广义 Mamdani 模糊系统依 K-积分模的泛逼近及其实现过程

王贵君 [1]　李晓萍 [1]　隋晓琳 [1]

摘　要　首先, 通过引入拟减法算子给出 K-积分模定义, 并针对广义 Mamdani 模糊系统实施等距剖分其输入空间. 其次, 应用分片线性函数 (Piecewise linear function, PLF) 的性质构造性地证明了广义 Mamdani 模糊系统在 K-积分模意义下具有泛逼近性, 从而将该模糊系统对连续函数空间的逼近能力扩展到一类可积函数类空间上. 最后, 通过模拟实例给出该广义 Mamdani 模糊系统对给定可积函数的泛逼近及实现过程.

关键词　拟减法, K-积分模, 分片线性函数, 广义 Mamdani 模糊系统, 泛逼近性

引用格式　王贵君, 李晓萍, 隋晓琳. 广义 Mamdani 模糊系统依 K-积分模的泛逼近及其实现过程. 自动化学报, 2014, **40**(1): 143−148

DOI　10.3724/SP.J.1004.2014.00143

Universal Approximation and Its Realization of Generalized Mamdani Fuzzy System Based on K-integral Norms

WANG Gui-Jun[1]　LI Xiao-Ping[1]　SUI Xiao-Lin[1]

Abstract　Firstly, the definition of a K-integral norm is given by introducing the quasi-subtraction operator, and the input space of a generalized Mamdani fuzzy system is divided by equidistant partition. Secondly, applying some properties of a piecewise linear function (PLF), universal approximation of a generalized Mamdani fuzzy system is proved structurally in the sense of a K-integral norms. Furthermore, the capability of the fuzzy systems to approximate the space of continuous functions is extended into that to a kind of space of integrable functions class. Finally, the universal approximation and its realization of generalized Mamdani fuzzy system to a given integrable function are showed by means of a simulation example.

Key words　Quasi-subtraction, K-integral norm, piecewise linear function (PLF), Mamdani fuzzy systems, universal approximation

Citation　Wang Gui-Jun, Li Xiao-Ping, Sui Xiao-Lin. Universal approximation and its realization of generalized Mamdani fuzzy system based on K-integral norms. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(1): 143−148

一般连续系统已初步形成系统的理论体系, 其相关成果在通信工程、自动控制理论及空间技术等领域中已有成功应用. 但除了连续系统之外, 实际中还有许多非连续系统存在, 例如可积系统、随机系统等. 因此, 如何在非连续或随机环境下研究模糊系统的逼近性具有重要理论意义和应用价值. 模糊系统是模拟人脑推理性能的一类有效模型, 其泛逼近性是人脑对于客观世界认识能力在这类模型上的体现, 而 Mamdani 系统和 T-S 系统是最常用的两类模糊系统模型. 2000 年, 我国已故青年学者刘普寅等[1] 通过剖分模糊系统的输入空间引入分片线性函数 (Piecewise linear function, PLF), 证明了上述两类系统在 Lebesgue 积分模意义下关于可积函数构成泛逼近器, 从而将模糊系统的近似表示对象由连续函数类扩展到了可积函数类上. 2001 年, 文献 [2−3] 分别针对 Mamdani 和 T-S 模糊系统研究了其逼近性能, 获得了构成逼近器的充分条件. 此后, 文献 [4−7] 重点针对 Mamdani 模糊系统的优化表示及其逼近性进行了系统的研究. 2010 年, 李洪兴等通过引入范数对两类模糊系统进行分类, 并采用参数单点模糊化法获得了该系统的逼近性能[8−9]. 此外, 2011 年, 文献 [10] 首次通过引入 K-积分模研究了一类折线模糊神经网络的泛逼近性问题, 其相关研究工作可见于文献 [11−12]; 2012 年, 文献 [13] 采用分层的方法探讨了广义混合模糊系统的逼近问题. 这些有益工作均是从不同侧面对上述两类模糊系统展开逼近性研究, 但其结果却仍有不尽人意之处.

本文将通过引入拟减法算子 $\ominus$ 重新给出 K-积分模定义, 并以分片线性函数为桥梁研究了广义 Mamdani 模糊系统对一类可积函数的泛逼近性及实现. 该方法很容易找到剖分数和前件模糊集, 进而获得该系统的输入输出解析表达式, 同时也为拓宽模糊系统的逼近性能提供有效方法.

1　K-积分模

1987 年, Sugeno 等[14] 首次引进拟加和拟乘运算, 建立了拟可加测度和积分理论框架. 2006 年, 文献 [15] 通过引入诱导算子, 针对模糊值函数建立了 K-拟可加模糊积分, 并借助积分转换定理研究了这种模糊积分的收敛定理和自连续性. 本节将通过引入拟减法和改进诱导算子来定义 K-积分模, 为进一步讨论广义 Mamdani 模糊系统的逼近性能及其应用奠定基础.

定义 1[10]**.** 设凹函数 $K:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 严格递增, 且在 $\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$ 上可导, 并满足 $K(0)=0, K(1)=1$, 则称 K 为 $\mathbf{R}^+$ 上诱导算子. 例如, 显然, $K(x)=\sqrt{x}$, $K(x)=\log_2(1+x)$ 均为诱导算子.

定义 2[10, 16]**.** 设 K 是 $\mathbf{R}^+$ 上诱导算子, $\forall\, a,b\in\mathbf{R}^+$, 界定 a 与 b 的 K-拟加 $\oplus$, K-拟乘 $\otimes$ 和 K-拟减法 $\ominus$ 的运算如下: $a\oplus b=K^{-1}(K(a)+K(b))$; $a\otimes b=K^{-1}(K(a)K(b))$;

$$a\ominus b=\begin{cases}K^{-1}(K(a)-K(b)), & a\ge b\\ -K^{-1}(K(b)-K(a)), & a<b\end{cases}$$

这里拟减法 $\ominus$ 并不是拟加法 $\oplus$ 的逆运算, 且满足 $|a\ominus b|=K^{-1}(|K(a)-K(b)|)$, 然而, 也可等价地表示为

$$K(|a\ominus b|)=|K(a)-K(b)|$$

此外, 还可获得如下重要结论.

命题 1[10, 16]**.** 给定诱导算子 $K, \forall\, a,b,c\in\mathbf{R}^+$, 则有:

1) $a+b\le a\oplus b$, 或等价 $K(a+b)\le K(a)+K(b)$;

2) $K(a\oplus b)=K(a)+K(b)$, $K(a\otimes b)=K(a)\cdot K(b)$;

3) $K^{-1}(a+b)=K^{-1}(a)\oplus K^{-1}(b)$, $K^{-1}(a\cdot b)=K^{-1}(a)\otimes K^{-1}(b)$.

定义 3[15]**.** 设 $(X,\Re,\hat{\mu})$ 是 K-拟可加测度空间, K 为给定诱导算子, f 为非负可测函数, $A\in\Re$, $T=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为集 A 的任一有限可测划分, 令

收稿日期 2012-09-21　录用日期 2013-04-02
Manuscript received September 21, 2012; accepted April 2, 2013
国家自然科学基金 (61374009) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61374009)
本文责任编委 孙长银
Recommended by Associate Editor SUN Chang-Yin
1. 天津师范大学数学科学学院 天津 300387
1. School of Mathematics Sciences, Tianjin Normal University, Tianjin 300387

$$\int_A^{(K)} f \mathrm{d}\hat{\mu} = \sup_T S_K(f,T,A)$$

其中, $S_K(f,T,A) = \oplus\sum_{i=1}^n(\inf_{x\in A_i\cap A} f(x)\otimes\hat{\mu}(A_i\cap A))$, 则称 $\int_A^{(K)} f\mathrm{d}\hat{\mu}$ 为 f 在 A 上的 K-拟可加积分. 特别地, 当 $\int_A^{(K)} f\mathrm{d}\hat{\mu} < +\infty$ 时, 称函数 f 是 $\hat{\mu}$-可积的.

记 $L_+^1(\hat{\mu}) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+ \mid f$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上非负 $\hat{\mu}$-可积函数$\}$, 并称之为 $\hat{\mu}$-可积函数空间.

引理 1[15]**.** 设 $(X,\Re,\hat{\mu})$ 为 K-拟可加测度空间, K 是给定诱导算子, f 为非负可测函数, 令 $\mu(\cdot) = K(\hat{\mu}(\cdot)), A\in\Re$, 则 μ 是 Lebesgue 测度, 且 $\int_A^{(K)} f\mathrm{d}\hat{\mu} = K^{-1}(\int_A K\circ f\mathrm{d}\hat{\mu})$.

显然, K-拟可加积分是 Lebesgue 积分的推广, 并且可通过诱导算子转化为 Lebesgue 积分. 下面, 我们将给出本文一个重要概念: K-积分模定义.

定义 4. 设 $(X,\Re,\hat{\mu})$ 是 K-拟可加测度空间, $\forall f_1, f_2 \in L_+^1(\hat{\mu}), A\in\Re$, 界定 $\| f_1 - f_2 \| = \int_A^{(K)} \mid f_1(x)\ominus f_2(x) \mid \mathrm{d}\hat{\mu}$, 则称 $\|\cdot\|$ 为 $L_+^1(\hat{\mu})$ 在 A 上的 K-积分模.

注 1. 显然, 借助上述积分转换定理, 容易看出 K-积分模也可等价地表达为如下形式:

$$\begin{aligned}\| f_1 - f_2 \| = K^{-1}\left(\int_A K(\mid f_1(x)\ominus f_2(x)\mid)\mathrm{d}\mu\right) =\\ K^{-1}\left(\int_A \mid K(f_1(x)) - K(f_2(x))\mid \mathrm{d}\mu\right)\end{aligned} \tag{1}$$

并且 $\forall f_1, f_2, f_3 \in L_+^1(\hat{\mu})$, 不难验证

$$\| f_1 - f_3 \| \le \| f_1 - f_2 \| \oplus \| f_2 - f_3 \|$$

亦即 $(L_+^1(\hat{\mu}), \|\cdot\|)$ 关于拟加算子 $\oplus$ 构成度量空间, 详细证明参见文献 [10].

2 分片线性函数

作为研究广义模糊系统泛逼近性的基础工具, 本节首先引进方形分片线性函数 (Square pricewise linear function, SPLF) 的定义. 该类函数是一元分段线性函数在多元情况下的推广, 它在研究广义 Mamdani 和 T-S 模糊系统的逼近性能时起到至关重要的桥梁作用, 也是讨论模糊系统泛逼近性的最基本工具.

定义 5[1]**.** 设 n 元连续函数 $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, 若函数 S 满足如下条件 1) 和 2): 1) 存在 $a > 0$ 使 S 在闭正方体 $\triangle(a) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid -a \le x_i \le a, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 之外恒为零; 2) 存在 $N_s \in \mathbf{N}$ 及 n 维多面体 $\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_{N_s} \subset \triangle(a)$, 且 $\bigcup_{j=1}^{N_s}\triangle_j = \triangle(a), \triangle_i \bigcap \triangle_j = \emptyset\ (i \ne j)$, 并使 S 在每个 $\triangle_j$ 上是线性函数, 即 $S(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}x_i + \gamma_j, \forall X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \triangle_j, j = 1, 2, \cdots, N_s$, 其中 λ_{ij}, γ_j 均为常数, 则称 S 为 $\triangle(a)$ 上一个分片线性函数, 简称 SPLF.

记 $H(D)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上所有分片线性函数构成的集合, $V(\triangle_j)$ 是 $\triangle_j$ 的顶点集, $V(S)$ 表示所有多面体 $\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_{N_s}$ 的顶点全体构成的集合. 事实上, $\forall S \in H(D)$, 因分片线性函数 S 仅满足连续性, 然而无法保证其若干偏导数 $\frac{\partial S}{\partial x_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 存在, 但依定义 5 可证明 S 的所有单侧 (左或右) 偏导数 $\frac{\partial S_-}{\partial x_i}$ 或 $\frac{\partial S_+}{\partial x_i}$ 均存在. 故对一切 $i = 1, 2, \cdots, n$ 引入记号 $D_i(S)$ 为

$$\begin{aligned}D_i(S) = \bigvee_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V(S)}\left(\left|\frac{\partial S_+(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\right| \vee\right.\\ \left.\left|\frac{\partial S_-(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\right|\right)\end{aligned} \tag{2}$$

引理 2[1]**.** 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 上一个 SPLF, 给定一组常数 $h_1, h_2, \cdots, h_n \in \mathbf{R}$, 则 $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, 必有:

$$\begin{aligned}\mid S(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \cdots, x_n + h_n) - S(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \le\\ \sum_{i=1}^n D_i(S) \mid h_i \mid\end{aligned}$$

引理 3[2]**.** 设 $\hat{\mu}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 K-拟可加测度, $\forall f \in L_+^1(\hat{\mu})$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 必分别存在 $a > 0$ 和分片线性函数 $S \in H(D)$ 使得 $\| f - S \| < \varepsilon$, 即可积函数 f 可由分片线性函数 S 逼近.

推论 1[2]**.** 设 $\hat{\mu}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 K-拟可加测度, $\forall f \in L_+^1(\hat{\mu})$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $a > 0$ 及分片线性函数 $S \in H(D)$ 使 $\| f - S \| < \varepsilon$. 此时, 对充分小的 $h > 0$, 及 $i = 1, 2, \cdots, n$, 若记

$$\begin{aligned}D_i(f) = \bigvee_{(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\in V(S)}\left|\frac{f(x_1,\cdots,x_i+h,\cdots,x_n)}{h} - \right.\\ \left.\frac{f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)}{h}\right|\end{aligned}$$

则必有 $D_i(S) = D_i(f), i = 1, 2, \cdots, n$.

注 2. 从推论 1 不难看出, 若 S 是由引理 3 所获得的分片线性函数, 则可通过可积函数 f 来计算式 (2) 中偏导数的上确界 $D_i(S)$, 亦即, $D_i(S) = D_i(f)$, 进而可获得和式 $\sum_{i=1}^n D_i(S)$.

定义 6[1−2]**.** 设系统输入论域 $X_i = [-a, a], i = 1, 2, \cdots, n; a > 0$. 对给定 $m \in \mathbf{N}$, 在每个论域 X_i 上做等距剖分: $-a < a_{i(-m)} < a_{i(-m)+1} < \cdots < a_{i(-1)} < 0 < a_{i1} < \cdots < a_{i(m-1)} < a_{im} = a$, 其分点为 $a_{ij} = j/m, i = 1, 2, \cdots, n : j = \pm1, \pm2, \cdots, \pm m$. 若在第 i 个论域 X_i 上以每个分点 a_{ij} 为峰点 (隶属函数为 1 的点) 构造一组模糊数 $\{\widetilde{B}_{ij}\} \subset F(\mathbf{R})$, 则称模糊数组为论域上一个等距模糊剖分.

为后文表述方便, 令

$$\begin{aligned}G(m) = \{(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbf{Z}^n \mid\\ -m \le p_i \le m, i = 1, 2, \cdots, n\}\end{aligned}$$

若对每个等距模糊剖分 $\widetilde{B}_{ij}$ 及 $\forall X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [-a, a]^n, \forall (p_1, p_2, \cdots, p_n) \in G(m)$, 记

$$\begin{aligned}G(m, X) =\\ \{(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in G(m) \mid N_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(X) > 0\}\end{aligned}$$

其中, $N_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(X) = \widetilde{B}_{1p_1}(x_1)\widetilde{B}_{2p_2}(x_2) \times \cdots \times \widetilde{B}_{np_n}(x_n)$, 此约定是为保证后边广义 Mamdani 模糊系统 (3) 的连续性 (分母大于零).

3 泛逼近性

在 K-积分模意义下, 对任意给定精度 $\varepsilon > 0$, 如何实现广义 Mamdani 模糊系统的逼近过程是首要考虑问题之一. 本节我们首先通过引理 3 和推论 1 来获得 SPLF 并进而借助该 SPLF 为桥梁来研究广义 Mamdani 模糊系统对于可积函数的逼近性能.

模糊系统控制的核心就是绕开建立精确数学模型而仿效人脑利用模糊信息进行模糊推理, 从数学观点上来看, 模糊系统就是输入和输出之间的映射关系, 也是一种插值器, 最常见的是 Mamdani 模糊系统和 T-S 模糊系统, 其中, Mamdani 模糊系统的模糊规则库是由 Mamdani 型模糊推

理规则所组成, 即给定输入变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和前件模糊集 $\widetilde{A}_{1p_1}, \widetilde{A}_{2p_2}, \cdots, \widetilde{A}_{np_n}$, 其对应 Mamdani 模糊规则表示为

$R_{p_1,p_2,\cdots,p_n}$: 若 x_1 是 $\widetilde{A}_{1p_1}$, x_2 是 $\widetilde{A}_{2p_2}, \cdots$, x_n 是 $\widetilde{A}_{np_n}$, 则 u 是 $\widetilde{U}_{L(p_1,p_2,\cdots,p_n)}$.

这里 u 是输出变量, 其取值区间范围 $U=[-b,b]$ $(b>0)$, $\widetilde{U}_{L(p_1,p_2,\cdots,p_n)}$ 表示后件 (输出) 模糊集.

事实上, 模糊系统是模仿人脑推理性能的一类有效数学模型. 现在利用广义重心去模糊化法给出如下输入输出 (I/O) 关系式 (3), 并称之为广义 Mamdani 模糊系统:

$$M_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\sum\limits_{p_1,p_2,\cdots p_n=-m}^{m}(N_{(p_1,p_2,\cdots p_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n))^{\alpha}S(\frac{ap_1}{m},\frac{ap_2}{m},\cdots,\frac{ap_n}{m})}{\sum\limits_{p_1,p_2,\cdots,p_n=-m}^{m}(N_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n))^{\alpha}} \tag{3}$$

其中, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 是系统的输入, n 为输入空间维数, 调节参数 $\alpha\in(0,+\infty)$, 其他符号表示同前.

注 3. 一般来说, 对模糊系统的等距剖分主要依据定义 6 中 m 值来确定, 其中 m 可由下述定理 1 来确定, 此时, 对给定 $\hat{\mu}$-可积函数 f 来说, 可将闭区间 $[-a,a]$ 等分成 $2m$ 个小区间. 类似地, 在每个坐标轴上都做相同划分, 即将立方体 $[-a,a]^n$ 等分成 $(2m)^n$ 个小立方体, 进而, 对每个小立方体继续实施有限剖分: $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_{N_S}$, 直至剖分后每个小多面体 Δ_j 的顶点在可积函数 f 作用下可构成超平面为止, 将这些超平面依次折合叠加起来即构成所求分片线性函数 S. 显然, 分片线性函数 $S(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是依赖空间曲面 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上的连续逐片截取, 此时, 分片线性函数 S 和可积函数 f 在剖分后的每个小正方体顶点 $(ap_1/m, ap_2/m,\cdots,ap_n/m)$ 处的函数值必重合. 因此, 必有:

$$S\left(\frac{ap_1}{m},\frac{ap_2}{m},\cdots,\frac{ap_n}{m}\right)=f\left(\frac{ap_1}{m},\frac{ap_2}{m},\cdots,\frac{ap_n}{m}\right)$$

定理 1. 设 μ 是 $\mathbf{R}^n$ 空间上的 Lebesgue 测度, $\forall\, S\in H(D)$, 则 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $m_0\in\mathbf{N}$, 使当 $\forall\, m>m_0$ 时, 必有:

$$\|\, M_m-S\,\|=K^{-1}(\int_{\mathbf{R}^n}K(|\, M_m\ominus S\,|)\mathrm{d}\mu)<\varepsilon$$

证明. 设分片线性函数 S 的支撑为 $[-a,a]^n$, 并且 $\triangle_1,\triangle_2,\cdots,\triangle_{N_s}$ 是对应于 S 的多面体, 当然满足 $\bigcup_{j=1}^{N_s}\triangle_j=[-a,a]^n, \triangle_i\bigcap\triangle_j=\emptyset$ $(i\neq j)$. 若取 $x_0=1$, 记:

$$S(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{n}s_{i1}x_i, & (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\triangle_1\\ \sum\limits_{i=0}^{n}s_{i2}x_i, & (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\triangle_2\\ \quad\vdots & \qquad\vdots\\ \sum\limits_{i=0}^{n}s_{iN_i}x_i, & (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\triangle_{N_s}\end{cases}$$

其中, 每个常数 s_{ij} $(i=0,1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,N_s)$ 可以表示为小数形式 (否则 s_{ij} 可用小数来逼近). 再记:

$$s_0=\min\{s\in\mathbf{N}\mid 10^s s_{ij}\in\mathbf{Z}, i=0,1,\cdots,n; j=1,2,\cdots,N_s\}$$

令 $m_{ij}=10^{s_0}s_{ij}$, $i=0,1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,N_s$, 则必有 $m_{ij}\in\mathbf{Z}$. 另外, 对任意 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in G(m)$, 并且当 $(ap_1/m, ap_2/m,\cdots,ap_n/m)\in\triangle_j$ 时, 易验证:

$$S\left(\frac{ap_1}{m},\frac{ap_2}{m},\cdots,\frac{ap_n}{m}\right)=10^{-s_0}\sum_{i=0}^{n}\frac{m_{ij}ap_i}{m}$$

由文献 [1], $\forall$ $(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in G(m), \forall\, X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[-a,a]^n$, 令

$$\frac{ap_i}{m}=\frac{\theta_{p_i}}{m}+x_i,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

再由文献 [2], 必存在最大交互数 c_0, 且满足 $|\,\theta_{p_i}\,|\leq ac_0$, 进而, 应用引理 2, 更有:

$$\left|S\left(\frac{ap_1}{m},\frac{ap_2}{m},\cdots,\frac{ap_n}{m}\right)-S(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right|\leq ac_0\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i(S)}{m}$$

此外, 因诱导算子 K 是凹函数, 依据定义 1 和命题 1, 必有 $K(x+y)\leq K(x)+K(y)$, $\forall\, x,y\in\mathbf{R}^+$, 进而可推得:

$$|\, K(x)-K(y)\,|\leq K(|\, x-y\,|),\ \ \forall\, x,y\in\mathbf{R}^+ \tag{4}$$

下面, 为了方便起见, 不妨选取 $\alpha=1$, 将上述式 (3) 代入式 (4), 则立即获得:

$$\left|K\left(\frac{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_n=-m}^{m}N_{(p_1,\cdots,p_n)}(x_1,\cdots,x_n)S\left(\frac{ap_1}{m},\cdots,\frac{ap_n}{m}\right)}{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_n=-m}^{m}N_{(p_1,\cdots,p_n)}(x_1,\cdots,x_n)}\right)-K(S(x_1,x_2,\cdots,x_n))\right|\leq$$

$$K\left(\left|\frac{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_n=-m}^{m}N_{(p_1,\cdots,p_n)}(x_1,\cdots,x_n)S\left(\frac{ap_1}{m},\cdots,\frac{ap_n}{m}\right)}{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_n=-m}^{m}N_{(p_1,\cdots,p_n)}(x_1,\cdots,x_n)}-S(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right|\right)\leq$$

$$K\left(\frac{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_n\in G(m,X)}^{m}N_{(p_1,\cdots,p_n)}(x_1,\cdots,x_n)\left|S\left(\frac{ap_1}{m},\frac{ap_2}{m},\cdots,\frac{ap_n}{m}\right)-S(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right|}{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_n\in G(m,X)}^{m}N_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right)\leq K\left(ac_0\sum_{i=1}^{m}\frac{D_i(S)}{m}\right)$$

由定义 4 及上述不等式, 立即获得:

$$K(\| M_m - S \|) =$$
$$\int_{\mathbf{R}^n} K(| M_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \ominus S(x_1,x_2,\cdots,x_n) |)\mathrm{d}\mu =$$
$$\int_{[-a,a]^n} \left| K\left[\frac{\sum\limits_{p_1,p_2,\cdots,p_n=-m}^{m} N_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\sum\limits_{p_1,p_2,\cdots,p_n=-m}^{m}} \right.\right.$$
$$\left.\left. \frac{S(\frac{ap_1}{m},\frac{ap_2}{m},\cdots,\frac{ap_n}{m})}{N_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)} \right] - K\left(S(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right) \right| \mathrm{d}\mu \le$$
$$\int_{[-a,a]^n} K(ac_0 \sum_{i=1}^{n} \tfrac{D_i(S)}{m})\mathrm{d}\mu =$$
$$K(ac_0 \sum_{i=1}^{n} \tfrac{D_i(S)}{m})\mu([-a,a]^n)$$

因此, 必有

$$K(\| M_m - S \|) \le K(ac_0 \sum_{i=1}^{n} \tfrac{D_i(S)}{m})\mu([-a,a]^n) =$$
$$(2a)^n K(ac_0 \sum_{i=1}^{n} \tfrac{D_i(S)}{m})$$

此时, $\forall\, \varepsilon > 0$, 若使

$$\| M_m - S \| \le K^{-1}\left((2a)^n K\left(ac_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i(S)}{m}\right)\right) < \varepsilon$$

只需

$$(2a)^n K(ac_0 \sum_{i=1}^{n} \tfrac{D_i(S)}{m}) < K(\varepsilon) \Rightarrow$$
$$\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^{n} D_i(S) < K^{-1}\left(\frac{K(\varepsilon)}{(2a)^n}\right)$$

解之

$$m > \left[\frac{ac_0 \sum\limits_{i=1}^{n} D_i(S)}{K^{-1}\left(\frac{K(\varepsilon)}{(2a)^n}\right)} \right] := m_0$$

于是, $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $m_0 \in \mathbf{N}$, 使当 $m > m_0$ 时, 必有 $\| M_m - S \| < \varepsilon$. □

定理 2. 设 $(\mathbf{R}^n, \Re, \hat{\mu})$ 是 K-拟可加测度空间, $\forall\, f \in L^1_+(\hat{\mu})$, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 m_0, 当 $m > m_0$ 时, 恒有 $\| M_m - f \| < \varepsilon$, 亦即, 在 K-积分模 $\| \cdot \|$ 意义下广义 Mamdani 模糊系统关于可积函数空间 $L^1_+(\hat{\mu})$ 具有泛逼近性.

证明. 由引理 3, 针对 $\hat{\mu}$-可积函数 $f \in L^1_+(\hat{\mu}), \forall\, \varepsilon > 0$, 存在常数 $a > 0$ 及某个分片线性函数 $S \in H(D)$ 使 $\| f - S \| < \varepsilon$.

现针对该分片线性函数 S, 由定理 1, 必存在 $m_0 \in \mathbf{N}$, 使得 $\forall\, m > m_0$ 时, 总有 $\| M_m - S \| < \varepsilon$, 其中, M_m 是由 m_0 决定的型如式 (3) 的广义 Mamdani 模糊系统.

从而, 依据注 1[10], 更有:

$$\| M_m - f \| \le \| M_m - S \| \oplus \| S - f \| <$$
$$\varepsilon \oplus \varepsilon = K^{-1}(2K(\varepsilon))$$

事实上, $\forall\, \varepsilon > 0$, 由诱导算子 K^{-1} 和 K 的严增性, 其表达式 $K^{-1}(2K(\varepsilon))$ 仍能任意小. 因此, 广义 Mamdani 模糊系统依 K-积分模 $\| \cdot \|$ 对可积函数空间 $L^1_+(\hat{\mu})$ 具有泛逼近性. □

定理 3. 设 $(\mathbf{R}^n, \Re, \hat{\mu})$ 是 K-拟可加测度空间, 式 (3) 表示广义 Mamdani 模糊系统的输入输出, $\forall\, f \in L^1_+(\hat{\mu})$, 且 f 存在偏导数. 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $a > 0$ 和 $h > 0$, 若记:

$$D_H(f) = \max_{1 \le i \le n}$$
$$\sup_{x_i+h \in [-a,a]} \left| \frac{f(x_1,\cdots,x_i+h,\cdots,x_n) - f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)}{h} \right|$$

必存在自然数

$$m_0 = \left[\frac{nac_0 D_H(f)}{K^{-1}\left(\frac{K(\varepsilon)}{(2a)^n}\right)^n} \right] \in \mathbf{N}$$

使当 $m > m_0$ 时, 恒有 $\| M_m - f \| \le \varepsilon$.

证明. 依据引理 3, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $a > 0$ 和分片线性函数 $S \in H(D)$ 使得 $\| f - S \| < \varepsilon$. 此时将正方体 $[-a,a]^n$ 等距分割成若干个小立方体, 进而再将每个小立方体分割成有限个 n 维多面体 $\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_{N_S}$, 此时, 我们可定义满足上式 $\| f - S \| < \varepsilon$ 的一个分片线性函数 S. 设该立方体边长 $h > 0$, 依据文献 [2] 和引理 2, 立刻获得:

$$D_H(f) = \max_{1 \le i \le n} D_i(S) \ge D_i(S)$$

更有 $\sum_{i=1}^{n} D_i(S) \le nD_H(f)$. 结合定理 1 及诱导算子 K 和 K^{-1} 的严格递增性, 若使

$$\| M_m - S \| \le K^{-1}\left((2a)^n K\left(\frac{ac_0 \sum\limits_{i=1}^{n} D_i(S)}{m}\right)\right) \le$$
$$K^{-1}\left((2a)^n K\left(\frac{nac_0 D_H(f)}{m}\right)\right) < \varepsilon$$

解得

$$m > \left[\frac{nac_0 D_H(f)}{K^{-1}\left(\frac{K(\varepsilon)}{(2a)^n}\right)} \right] := m_0$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $m_0 \in \mathbf{N}$, 当 $m > m_0$ 时, 有 $\| M_m - S \| < \varepsilon$. 此时, 再依据定理 2, 立即获知广义 Mamdani 模糊系统关于可积函数空间 $L^1_+(\hat{\mu})$ 仍具有泛逼近性. □

注 4. 事实上, 定理 1 并没有直接沟通可积函数和系统逼近关系, 只是起到一个桥梁作用, 它所刻画的剖分数 m_0 是依赖于分片线性函数 S, 而实际中 S 并不容易获得且不唯一. 定理 2 只是从理论上证明了系统对 $L^1_+(\hat{\mu})$ 具有逼近性. 而定理 3 通过引入 $D_H(f)$ 确定的 m_0 才使该系统与逼近函数 f 有了直接联系, 并获知在依拟减法 $\ominus$ 定义的新 K-积分模意义下, 广义 Mamdani 模糊系统关于可积函数空间 $L^1_+(\hat{\mu})$ 仍具有泛逼近性. 因此, 对给定诱导算子 K 来说, 应用定理 3 才容易确定该系统输入空间的剖分数 m_0, 进而可通过平移容易得到该系统的一个等距模糊剖分 (前件模糊集), 最后, 获取广义 Mamdani 模糊系统的输入输出解析表达式.

4 实现过程

设诱导算子 $K(x) = x^{\frac{6}{7}}$, 在系统输入论域中取 $a = 1$, 空间维数 $n = 2$, 最大交互数 $c_0 = 2$, 给定 $\hat{\mu}$-可积函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-|x|^3 - y^3}, & y \ge 0 \\ -\mathrm{e}^{-|x|^3 + y^3}, & y < 0 \end{cases}$$

容易验证 $f(x,y)$ 在 xoy 平面的 x 轴 $(y = 0)$ 上不连续, 但由引理 1 可验证 f 是 $\hat{\mu}$-可积的. 现在, 仅限定该可积函数 f 在

闭矩形域 $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\}$ 上讨论问题. 此时, 由推论 1 和注 2 知, 以下需要计算关于 f 偏导数的上确界 $D_i(f)$ 的取值.

为计算 $f(x,y)$ 在 D 上的偏导数, 首先需要求出 $f(x,y)$ 在 x 轴上任意点 $(x,0)$ 的偏导数取值. 例如

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=$$

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{-|x|^3}\displaystyle\lim_{y\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{-y^3}-1}{y}, & y\ge 0\\ -\mathrm{e}^{-|x|^3}\displaystyle\lim_{y\to 0-}\frac{\mathrm{e}^{y^3}-1}{y}, & y<0\end{cases}$$

类似方法, 所求 f 的一阶偏导数分别为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}-3x^2\mathrm{e}^{-|x|^3-y^3}\mathrm{sgn}(x), & y\ge 0\\ 3x^2\mathrm{e}^{-|x|^3+y^3}\mathrm{sgn}(x), & y<0\end{cases}$$

和

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}-3y^2\mathrm{e}^{-|x|^3-|y|^3}, & y\ne 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

此外, 利用求多元函数极值法 (计算偏导数, 并令其偏导数为零, 求解驻点等), 容易获得:

$$D_1(f)=\bigvee_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\pm\sqrt[3]{\frac{2}{3}},\ 0)}=$$

$$\left|-3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}\right|\approx 1.158$$

$$D_2(f)=\bigvee_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\ 0,\ \pm\sqrt[3]{\frac{2}{3}})}\approx 1.158$$

故可获得 $D_H(f)=D_1(f)\vee D_2(f)=1.158$.

此时, 若取误差 $\varepsilon=0.25>0$, 依据诱导函数 $K(x)=x^{\frac{6}{7}}$, 解得 $K^{-1}(x)=x^{\frac{7}{6}}$, 按照定理 1 可计算出

$$m>\frac{nac_0D_H(f)}{K^{-1}\left(\frac{K(\varepsilon)}{(2a)^n}\right)}=\frac{2\times 1\times 2\times 1.158}{\left(\frac{0.25^{6/7}}{(2\times 1)^2}\right)^{7/6}}=\frac{4.632}{0.25}\times 4\sqrt[3]{2}\approx 92.64$$

不妨取 $m=93$, 当然满足 $\parallel M_m-f\parallel<\varepsilon$. 此时, 我们可依据 m 的值定义三角模糊数 $\widetilde{B}$ 为

$$\widetilde{B}(x)=\begin{cases}93\left(\dfrac{1}{93}-x\right), & 0\le x\le\dfrac{1}{93}\\ 93\left(\dfrac{1}{93}+x\right), & -\dfrac{1}{93}\le x<0\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

进而, $i=1$ 时, 在 xoy 平面上通过平移 $\widetilde{B}$ 来重新定义模糊数组 $\{\widetilde{B}_{ij}\}$, 亦即, 令

$$\widetilde{B}_{1j}(x)=\widetilde{B}\left(x-\frac{j}{93}\right),\qquad j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm 93$$

从而获得一个等距模糊剖分 $\{\widetilde{B}_{1j}\}$, 其中, 该剖分的左右两端的模糊数分别为

$$\widetilde{B}_{1(-93)}(x)=\begin{cases}-93\left(x+\dfrac{92}{93}\right), & -1\le x\le -\dfrac{92}{93}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

$$\widetilde{B}_{1(93)}(x)=\begin{cases}93\left(x-\dfrac{92}{93}\right), & \dfrac{92}{93}\le x\le 1\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

再令 $\widetilde{B}_{1j}=\widetilde{B}_{2j},\ j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm 93$, 依据注 3, 显然有 $S\left(\frac{p_1}{93},\frac{p_2}{93}\right)=f\left(\frac{p_1}{93},\frac{p_2}{93}\right)$ 和式 (3), 对任意实参数 $\alpha\in\mathbf{R}^+$, 立即获得广义 Mamdani 模糊系统的输入输出 (I/O) 解析表达式为

$$M_m(x,y)=\frac{\sum\limits_{p_1,p_2=-93}^{93}(\widetilde{B}_{1p_1}(x)\widetilde{B}_{2p_2}(y))^{\alpha}f\left(\dfrac{p_1}{93},\dfrac{p_2}{93}\right)}{\sum\limits_{p_1,p_2=-93}^{93}(\widetilde{B}_{1p_1}(x)\widetilde{B}_{2p_2}(y))^{\alpha}}\tag{5}$$

应用 Matlab 软件, 在区域 D 内可得 $f(x,y)$ 的曲面图如图 1, 且容易看出 $f(x,y)$ 在平面 $y=0$ 处是断开的 (非连续). 再依据式 (5), 可获得该二维广义 Mamdani 模糊系统 $M_m(x,y)$ 的仿真图形如图 3 和 4.

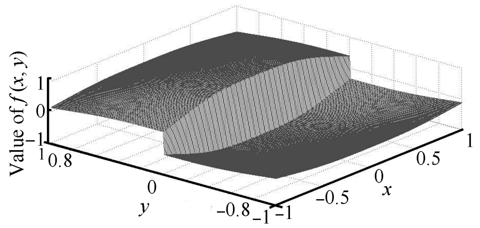

图 1　f 的原曲面图

Fig. 1　Original surface figure of f

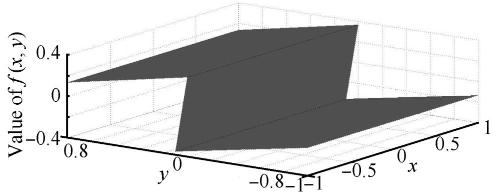

图 2　f 的一个分片线性函数 S 的图

Fig. 2　Figure of a piecewise linear functions S of f

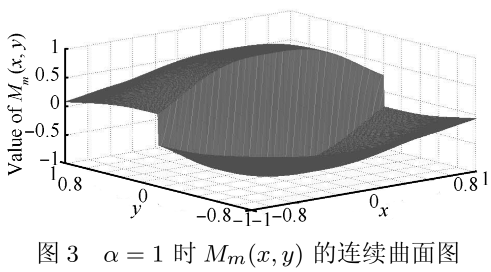

图 3　$\alpha=1$ 时 $M_m(x,y)$ 的连续曲面图

Fig. 3　Continuous surface figure of $M_m(x,y)$ when $\alpha=1$

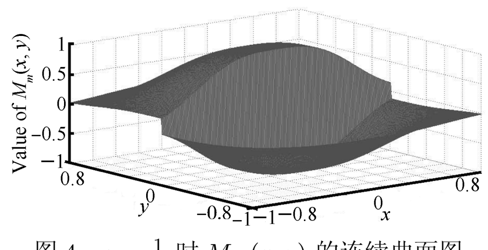

图 4　$\alpha=\frac{1}{3}$ 时 $M_m(x,y)$ 的连续曲面图

Fig. 4　Continuous surface figure of $M_m(x,y)$ when $\alpha=\frac{1}{3}$

仔细观察以上两个模拟图形及其逼近性的实现过程, 我们不难发现选择不同的调节参数 α, 两者图形 (图 3 和图 4) 几乎重合, 这说明调节参数对该系统的影响不大. 此外, 明显能看出图 3 和图 4 与图 1 比较接近, 由此也说明在 K-积分模意义下, 广义 Mamdani 模糊系统对 $\hat{\mu}$-可积函数的确具有逼近性.

5 结论

事实上, 研究模糊系统对可积函数类或连续函数类的泛逼近性可以转化为该模糊系统的分片线性函数在相应度量意义下的近似表示问题. 本文改进诱导算子和引入拟减法算子, 并在 K-拟可加积分基础上给出 K-积分模概念, 通过对系统的输入空间进行等距剖分, 进而以分片线性函数为桥梁讨论了广义 Mamdani 模糊系统对可积函数空间的泛逼近性及其实现, 并通过模拟实例给出了该广义 Mamdani 模糊系统逼近所给一类 $\hat{\mu}$-可积函数的实现过程. 结果表明, 在 K-积分模意义下广义 Mamdani 模糊系统对连续函数类的逼近能力可推广为较为一般的可积函数类. 但值得引起思考的是, 随着系统输入空间维数的递增, 模糊推理规则的总数将按指数形式迅速膨胀, 容易出现 "规则爆炸" 现象. 因此, 如何构造合适的模糊系统避免出现 "规则爆炸" 现象至关重要, 关于这个问题我们已另文加以阐述, 详细参见文献 [13].

References

1 Liu P Y, Li H X. Approximation of generalized fuzzy system to integrable function. *Science in China (Series E)*, 2000, **43**(6): 618−628

2 Liu P Y, Li H X. Analyses for $L_p(\mu)$-norm approximation capability of generalized Mamdani fuzzy systems. *Information Sciences*, 2001, **138**(1−4): 195−210

3 Zeng Ke, Zhang Nai-Rao, Xu Wen-Li. Sufficient condition for linear T-S fuzzy systems as universal approximators. *Acta Automatica Sinica*, 2001, **27**(5): 606−612
(曾珂, 张乃尧, 徐文立. 线性 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件. 自动化学报, 2001, **27**(5): 606−612)

4 Tang Shao-Xian, Chen Jian-Er, Zhang Tai-Shan. Mamdani fuzzy system I/O relation representative and membership function optimization. *Control Theory and Applications*, 2005, **22**(4): 520−526
(唐少先, 陈建二, 张泰山. Mamdani 模糊系统 I/O 关系的表示及隶属函数优化. 控制理论与应用, 2005, **22**(4): 520−526)

5 Zhang Yu-Zhuo, Li Hong-Xing. Generalized hierarchical Mamdani fuzzy systems and their universal approximation. *Control Theory and Application*, 2006, **23**(3): 449−454
(张宇卓, 李洪兴. 广义递阶 Mamdani 模糊系统及其泛逼近性. 控制理论与应用, 2006, **23**(3): 449−454)

6 Sun Fu-Chun, Yang Jin, Liu Hua-Ping. Preconditions for SISO Mamdani fuzzy systems to perform as function approximators. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2009, **4**(4): 288−294
(孙富春, 杨晋, 刘华平. SISO Mamdani 模糊系统作为函数逼近器的必要条件. 智能系统学报, 2009, **4**(4): 288−294)

7 Chen Gang. On approaching precisions of standard fuzzy systems with different basic functions. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(7): 823−827
(陈刚. 关于具有不同基函数的标准模糊系统逼近问题的研究. 自动化学报, 2008, **34**(7): 823−827)

8 Li Hong-Xing, Yuan Xue-Hai, Wang Jia-Yin, Li Yu-Cheng. The normal numbers of the fuzzy systems and their classes. *Science China Information Science*, 2010, **53**(11): 2215−2229
(李洪兴, 袁学海, 王加银, 李宇成. Fuzzy 系统的范数与 Fuzzy 系统的分类. 中国科学: 信息科学, 2010, **40**(12): 1596−1610)

9 Yuan Xue-Hai, Li Hong-Xing, Sun Kai-Biao. Fuzzy systems and their approximation capability based on parameter singleton fuzzifier methods. *Acta Electronica Sinica*, 2011, **39**(10): 2372−2377
(袁学海, 李洪兴, 孙凯彪. 基于参数单点模糊化方法的模糊系统及其逼近能力. 电子学报, 2011, **39**(10): 2372−2377)

10 Wang Gui-Jun, Li Xiao-Ping. Universal approximation of polygonal fuzzy neural networks in sense of K-integral norms. *Science China Information Science*, 2011, **54**(11): 2307−2323
(王贵君, 李晓萍. K-积分模意义下折线模糊神经网络的泛逼近性. 中国科学: 信息科学, 2012, **42**(3): 362−378)

11 Zhao Fen-Xia, Li Hong-Xing. Approximation of regular fuzzy neural networks to Sugeno-integrable functions. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2006, **29**(1): 39−45
(赵芬霞, 李洪兴. 正则模糊神经网络在 Sugeno 积分模意义下的泛逼近性. 应用数学学报, 2006, **29**(1): 39−45)

12 Wang Gui-Jun, Li Dan. Capability of universal approximation of feedforward regular fuzzy neural networks in K-integral norm. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2013, **36**(1): 141−152
(王贵君, 李丹. 前向正则模糊神经网络依 K-积分模的泛逼近能力. 应用数学学报, 2013, **36**(1): 141−152)

13 Wang Gui-Jun, Duan Chen-Xia. Generalized hierarchical hybrid fuzzy system and its universal approximation. *Control Theory and Application*, 2012, **29**(5): 673−680
(王贵君, 段晨霞. 广义分层混合模糊系统及其泛逼近性. 控制理论与应用, 2012, **29**(5): 673−680)

14 Sugeno M, Murofushi T. Pseudo-additive measures and integrals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1987, **122**(1): 197−222

15 Wang Gui-Jun, Li Xiao-Ping. K-quasi-additive fuzzy number valued integral and its convergence. *Advances in Mathematics*, 2006, **35**(1): 109−119
(王贵君, 李晓萍. K-拟可加模糊数值积分及其收敛性. 数学进展, 2006, **35**(1): 109−119)

16 Duan Chen-Xia, Wang Gui-Jun. Universal approximation of square pricewise linear functions in K-integral norms in fuzzy system. *Journal of Tianjin Normal University (Natural Science Edition)*, 2012, **32**(3): 13−16
(段晨霞, 王贵君. 模糊系统中方形分片线性函数依 K-积分模的泛逼近性. 天津师范大学学报 (自然科学版), 2012, **32**(3): 13−16)

王贵君 天津师范大学数学科学学院教授. 1994 年获得东北师范大学数学系硕士学位. 主要研究方向为模糊测度与模糊积分, 模糊神经网络, 模糊系统分析. 本文通信作者. E-mail: tjwgj@126.com
(**WANG Gui-Jun** Professor at the School of Mathematical Science, Tianjin Normal University. He received his master degree from Northeast Normal University in 1994. His research interest covers fuzzy integrals, fuzzy neural networks, and fuzzy systems. Corresponding author of this paper.)

李晓萍 天津师范大学管理学院教授. 1987 年于东北师范大学数学系毕业. 主要研究方向为模糊群, 模糊神经网络, 模糊系统分析.
E-mail: lxpmath@126.com
(**LI Xiao-Ping** Professor at the School of Management, Tianjin Normal University. She graduated from the School of Mathematical Science, Northeast Normal University in 1987. Her research interest covers fuzzy groups, fuzzy neural networks, and fuzzy systems.)

隋晓琳 天津师范大学数学科学学院硕士研究生. 主要研究方向为模糊神经网络与模糊系统分析. E-mail: xiaolin7941333@163.com
(**SUI Xiao-Lin** Master student at the School of Mathematical, Tianjin Normal University. Her research interest covers fuzzy neural networks and fuzzy systems.)