_iH_i\tag{5}$$

$$Y(\eta)=Y_0+\sum_{i=1}^{s}\eta_iY_i\tag{6}$$

其中, $[H_0,Y_0]$ 为标称数据, $[H_i,Y_i]$ 为扰动方向, $\eta=[\eta_1,\cdots,\eta_s]^{\mathrm T}$ 为扰动噪声, 满足 $\|\eta\|_\infty\le\delta$.

在假设 1 和假设 2 下, 辨识问题可以转化为下述形式的优化问题:

$$\min\{\|H(\eta)\theta-Y(\eta)\|_2 | \|\eta\|_\infty\le\delta\}\tag{7}$$

其中, $\|\eta\|_2=\sqrt{\eta^{\mathrm T}\eta}$, $\|\eta\|_\infty=\max|\eta_i|$.

为了使未知参数的辨识结果, 对所有满足假设 1 和假设 2 中的可能取值, 都能实现残差的最小化, 如下处理上述优化问题:

$$\min_{\theta}\max_{\|\eta\|_\infty\le\delta}\|H(\eta)\theta-Y(\eta)\|_2\tag{8}$$

问题 (8) 的最优解称为原辨识问题的鲁棒最优解.

问题 (8) 表明, 鲁棒最优解就是在满足有界噪声的所有可能残差的最坏情况下, 即选取最大残差作为辨识的准则函数, 通过实现该准则函数的最小化, 获得具有鲁棒性的辨识结果. 这里的 “鲁棒解” 虽然不是全局最好的, 但对外界噪声有很强的抑制作用, 而且能够保证一定辨识精度的要求, 在抑制外界干扰和保证辨识精度间起到了良好的折衷作用. 与传统方法相比, 一方面, 弥补了扰动局限于概率分布的缺陷, 另一方面, 也较好地处理了辨识数据的不确定性, 更符合实际的需要.

2 鲁棒模型求解

问题 (8) 中 $[H(\eta),Y(\eta)]$ 与扰动噪声 η 有关, 可看作是 η 的函数, 因此该问题实际上是一个半无限优化问题[20]. 对于这类问题的求解, 鲁棒优化的核心思想是将原始问题 (8) 以一定的近似程度转化为一个多项式时间内可以解决的凸优化问题, 所以鲁棒优化的关键点就是, 如何将原问题转化为或逼近为多项式可解的问题, 这和不确定集合的选取也有很重要的关系[12]. 在辨识问题中表现为不确定数据 $[H(\eta),Y(\eta)]$ 关于 η 表示形式的选取问题, 如果选择不恰当, 则问题会很难或是不能求解, 为此本文假设 $H(\eta)$ 和 $Y(\eta)$ 分别具有式 (5) 和式 (6) 的形式.

为了实现不确定系统的辨识, 首先给出下述引理[21]:

引理 1 (S-过程). $F_0,\cdots,F_p$ 为 ζ 的二次函数,

$$F_i(\zeta)=\zeta^{\mathrm T}T_i\zeta+2d_i^{\mathrm T}\zeta+v_i, i=0,1,2,\cdots,p$$

且 $T_i=T_i^{\mathrm T}$, 如果 $F_i(\zeta)\ge 0, i=1,2,\cdots,p$, 则 $F_0(\zeta)\ge 0$ 成立的充分条件是, $\exists\tau_i\ge 0$, 使得

$$\left[\begin{array}{cc}T_0 & d_0\\ d_0^{\mathrm T} & v_0\end{array}\right]-\sum_{i=1}^{p}\tau_i\left[\begin{array}{cc}T_i & d_i\\ d_i^{\mathrm T} & v_i\end{array}\right]\ge 0$$

为了表述方便, 令

$$\begin{aligned}M(\theta)=&[H_1\theta-Y_1,\cdots,H_s\theta-Y_s]\\F=&M^{\mathrm{T}}(\theta)M(\theta)\\g=&M^{\mathrm{T}}(\theta)(H_0\theta-Y_0)\\l=&\|H_0\theta-Y_0\|_2^2\end{aligned}$$

定义

$$\varphi(H,Y,\delta,\theta)=\|H(\eta)\theta-Y(\eta)\|_2^2$$

定理 1. 对于不确定数据 $[H(\eta),Y(\eta)]$, 问题 (8) 可等价转化为下述优化问题:

$$\min_{\theta}\max_{\eta^{\mathrm{T}}Q_j\eta\le\delta^2}\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}l&g^{\mathrm{T}}\\g&F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}\tag{9}$$

证明. 定义范数

$$\|\eta\|_{Q_j}=\sqrt{\eta^{\mathrm{T}}Q_j\eta},\qquad j=1,\cdots,s$$

其中, $Q_j\ge0$, $\sum_{j=1}^{s}Q_j>0$, 取 Q_j 选为第 j 行第 j 列元素为 1, 其他元素为 0 的适当维数的矩阵, 有

$$\|\eta\|_{Q_j}=|\eta_j|,j=1,2,\cdots,s$$

而 $\|\eta\|_\infty\le\delta$ 可用下式等价表示:

$$|\eta_j|\le\delta,j=1,2,\cdots,s$$

因此, 可以用

$$\|\eta\|_{Q_j}\le\delta,j=1,2,\cdots,s$$

实现对 $\|\eta\|_\infty\le\delta$ 的等价转化.

同时, 由于残差和残差平方的最优化问题等价, 因此, 问题 (8) 可以等价转化为下述问题:

$$\min_{\theta}\max_{\eta^{\mathrm{T}}Q_j\eta\le\delta^2}\varphi(H,Y,\delta,\theta)$$

根据 $H(\eta)$, $Y(\eta)$ 的定义, 可得

$$H(\eta)\theta-Y(\eta)=(H_0\theta-Y_0)+\sum_{i=1}^{s}\eta_i(H_i\theta-Y_i)\tag{10}$$

由 $\varphi(H,Y,\delta,\theta)$ 的定义, 有

$$\varphi(H,Y,\delta,\theta)=(H(\eta)\theta-Y(\eta))^{\mathrm{T}}(H(\eta)\theta-Y(\eta))\tag{11}$$

将式 (10) 代入式 (11), 可得

$$\begin{aligned}\varphi(H,Y,\delta,\theta)=&l+g^{\mathrm{T}}\eta+\eta^{\mathrm{T}}g+\eta^{\mathrm{T}}F\eta=\\&\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}l&g^{\mathrm{T}}\\g&F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}\end{aligned}$$

□

对于问题 (8), 选取满足不确定假设的最坏残差作为辨识的准则函数, 首先必须确保该最坏残差的存在性. 依据定理 1, 将问题 (8) 等价转化为问题 (9), 此时残差的平方 $\varphi(H,Y,\delta,\theta)$ 是不确定数据 η 的一个二次型函数, 依据假设 2, η 属于一个连续有界的集合, 那么对于定义在连续有界区间上的二次型函数而言, 其最值的存在性是显然的. 这为下述定理的成立提供了依据.

定理 2. 有界噪声作用下, 参数鲁棒辨识问题可通过下述确定的半定规划问题 (Semi-definite programming, SDP) 来求解:

$$\begin{aligned}&\min\lambda\\&\text{s.t.}\begin{bmatrix}\lambda-\sum\limits_{j=1}^{s}\tau_j\delta^2&0&(H_0\theta-Y_0)^{\mathrm{T}}\\0&\sum\limits_{j=1}^{s}\tau_jQ_j&M^{\mathrm{T}}(\theta)\\H_0\theta-Y_0&M(\theta)&I\end{bmatrix}\ge0,\\&\qquad\tau_j\ge0,j=1,2,\cdots,s\end{aligned}\tag{12}$$

其中, I 为适当维数的单位矩阵.

证明. 依据本文假设, 残差平方的最大值是存在的. 这时, 引入辅助变量 λ, 问题 (8) 可写成如下形式:

$$\begin{aligned}&\min\lambda\\&\text{s.t.}\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}l&g^{\mathrm{T}}\\g&F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}\le\lambda,\\&\qquad\forall\eta:\eta^{\mathrm{T}}Q_j\eta\le\delta^2,j=1,2,\cdots,s\end{aligned}\tag{13}$$

问题 (13) 的约束条件

$$\eta^{\mathrm{T}}Q_j\eta\le\delta^2$$

可表示为

$$\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\delta^2&0\\0&-Q_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}\ge0\tag{14}$$

约束条件

$$\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}l&g^{\mathrm{T}}\\g&F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}\le\lambda$$

可以表示为

$$\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\lambda-l&-g^{\mathrm{T}}\\-g&-F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\eta\end{bmatrix}\ge0\tag{15}$$

利用引理 1, 对任意的满足式 (14) 的 η, 式 (15) 成立的充分条件是 $\exists\,\tau_j\ge0$, 使

$$\begin{bmatrix}\lambda-l&-g^{\mathrm{T}}\\-g&-F\end{bmatrix}-\sum_{j=1}^{s}\tau_j\begin{bmatrix}\delta^2&0\\0&-Q_j\end{bmatrix}\ge0\tag{16}$$

即

$$\begin{bmatrix}\lambda-l-\sum\limits_{j=1}^{s}\tau_j\delta^2&-g^{\mathrm{T}}\\-g&-F+\sum\limits_{j=1}^{s}\tau_jQ_j\end{bmatrix}\ge0$$

上式可写为如下形式

$$\begin{bmatrix}\lambda-\sum\limits_{j=1}^{s}\tau_j\delta^2&0\\0&\sum\limits_{j=1}^{s}\tau_jQ_j\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l&g^{\mathrm{T}}\\g&F\end{bmatrix}\ge0\tag{17}$$

将 $M(\theta)$、F、g、l 代入式 (17), 有

$$\begin{bmatrix} \lambda-\sum\limits_{j=1}^{s}\tau_j\delta^2 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{j=1}^{L}\tau_j Q_j \end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix} \|H_0\theta-Y_0\|_2^2 & [M(\theta)^{\rm T}(H_0\theta-Y_0)]^{\rm T} \\ M(\theta)^{\rm T}(H_0\theta-Y_0) & M(\theta)^{\rm T}M(\theta) \end{bmatrix}\ge 0$$

即

$$\begin{bmatrix} \lambda-\sum\limits_{j=1}^{s}\tau_j\delta^2 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{j=1}^{s}\tau_j Q_j \end{bmatrix}-$$

$$[H_0\theta-Y_0, M(\theta)]^{\rm T}\, I\, [H_0\theta-Y_0, M(\theta)]\ge 0 \tag{18}$$

对式 (18), 利用 Schur 补转化, 可得

$$\begin{bmatrix} \lambda-\sum\limits_{j=1}^{s}\tau_j\delta^2 & 0 & (H_0\theta-Y_0)^{\rm T} \\ 0 & \sum\limits_{j=1}^{s}\tau_j Q_j & M(\theta)^{\rm T} \\ H_0\theta-Y_0 & M(\theta) & I \end{bmatrix}\ge 0$$

□

定理 1 和定理 2 实现了原问题多项式时间内可以进行求解的鲁棒对等式的一个近似. 通过对转化后确定的半定规划问题 (12) 的计算机求解, 即可实现对本文研究的不确定条件下系统的参数辨识.

3　仿真分析

本文算法首先确定不确定数据所属的有界集合, 将原不确定环境下的辨识问题转化为鲁棒优化问题, 然后根据定理 1 和定理 2, 将鲁棒优化问题近似为确定的、易于求解的半定规划问题, 最后利用凸优化理论, 结合 Matlab 计算求解, 实现对未知参数的估计.

下面通过实例仿真, 来说明本文算法的有效性.

考虑如下单输入单输出离散线性系统:

$$\begin{aligned} y(k)=&a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\\ &b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+w(k)\end{aligned}$$

其中, $u(k)$ 为系统输入, $y(k)$ 为系统输出, 参数向量为 $\theta=[a_1,a_2,b_1,b_2]^{\rm T}$, 真值为 $[1.5,-0.7,1.0,0.5]^{\rm T}$, 当 $k\le 0$ 时, $u(k)=0$, $y(k)=0$, 采样的数据长度 $L=150$, 即进行 150 次数据测量.

假定系统噪声 w 为有界噪声, 即满足 $\|w\|_\infty\le\rho$, 这里 ρ 是已知给定的. 此时的辨识问题可通过下述不确定问题进行求解:

$$\min_{\theta}\max_{\|w\|_\infty\le\rho}\|H(w)\theta-Y(w)\|_2 \tag{19}$$

其中, 不确定数据 $[H(w),Y(w)]$ 的标称数据为 $[H_0,Y_0]$, Y_i 为第 i 个分量为 1, 其他为 0 的单位向量; $H_i(i\le L-1)$ 为前 n 列, 第 j 列第 $i+j$ 行元素为 1, 其他均为 0 的矩阵, H_L 为零矩阵. 对扰动噪声无穷泛数有界的情况, Q_j 选取第 j 行第 j 列元素为 1, 其他元素为 0 的矩阵. 通过对问题 (19) 的近似转化, 计算求解, 获得下述辨识结果.

表 1 和表 2 分别给出了 $\rho=1$ 和 $\rho=2$ 时, 两种方法辨识结果与真值的比较. 图 1～4 和图 5~8 分别为 $\rho=1$ 和 $\rho=2$ 时, 传统最小二乘方法 (LS) 和本文的鲁棒最小二乘 (RLS) 辨识结果的阶跃响应和相对误差. 由图 1 和图 3 可以看出, 新方法在处理含有界不确定数据的系统辨识问题时的优势. 图 2 和图 4 从相对误差的角度进行分析, 在扰动水平 ρ 相同时, 本文方法的相对误差低于传统方法的相对误差, 这也说明新方法能更好地反映真实系统. 图 3～4 和图 7～8 表明, 随着扰动水平 ρ 的增加, 辨识的精度相应降低, 直观地反映了鲁棒优化方法的一个重要特点, 即优化解是最优性和鲁棒性两者之间的折衷解.

表 1　当 $\rho=1$, 最小二乘法 (LS) 和鲁棒最小二乘法 (RLS) 的比较

Table 1　The comparison between least square method (LS) and robust least square method (RLS) when $\rho=1$

参数	a_1	a_2	b_1	b_2
真值	1.500 000	−0.700 000	1.000 000	0.500 000
LS	1.452 138	−0.631 716	0.959 609	0.531 301
RLS	1.499 922	−0.699 297	0.990 947	0.501 017

表 2　当 $\rho=2$, 最小二乘法 (LS) 和鲁棒最小二乘法 (RLS) 的比较

Table 2　The comparison between least square method (LS) and robust least square method (RLS) when $\rho=2$

参数	a_1	a_2	b_1	b_2
真值	1.500 000	−0.700 000	1.000 000	0.500 000
LS	1.444 546	−0.652 205	0.933 967	0.486 859
RLS	1.486 583	−0.690 202	0.966 064	0.512 560

4　结论

本文研究了系统噪声属于一个有界集时且数据具有结构不确定性的单输入和单输出离散线性系统的辨识问题, 提出了一种以鲁棒优化理论为基础的新方法. 通过实例仿真, 表

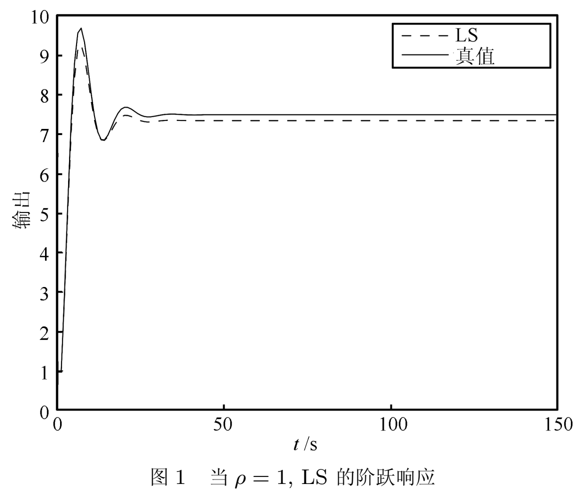

图 1　当 $\rho=1$, LS 的阶跃响应

Fig. 1　The step response for LS when $\rho=1$

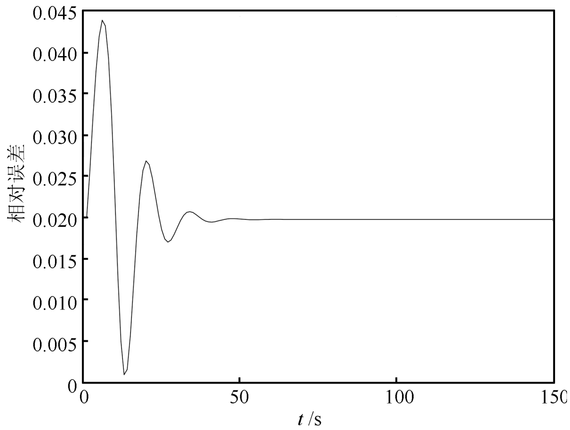

图 2　当 $\rho = 1$, LS 的相对误差

Fig. 2　The relative error for LS when $\rho = 1$

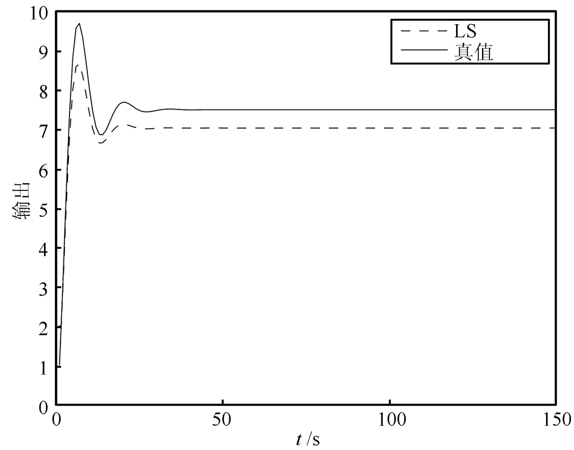

图 5　当 $\rho = 2$, LS 的阶跃响应

Fig. 5　The step response for LS when $\rho = 2$

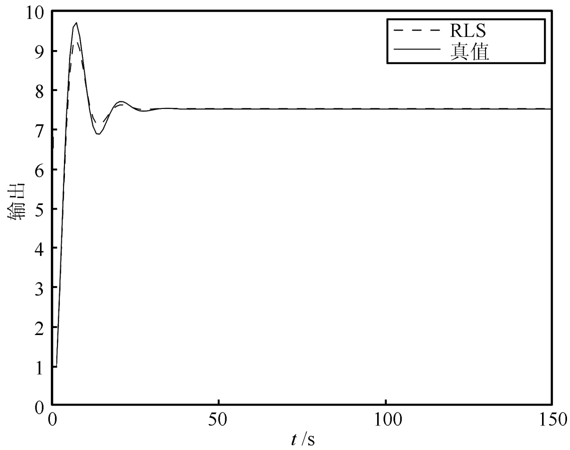

图 3　当 $\rho = 1$, RLS 的阶跃响应

Fig. 3　The step response for RLS when $\rho = 1$

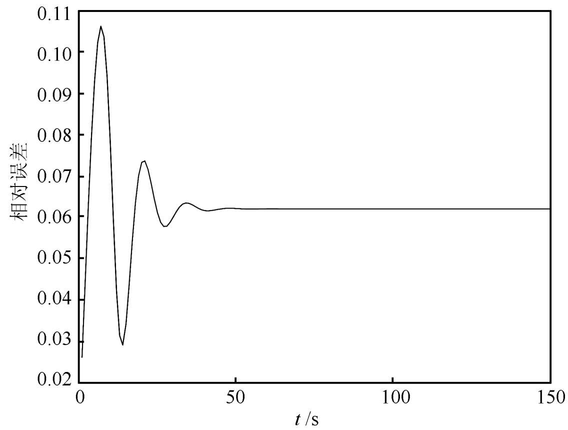

图 6　当 $\rho = 2$, LS 的相对误差

Fig. 6　The relative error for LS when $\rho = 2$

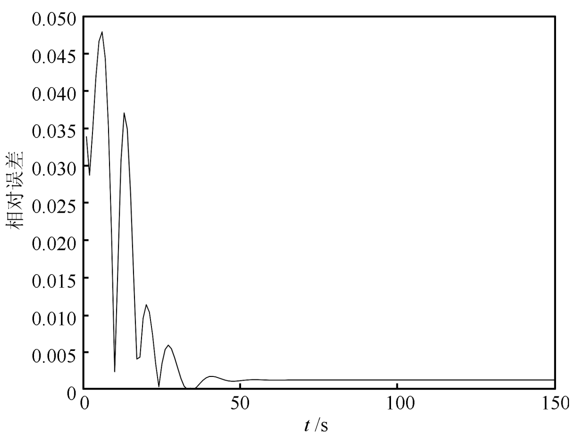

图 4　当 $\rho = 1$, RLS 的相对误差

Fig. 4　The relative error for RLS when $\rho = 1$

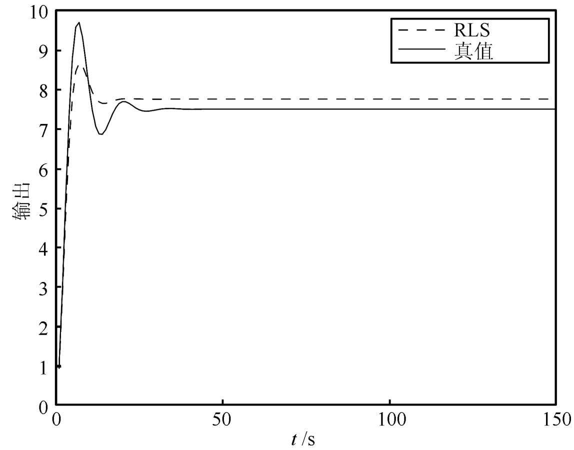

图 7　当 $\rho = 2$, RLS 的阶跃响应

Fig. 7　The step response for RLS when $\rho = 2$

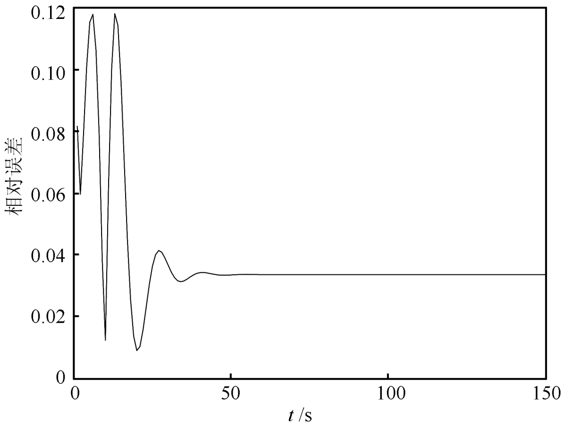

图 8　当 $\rho=2$, RLS 的相对误差

Fig. 8　The relative error for RLS when $\rho=2$

明了本文方法的可行性和有效性. 本文从优化的角度进行分析, 将辨识问题转化为一类不确定优化问题, 通过选取合适的不确定数据的表示形式, 近似出易于计算凸优化问题, 最终实现对原问题的求解, 为不确定系统的辨识提供了一种新思路. 然而, 本文提出的估计算法虽然在处理不确定性方面表现出了较强的鲁棒性, 但一个新的问题是该算法具有一定的保守性, 因为实际问题中的不确定性未必每个时刻都处在 "最坏" 情况. 减少保守性是我们未来进一步需要研究和解决的问题.

References

1 Fang Chong-Zhi, Xiao De-Yun. *Process Identification*. Beijing: Tsinghua University Press, 1998
(方崇智, 萧德云. 过程辨识. 北京: 清华大学出版社, 1988)

2 Ljung L. *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987

3 Chen H F. Recursive identification for Wiener model with discontinuous piece-wise linear function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 390−400

4 Burnham K P, Anderson D R. Multimodel inference: understanding AIC and BIC in model selection. *Sociological Methods and Research*, 2004, **33**(2): 261−304

5 Soderstrom T. Accuracy analysis of the Frisch scheme for identifying errors-in-variables systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(6): 985−997

6 Kar S, Sinopli B, Moura J M F. Kalman filtering with intermittent observations: weak convergence to a stationary distribution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(2): 405−420

7 Ge Quan-Bo, Li Wen-Bin, Sun Ruo-Yu, Xu Zi. Centralized fusion algorithms based on EKF for multisenor non-linear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(6): 816−825
(葛全波, 李文斌, 孙若愚, 徐姿. 基于 EKF 的集中式融合估计研究. 自动化学报, 2013, **39**(6): 816−825)

8 Li D, Qian F C, Fu P L. Variance minimization approach for a class of dual control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(12): 2010−2020

9 Li D, Qian F C, Fu P L. Optimal nominal dual control for discrete-time LQG problem with unknown parameters. *Automatica*, 2008, **44**(1): 119−127

10 Li D, Qian F C, Gao J J. Performance-first control for discrete-time LQG problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(9): 2225−2230

11 Qian F C, Gao J J, Li D. Complete statistical characterization of discrete-time LQG and cumulant control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(8): 2110−2115

12 Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust optimization: methodology and applications. *Mathematical Programming*, 2002, **92**(3): 453−480

13 Lin Xiao-Zhong, Xie Lei, Su Hong-Ye. Economic performance for predict control system under model uncertainty. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(8): 1−5
(林晓钟, 谢磊, 苏宏业. 模型不确定条件下预测控制经济性能评估的研究. 自动化学报, 2012, **38**(8): 1−5)

14 Bertsimas D, Litvinov E, Sun X A, Zhao J Y, Zheng T X. Adaptive robust optimizaition for the security constrained unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2013, **28**(1): 52−63

15 Soyster A L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operational Research*, 1973, **21**: 1154−1157

16 Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 1998, **23**(4): 769−805

17 Bandi C, Bertsimas D. Tracable stochastic analysis in high dimensions via robust optimization. *Mathematical Programming*, 2012, **134**(1): 23−70

18 Wang Le-Yi, Zhao Wen-Xiao. System identification: new paradigms, challenges, and opportunities. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 933−942
(王乐一, 赵文虓. 系统辨识: 新的模式、挑战及机遇. 自动化学报, 2013, **39**(7): 933−942)

19 Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming*, 2000, **88**(3): 411−424

20 Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 1999, **25**: 1−13

21 El-Ghaoui L, Lebret H. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1997, **18**: 1035−1064

钱富才　西安理工大学自动化与信息工程学院教授. 主要研究方向为随机控制, 系统辨识, 非线性控制, 最优控制, 故障诊断和全球定位系统. 本文通信作者. E-mail: fcqian@xaut.edu.cn
(**QIAN Fu-Cai**　Professor at School of Automation and Information Engineering, Xi′an University of Technology. His research interest covers stochastic control, system identification, nonlinear control, optimal control, fault diagnosis and global positioning system. Corresponding author of this paper.)

黄姣茹　西安理工大学自动化与信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为鲁棒优化, 系统辨识和最优控制. E-mail: huangjiaoru@126.com
(**HUANG Jiao-Ru**　Ph. D. candidate at School of Automation and Information Engineering, Xi′an University of Technology. Her research interest covers robust optimization, system identification and optimal control.)

秦新强　西安理工大学理学院教授. 主要研究方向为计算机图形学与辅助几何设计, 微分方程数值解及其应用. E-mail: xqqin@xaut.edu.cn
(**QIN Xin-Qiang**　Professor at School of Science, Xi′an University of Technology. His research interest covers computer graphics and computer aided geometric design, numerical solution and application of differential equation.)