

# 从压缩传感到低秩矩阵恢复：理论与应用

彭义刚<sup>1,2</sup> 索津莉<sup>1</sup> 戴琼海<sup>1</sup> 徐文立<sup>1</sup>

**摘要** 综述了压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复等方面的基础理论及典型应用。基于凸优化的压缩传感及其衍生的矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复是近年来的研究热点，在信号处理、推荐系统、高维数据分析、图像处理、计算机视觉等很多研究领域具有重要和成功的应用。在这些实际的应用中，往往涉及到对高维数据的分析与处理，需要充分和合理利用数据中的如稀疏性或其所构成矩阵的低秩性等性质。尽管在最坏情况下，最小化诸如稀疏性或矩阵秩这样的目标函数是 NP 难的，但是在某些合理的假设条件下，通过优化目标函数的凸松弛替代函数，采用凸优化的方法，能够精确地给出原问题的最优解。有很多高效的凸优化算法对之进行求解且适用于大规模问题。本文首先分别综述了压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复的相关基础理论，然后对其在图像处理、计算机视觉和计算摄像学等领域的典型应用予以举例介绍，并展望了相关领域未来的研究工作。

**关键词** 压缩传感，矩阵秩最小化，低秩矩阵恢复，凸优化

**引用格式** 彭义刚，索津莉，戴琼海，徐文立. 从压缩传感到低秩矩阵恢复：理论与应用. 自动化学报, 2013, 39(7): 981–994

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00981

## From Compressed Sensing to Low-rank Matrix Recovery: Theory and Applications

PENG Yi-Gang<sup>1,2</sup> SUO Jin-Li<sup>1</sup> DAI Qiong-Hai<sup>1</sup> XU Wen-Li<sup>1</sup>

**Abstract** This paper reviews the basic theory and typical applications of compressed sensing, matrix rank minimization, and low-rank matrix recovery. Compressed sensing based on convex optimization and related matrix rank minimization and low-rank matrix recovery are hot research topics in recent years. They find many important and successful applications in different research fields, including signal processing, recommending system, high-dimensional data analysis, image processing, computer vision and many others. In these real applications, analysis and processing of high-dimensional data are often involved, which needs to utilize the structure of data, such as sparsity or low rank property of the data matrix, sufficiently and reasonably. Although minimization of objective functions like sparsity or matrix rank is NP-hard in the worst case, by optimizing the convex relaxation of the original objective function under certain reasonable assumptions, convex optimization could give the optimal solution of the original problem. Moreover, many efficient convex optimization algorithms could be used for solving the problem and are also applicable to large-scale problems. In this paper, we first review the fundamental theories about compressed sensing, matrix rank minimization, and low-rank matrix recovery. Then, we introduce the typical applications of these theories in image processing, computer vision, and computational photography. We also look into the future work in related research areas.

**Key words** Compressed sensing, matrix rank minimization, low-rank matrix recovery, convex optimization

**Citation** Peng Yi-Gang, Suo Jin-Li, Dai Qiong-Hai, Xu Wen-Li. From compressed sensing to low-rank matrix recovery: theory and applications. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(7): 981–994

收稿日期 2012-02-20 录用日期 2012-10-31  
Manuscript received February 20, 2012; accepted October 31, 2012

国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2010CB731800), 国家自然科学基金 (61035002, 61171119) 资助

Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB731800) and National Natural Science Foundation of China (61035002, 61171119)

本文责任编辑 刘成林

Recommended by Associate Editor LIU Cheng-Lin

1. 清华大学清华国家信息实验室, 清华大学自动化系 北京 100084  
2. 国家计算机网络应急技术处理协调中心 北京 100029

1. Tsinghua National Laboratory for Information Science and Technology (TNLIST) and Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084 2. National Computer Network Emergency Response Technical Team Coordination Center

对大规模数据的分析与处理在当今的社会生活与科学研究中占据着越来越重要的地位。例如，在图像处理、计算机视觉、计算摄像学等相关研究领域经常碰到大规模的数据。在这些大规模的数据中，一方面含有丰富的信息以供挖掘利用，另一方面也大大增加了学习和研究这些数据的成本和困难。巨大的数据量往往为大规模数据的分析和处理带来很大的麻烦，带来所谓的“维度灾难 (Curse of dimensionality)”。在实际的信号或图像采集与处理中，数据的维度越高，给数据的采集和处理带来越

of China (CNCERT or CNCERT/CC), Beijing 100029

的限制. 例如, 在采集三维或四维 (三个空间维度再加上一个频谱维度或一个时间维度) 信号时, 往往比较困难. 然而, 随着数据维数的升高, 这些高维数据之间往往存在较多的相关性和冗余度. 信号的维度越高, 由于数据本身信息量的增长比数据维度增长慢得多, 也就使得数据变得越冗余. 一个明显的例子就是, 视频信号要比单幅图像的可压缩的空间大得多. 在高维数据处理中, 高维数据中的相关性不容忽视. 例如, 对于一幅图像而言, 其像素间的相关性表现在图像在某个变换域的系数是稀疏分布的; 对于同一凸的、表面为郎伯特 (Lambertian) 属性的物体, 在固定视角、不同光照条件下拍摄得到的图像近似处在一个 9 维的线性子空间中<sup>[1]</sup>. 如何合理和充分利用高维数据间存在的稀疏性和冗余性, 对于高效地采集、表示、重构这些数据是十分重要的.

更具挑战性的问题是, 这些大规模数据中往往含有空缺元素、大的误差、损毁等, 这为分析和处理这些大规模数据进一步带来了困难. 这种现象在很多实际应用中十分常见. 例如, 在人脸识别中, 训练集中的或是待识别的人脸图像往往含有阴影、高光、遮挡、变形等; 在运动恢复结构 (Structure from motion, SFM) 问题中, 进行特征提取和特征匹配时往往存在大的匹配误差. 这些因素的存在使得很多传统的分析和处理方式失效, 需要新的理论和实用的算法为相关的应用提供理论支撑和有力的求解工具. 正确并高效地从不完整的、带有损毁的数据中恢复和利用它们, 对现代大规模数据的分析与处理至关重要.

最近, 在高维信号统计处理、凸优化方法等方面的发展表明, 尽管在最坏情况下, 最小化诸如稀疏性或矩阵秩这样的目标函数是 NP 难的<sup>[2-3]</sup>, 但是在某些合理的假设条件下, 通过优化目标函数的凸松弛替代函数, 采用凸优化的方法, 能够精确地给出原问题的最优解. 而且, 随着维度的升高, 这种成功的概率会迅速地趋于 1. 这样便带来了“维度恩赐 (Bless of dimensionality)”<sup>[4]</sup>. 相关的理论研究、算法设计和应用研究正如火如荼地进行着.

这些具体的研究课题包括压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复等多个方面. 尽管它们所研究的具体问题不同, 但本质上具有紧密的联系. 矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复问题衍生于近年来非常流行和十分有用的压缩传感技术. 压缩传感利用信号所对应向量或矩阵的稀疏性进行信号的采样与重建. 稀疏性是指向量或矩阵中大部分元素为 0. 压缩传感涉及到最小化向量或矩阵的 (伪)  $l_0$  范数 (又称零范数), 即向量或矩阵中非零元素的个数. 而矩阵的低秩性是指矩阵的秩相对于矩阵的行数或列数而言很小. 如果对矩阵进行奇异值分解, 并把其所有奇异

值排列为一个向量, 那么这个向量的稀疏性便对应于该矩阵的低秩性. 低秩性可以看做是稀疏性在矩阵上的拓展. 矩阵秩最小化主要是指利用原始数据矩阵的低秩性进行矩阵的重建, 这涉及到最小化矩阵的秩函数. 低秩矩阵恢复则是指同时利用原始数据矩阵的低秩性和误差矩阵的稀疏性来恢复数据矩阵. 在具体求解压缩传感、矩阵秩最小化或低秩矩阵恢复问题时, 由于原始目标函数  $l_0$  范数和矩阵秩函数是非连续非凸的函数, 往往分别使用  $l_1$  范数和矩阵核范数 (见下文) 代替, 将原始问题转化为凸优化问题求解, 并且有相关文献给出了凸优化求解方法成功的条件和理论保证<sup>[3, 5-6]</sup>.

现在已有相关的综述文章、期刊特辑和专著对压缩传感原理、算法和应用等进行总结<sup>[7-12]</sup>, 有关矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复方面的资料, 尤其是中文综述的资料还十分少<sup>[13]</sup>. 另一方面, 有关这些理论和技术的典型应用的总结还不常见. 本文希望抛砖引玉, 为同行的研究提供一个参考.

在本文中, 我们将首先介绍压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复的相关理论基础, 并主要从图像处理、计算机视觉、计算摄像学的领域详细举例说明近年来它们典型的成功应用. 本文的内容组织如下: 在第 1 节中, 首先介绍压缩传感的理论基础; 在第 2 节中, 介绍矩阵秩最小化 (及低秩矩阵填充) 的理论基础; 在第 3 节中, 介绍低秩矩阵恢复的理论基础; 在第 4 节中, 主要从图像处理、计算机视觉、计算摄像学等方面介绍这些基础理论的典型应用; 在第 5 节中, 对相关理论、算法和应用的最新发展和未来研究工作做出概述和展望; 最后, 在第 6 节中, 对本文做一简要总结.

## 1 压缩传感理论

由 Candès 等<sup>[5-6]</sup> 和 Donoho<sup>[14]</sup> 提出的压缩传感 (Compressed sensing) (又称压缩采样 (Compressive sampling)) 是当今信号处理、图像处理等相关研究领域的热点. 经典的 Nyquist-Shannon 采样定理 (Nyquist-Shannon sampling theory) 刻画了信号采样与信号带宽之间的关系, 即如果要无失真重构信号, 至少需要以信号最高带宽两倍频率的速率对信号进行采样. 而现实中的信号往往具有稀疏性 (Sparsity) 或可压缩性 (Compressibility), 例如, 这种稀疏性在图像压缩上取得了成功的应用<sup>[15]</sup>. 压缩传感就是充分利用信号的稀疏性从而降低采样所需要的采样率, 但仍然能够保证准确重构出原信号.

从数学上来看, 对于以向量  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$  表示的信号, 其稀疏性即指该向量中非零元素的个数或称为 (伪)  $l_0$  范数 (零范数), 即  $\|\mathbf{x}\|_0 := |\{i : x_i \neq 0\}|$ . 假

设信号  $\mathbf{x}_0$  是  $S$ -稀疏的 ( $S$ -sparse), 人们希望仅通过测量较少的度量  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$  ( $m \ll n$ ) 并能从中恢复出原信号  $\mathbf{x}_0$  来, 这便是压缩传感的含义. 具体而言, 已知的观测数据是  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ , 其中  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$  且  $m \ll n$ , 人们希望从较少的观测量  $\mathbf{y}$  中恢复出原始信号  $\mathbf{x}_0$ . 这个问题可由下述数学模型表示<sup>[5-6]</sup>:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \|\mathbf{x}\|_0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1)$$

但是, 通常上述问题是一个 NP 难的问题, 人们转而求解如下的凸优化问题<sup>[5-6]</sup>:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\|\mathbf{x}\|_1$  表示向量  $\mathbf{x}$  的  $\ell_1$  范数 (1 范数), 定义为  $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ . 这里的关键是, 何时问题 (2) 给出的解便是问题 (1) 的解? 通常, 这与信号的采样方式有关, 即与矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  的性质有关. 文献 [6] 中定义了矩阵的约束等距性 (Restricted isometry property, RIP) 条件, 具体定义如下:

**定义 1**<sup>[6]</sup>. 假设矩阵  $\mathbf{A}$  是由有限个列向量  $(\mathbf{a}_i)_{i \in J} \in \mathbf{R}^m$  排列而成,  $J$  为向量  $\mathbf{a}_i$  脚标的取值范围集合, 对于整数  $S$  ( $1 \leq S \leq |J|$ ), 定义  $S$ -约束等距常数 ( $S$ -restricted isometry constant) 为对所有基数 (Cardinality) 不超过  $S$  的子集  $T \subset J$  和所有实向量  $\{\mathbf{a}_i\}_{i \in T}$  满足下述条件:

$$(1 - \delta_S)\|\mathbf{c}\|^2 \leq \|\mathbf{A}_T\mathbf{c}\|^2 \leq (1 + \delta_S)\|\mathbf{c}\|^2 \quad (3)$$

的  $\delta_S$  的最小值. 类似地, 定义  $S, S'$ -约束正交性常数 ( $S, S'$ -restricted orthogonality constants) 为对所有不相交集  $T, T' \subseteq J$  (其中,  $|T| \leq S, |T'| \leq S', S + S' \leq |J|$ ) 满足:

$$|\langle \mathbf{A}_T\mathbf{c}, \mathbf{A}_{T'}\mathbf{c}' \rangle| \leq \theta_{S,S'}\|\mathbf{c}\|\|\mathbf{c}'\| \quad (4)$$

的  $\theta_{S,S'}$  的最小值.

基于约束等距常数和约束正交性常数的定义, 文献 [6] 给出了如下的压缩传感重建定理:

**定理 1**<sup>[6]</sup>. 假设向量  $\mathbf{x}_0$  的支撑是  $T$ , 满足  $T \subset J, |T| < S$ , 矩阵  $\mathbf{A}$  满足:

$$\delta_S + \theta_S + \theta_{S,2S} < 1 \quad (5)$$

这里,  $S \geq 1$ . 度量值  $\mathbf{y}$  是由  $\mathbf{f} := \mathbf{A}\mathbf{x}_0$  得到的. 那么,  $\mathbf{x}_0$  是优化问题 (2) 的唯一最优解.

更多有关压缩传感的相关理论与应用, 可参见文献 [5-7, 12, 14]. 压缩传感这个术语更主要的是从信号采样角度出发的, 说明如何对本质上稀疏的信号进行有效采样, 然后采用非线性重构的方法重构

信号. 如果不太注重从信号采样和重构的角度对问题进行分析, 与之相关的模型及优化问题也常常被称为稀疏表示 (Sparse representation) 或稀疏逼近 (Sparse approximation). 相关的内容可参见 Elad 的专著<sup>[10]</sup>.

## 2 矩阵秩最小化理论

与压缩传感紧密相关的一个问题是矩阵秩最小化问题. 低秩矩阵模型在信号处理等领域具有广泛的应用, 例如系统辨识与控制、欧氏空间嵌入 (Euclidean embedding) 和协同滤波 (Collaborative filtering) 等<sup>[2]</sup>, 这往往涉及到仿射矩阵秩最小化 (Affine rank minimization) 的问题<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} \min_X \quad & \text{rank}(X) \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{A}(X) = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$  是决策变量, 真实的决策变量  $X_0$  具有低秩特性,  $\mathcal{A}$  是线性映射,  $\mathcal{A} : \mathbf{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R}^p$ , 将决策变量  $X$  映射到观测变量  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^p$ . 在压缩传感问题 (1) 中, 目标函数是数据  $\mathbf{x}$  的稀疏性; 而在这里, 目标函数是数据  $X$  矩阵的秩, 即其奇异值构成向量的稀疏性. 然而, 通常上述问题的求解是 NP 难的. 注意到函数  $\text{rank}(X)$  在集合  $\{X \in \mathbf{R}^{m \times n} : \|X\| \leq 1\}$  上的凸包 (Convex envelope) 是  $X$  的核范数  $\|X\|_* = \sum_{k=1}^n \sigma_k(X)$  (即矩阵  $X$  的所有奇异值之和), 人们转而求解如下的启发式凸优化问题<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} \min_X \quad & \|X\|_* \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{A}(X) = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (7)$$

与压缩传感类似, 这里的关键是: 何时问题 (7) 给出的解便是问题 (6) 的解. 类似于把压缩传感拓展到仿射矩阵秩最小化上, Recht 等<sup>[2]</sup> 把 RIP 条件从向量拓展到矩阵上:

**定义 2**<sup>[2]</sup>. 对于线性映射  $\mathcal{A} : \mathbf{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R}^p$ , 不失一般性, 假定  $m \leq n$ , 对于满足  $1 \leq r \leq m$  的任意整数  $r$ , 定义  $r$ -约束等距常数 ( $r$ -restricted isometry constant) 为使得对于所有秩最大为  $r$  的矩阵  $X$  均满足:

$$(1 - \delta_r(\mathcal{A}))\|X\|_F \leq \|\mathcal{A}(X)\| \leq (1 + \delta_r(\mathcal{A}))\|X\|_F \quad (8)$$

的  $\delta_r(\mathcal{A})$  的最小值.

基于 RIP 条件的定义, 文献 [2] 中证明了如下两个定理:

**定理 2**<sup>[2]</sup>. 假设某个整数  $r \geq 1$  使得  $\delta_{2r} < 1$ , 那么  $X_0$  是满足  $\mathcal{A}(X) = \mathbf{b}$  的唯一一个秩最大为  $r$  的矩阵.

**定理 3**<sup>[2]</sup>. 假设  $r \geq 1$  使得  $\delta_{5r} \leq 1/10$ , 那么  $X^* = X_0$ , 其中  $X^*$  是问题 (7) 的解.

矩阵秩最小化的一个典型应用是低秩矩阵填充 (Low-rank matrix completion) 问题. 假定原始数据矩阵是低秩的, 但是矩阵中含有很多未知的元素. 从一个不完整的矩阵中恢复出一个完整的低秩矩阵, 便是低秩矩阵填充问题. 例如, 著名的 Netflix 问题<sup>[16]</sup> 便是一个典型的低秩矩阵填充问题. Netflix 是美国的一家影片租赁公司. 其推荐系统 (Recommendation system) 要从用户仅有的对少数的电影打分中为用户推荐影片. 如果这种推荐越符合用户的喜好, 也就越能提高该公司租赁电影的业务量. 为此, 该公司设立了百万美元的奖金用于悬赏能够最好地提高该公司推荐系统质量的解决方法. 这个问题可以用矩阵填充来进行建模. 假设矩阵的每一行代表同一用户对不同电影的打分, 每一列代表不同用户对同一电影的打分. 用户数量巨大, 电影数目巨大, 因此这个矩阵的维度十分大. 由于用户所打分的电影有限, 这个矩阵中只有很小一部分的元素值已知, 而且可能含有噪声或误差. 那么 Netflix 问题就是如何从这个不完整的矩阵中推测其中未知元素的值. 矩阵填充得越准确, 为用户推荐的电影也就越符合用户的喜好. 由于影响用户对电影喜好的因素数目有限, 如电影的题材、演员、年代、导演等, 这个矩阵本质上是一个低秩矩阵. 数学上, 从观测到的不完整的矩阵  $M \in \mathbf{R}^{m \times n}$  恢复出完整的低秩矩阵  $M$  (秩为  $r$ ) 来, 即<sup>[17]</sup>:

$$\begin{aligned} \min_X \quad & \text{rank}(X) \\ \text{s.t.} \quad & X_{ij} = M_{ij}, \quad (i, j) \in \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\Omega$  对应于观测到的  $M$  中元素对应的位置集合, 即若  $M_{ij}$  被观测到, 则  $(i, j) \in \Omega$ . 但是, 对上述优化问题的求解是 NP 难的, 且问题求解的复杂度还随着矩阵维数的增长呈平方倍指数关系增长. 因此, 人们采用如下的凸优化问题<sup>[17]</sup> 取而代之:

$$\begin{aligned} \min_X \quad & \|X\|_* \\ \text{s.t.} \quad & X_{ij} = M_{ij}, \quad (i, j) \in \Omega \end{aligned} \quad (10)$$

何时问题 (10) 给出的解便是问题 (9) 的解? 在给出相关的定理之前, 文献 [17] 首先提出了下面的条件:

**A1.** 存在  $\mu_1 > 0$ , 使得对于所有的向量对  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \in [n_1] \times [n_1]$  和向量对  $(\mathbf{b}, \mathbf{b}') \in [n_2] \times [n_2]$  满足:

$$\left| \langle \mathbf{e}_a, P_U \mathbf{e}_{a'} - \frac{r}{n_1} \mathbf{1}_{a=a'} \rangle \right| \leq \mu_1 \frac{\sqrt{r}}{n_1}$$

$$\left| \langle \mathbf{e}_b, P_V \mathbf{e}_{b'} - \frac{r}{n_2} \mathbf{1}_{b=b'} \rangle \right| \leq \mu_1 \frac{\sqrt{r}}{n_2} \quad (11)$$

**A2.** 存在  $\mu_2 > 0$ , 使得对于所有的向量对  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in [n_1] \times [n_2]$  满足:

$$|E_{ab}| \leq \mu_2 \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{n_1 n_2}} \quad (12)$$

其中,  $P_U$  和  $P_V$  分别是矩阵  $M$  行空间和列空间的正交投影算子:

$$P_U = \sum_{i \in [r]} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T, \quad P_V = \sum_{i \in [r]} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \quad (13)$$

矩阵  $E$  为

$$E := \sum_{i \in [r]} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad (14)$$

这里,  $\{\mathbf{u}_i\}$  和  $\{\mathbf{v}_i\}$  分别是  $M$  的左、右奇异向量, 即矩阵  $M$  的奇异值分解为

$$M = \sum_{i \in [r]} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad (15)$$

其中,  $\sigma_1, \dots, \sigma_r \geq 0$  是矩阵  $M$  的奇异值.

如果参数  $\mu_1$  和  $\mu_2$  均小于或等于常数  $\mu$ , 则称矩阵  $M$  满足参数为  $\mu$  的强非相干性条件 (Strong incoherence property). 值得注意的是, 这个强相干性条件仅与矩阵  $M$  的奇异值向量相关, 与其奇异值大小没有关系.

接着, 文献 [17] 证明了如下定理:

**定理 4**<sup>[17]</sup>. 对于秩为  $r$  的矩阵  $M \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $r = O(1)$ , 假设矩阵  $M$  满足参数为  $\mu$  的强非相干性条件, 不失一般性, 设  $m \leq n$ , 若人们观测到的  $M$  中已知元素的位置是随机均匀分布的, 共观测到  $c$  个元素, 那么存在一个正的常数  $C$ , 使得当

$$c \geq C \mu^4 n (\log n)^2 \quad (16)$$

时, 矩阵  $M$  至少以  $1 - n^{-3}$  的概率是优化问题 (10) 的唯一解. 换言之, 核范数最小化问题 (10) 能够以很高的概率精确地恢复出矩阵  $M$  的所有元素. 对于任意的秩  $r$ , 只要  $c$  满足

$$c \geq C \mu^4 n r^2 (\log n)^2 \quad (17)$$

也有同样的结论.

上述定理中  $c$  的大小与矩阵秩  $r$  的平方相关, 下述定理给出了一个更加强的结论, 其中  $c$  的大小与矩阵秩  $r$  的大小是线性相关的.

**定理 5**<sup>[17]</sup>. 对于秩为  $r$  的矩阵  $M \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , 假设矩阵  $M$  满足定理 4 中的条件, 那么存在一个正的常数  $C$ , 使得当

$$c \geq C \mu^2 n r (\log n)^6 \quad (18)$$

时, 矩阵  $M$  至少以  $1 - n^{-3}$  的概率是优化问题 (10) 的唯一解.

值得注意的是, 这里矩阵的模型是确定性的 (Deterministic), 仅需要矩阵满足一定的强非相干性条件. 这些定理揭示的结论既出人意料, 又让人感到高兴: 用这种凸松弛的优化问题代替原始的组合优化问题, 在满足一定的条件下, 竟能够给出原始组合优化问题的解. 随着近代凸优化方法的发展, 也有越来越多实用的算法能够有效地求解凸优化问题, 并且在大规模的数据上仍然有效, 这也为很多应用带来了强有力的工具, 促进了它们的发展.

### 3 低秩矩阵恢复理论

低秩矩阵恢复考虑如何从较大的但稀疏的误差中恢复出本质上低秩的数据矩阵. 有时在不同的场合, 低秩矩阵恢复也被称为矩阵低秩稀疏分解 (Sparse and low-rank matrix decomposition) (即将一个矩阵分解为一个低秩矩阵和一个稀疏矩阵之和)、鲁棒主成分分析 (Robust principle component analysis, RPCA)<sup>[18]</sup>、低秩稀疏非相干分解 (Rank-sparsity incoherence)<sup>[19]</sup> 等. 这个问题在不同的应用领域可能会有不同的理解. 例如, 在计算复杂度研究领域, 矩阵刚度 (Matrix rigidity)<sup>[20]</sup> 刻画了降低一个矩阵的秩所需改变矩阵元素的最少数目的性质; 在数据降维中, 需要寻找观测数据所具有的低维结构, 但破坏这种低维性质的可能不是随机的高斯噪声, 而是随机幅值任意大但是分布稀疏的误差 (Gross errors), 其中低维结构便对应于低秩矩阵部分, 大的但是稀疏的误差便对应于稀疏矩阵部分. 从数学上讲, 将一个矩阵  $D$  ( $D = A_0 + E_0$ ) 分解为一个低秩矩阵部分  $A$  和一个稀疏矩阵部分  $E$  的问题可以由下述优化问题来描述<sup>[18-19]</sup>:

$$\begin{aligned} \min_{A, E} \quad & \text{rank}(A) + \gamma \|E\|_0 \\ \text{s.t.} \quad & D = A + E \end{aligned} \quad (19)$$

其中,  $D, A, E, A_0, E_0 \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$ ,  $D$  是观测数据矩阵,  $A$  对应于低秩矩阵部分,  $E$  对应于稀疏矩阵部分,  $A_0, E_0$  是生成矩阵  $D$  的真实值矩阵. 然而, 由于目标函数中  $\text{rank}(A)$  和  $\|E\|_0$  都是非线性非凸的组合优化函数, 对上述问题的求解是十分困难的.

借鉴压缩传感和矩阵秩最小化方面的研究成果, 人们转而求解下述凸优化问题<sup>[18-19]</sup>:

$$\begin{aligned} \min_{A, E} \quad & \|A\|_* + \lambda \|E\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & D = A + E \end{aligned} \quad (20)$$

在文献 [18] 中, 这个凸优化问题被称之为主成分追踪 (Principal component pursuit, PCP), 并给出了

如下定理:

**定理 6**<sup>[18]</sup>. 假设  $A_0 \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$  (不失一般性, 假设  $n_1 \geq n_2$ ) 满足如下的有关参数  $\mu$  的非相干性条件 (Incoherence condition):

$$\begin{aligned} \max_i \|U^T \mathbf{e}_i\|^2 &\leq \frac{\mu r}{n_1} \\ \max_i \|V^T \mathbf{e}_i\|^2 &\leq \frac{\mu r}{n_2} \\ \|UV^T\|_\infty &\leq \sqrt{\frac{\mu r}{n_1 n_2}} \end{aligned} \quad (21)$$

其中,  $\mathbf{e}_i$  是单位向量, 矩阵  $A_0$  的奇异值分解为  $A_0 = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ ,  $r$  是矩阵  $A_0$  的秩, 范数  $\|D\|_\infty = \max_{i,j} |D_{i,j}|$ ,  $S_0$  的支撑在所有坐标 (Caid-inality) 中是均匀分布的, 只要满足:

$$\text{rank}(A_0) \leq \rho_r n_2 \mu^{-1} (\log n_1)^{-2}, \quad m \leq \rho_s n_1 n_2 \quad (22)$$

则存在数值常数  $c$  使得由主成分追踪问题 (20) (其中  $\lambda = 1/\sqrt{n_1}$ ) 至少能以  $1 - cn_1^{-10}$  的概率恢复出原始矩阵, 即:  $\hat{A} = A_0$ ,  $\hat{E} = E_0$ , 其中,  $\rho_r$  和  $\rho_s$  是正的数值常数.

换言之, 只要低秩矩阵  $A_0$  的奇异向量分布合理且稀疏矩阵的非零元素均匀分布, 那么凸优化问题 PCP 就能够以接近 1 的概率从未知的任意的误差中恢复出原始低秩矩阵  $A_0$  来. 值得注意到是, 原始矩阵  $A_0$  的秩  $r$  是与  $n/(\log n)^2$  同一数量级的.

注意到低秩矩阵恢复问题 (20) 与低秩矩阵填充问题 (10) 的不同: 在低秩矩阵填充中, 矩阵中位置元素的位置是已知的; 而在低秩矩阵恢复中, 矩阵是完整的, 但是其中哪些元素受到了误差的破坏并不知道. 也就是说, 低秩矩阵恢复比低秩矩阵填充更具有挑战性, 或者说低秩矩阵恢复要同时检测被破坏的元素的位置并恢复它们. 低秩矩阵填充和低秩矩阵恢复可以合称为低秩矩阵重建 (Low-rank matrix reconstruction)<sup>[21]</sup>.

文献 [18] 也考虑了观测矩阵中同时含有大的误差和空缺元素的情况下的低秩矩阵恢复问题. 文献 [22] 考虑了有高斯噪声存在下的低秩矩阵恢复问题. 文献 [23] 则考虑了从任意高密度的误差下恢复低秩矩阵的问题 (Dense error correction for low-rank matrices), 通过选取合适的加权系数  $\lambda$ , 使得低秩矩阵恢复仍能以很高的概率成功. 这些都是问题 (20) 的拓展和推广.

### 4 典型应用举例

压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复等, 不但符合现实世界中的很多物理模型, 而且给出了求解这些问题的理论保证和求解凸优化问题的有

效算法. 最小化  $\ell_1$  范数往往涉及软阈值截取运算 (Soft-thresholding)<sup>[24]</sup>, 最小化核范数往往涉及奇异值截取运算 (Singular value thresholding)<sup>[25]</sup>. 具体的算法包括加速近似梯度算法 (Accelerated proximal gradient, APG)<sup>[26–27]</sup>、交替方向算法 (Alternating direction method, ADM)<sup>[28–30]</sup>、Bregman 迭代法<sup>[31]</sup> 等. 也有相关的英文文献对相关的算法做出总结和比较. 例如, 在文献 [30] 中, 作者分析比较了用于鲁棒人脸识别的快速  $\ell_1$  范数最小化方法. 由于本文篇幅有限, 而求解算法众多、内容丰富, 本文暂不对算法部分做出详细的引用论述. 有关求解这些问题算法的更多内容可参见文献 [32–36] 等.

有了这些实用高效的求解算法, 才使得压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复在不同领域的多个方面取得了十分成功的应用. 这些应用涉及到图像处理、模式识别、计算机视觉、计算机图形学和计算摄影学 (Computational photography) 等多个领域. 下面对其中一些典型的成功应用实例做一简要介绍.

#### 4.1 压缩传感的应用

**磁共振成像.** 压缩传感最成功也是最重要的应用之一就是磁共振成像 (Magnetic resonance imaging, MRI) 中的应用<sup>[37–38]</sup>. 例如文献 [38] 中所列举的快速血管造影法 (Rapid angiography)、全心冠状动脉成像 (Whole-heart coronary imaging)、增强大脑成像 (Enhanced brain imaging) 和动态心脏成像 (Dynamic heart imaging) 等实例. 压缩传感十分受到研究磁共振成像研究人员的青睐, 这主要是由于: 1) MRI 与压缩传感理论十分吻合, 其成像图像在某种合适的变换域下是稀疏的, MRI 扫描仪在成像过程中是在图像的变换域而不是原始的空间域中采样的; 2) 压缩传感理论在 MRI 上的应用大大减少了成像时间, 从而大大减少了病人的痛苦和成像花费. 研究人员通过设计合理的成像方法和重建算法, 使之满足图像在某已知的变换域下是稀疏的、下采样方式与变换域的基函数是非相干的、采用非线性重构算法等条件, 使得压缩传感在 MRI 中获得了成功的应用.

压缩传感在理论和算法上已有了长足的发展, 而在硬件实现上则刚刚起步. 下面简要介绍单像素相机和压缩采样荧光显微镜.

**单像素相机 (Single pixel camera).** 单像素相机是由美国 Rice 大学研发的一个根据压缩传感原理实现的硬件系统<sup>[39]</sup>. 传统的数码相机采用电子耦合元件 (Charge-coupled device, CCD) 或互补式金属氧化物半导体 (Complementary metal-oxide-semiconductor, CMOS) 传感器, 每次尽量采集较

多的像素信息, 采集得到的图像数据量巨大, 然后再通过联合图像专家小组 (Joint photographic experts group, JPEG) 或 JPEG 2000 等图像压缩标准, 对图像数据进行压缩. 与传统相机的 CCD 或 CMOS 传感器每个像素仅测量一个空间位置上的图像信息不同, 单像素相机的每一个度量 (Measurement) 中包含场景中随机像素的信息之和. 单像素相机采用一个数字微镜芯片 (Digital micro-mirror device, DMD), DMD 是由很多微型镜片组成, 每个微型镜片一面反光另一面不反光. 在每次度量时, 将图像光线通过凸透镜打到 DMD 上, 每次变换 DMD 上明暗矩阵组成的伪随机码模式, 再将光线会聚到单光子检测器 (Single photon detector) 上, 得到一次测量得到的“单像素”信息. 通过多次这样的测量, 得到多个度量值, 最后再使用压缩传感的重构方法, 重构出原始图像. 这样的采样方式大大减少了数据量, 直接在采样的同时对数据做了压缩, 完全不同于传统方法中先采样、再丢弃 (压缩) 的方法. 这种单像素相机不需要传统相机中的大面积传感器, 尤其在传统 CCD 或 CMOS 传感器测量不到的不可见光区具有潜在的巨大应用价值.

**压缩采样荧光显微镜 (Compressive fluorescence microscopy, CFM)**<sup>[40]</sup>. 法国 Bordeaux 大学等一些研究机构的研究人员设计了压缩采样荧光显微镜, 并展示了其在生物医学图像和多光谱图像中的应用. 这种压缩采样荧光显微镜结合了动态宽角度结构光和快速高敏感度单点荧光检测装置, 使得在很低的采样频率下 (只有原来采样频率的 1/32) 仍能重构原始的荧光图像.

**人脸识别.** 人脸识别中涉及到对高维人脸图像数据的分析与处理. 如何从大规模的人脸图像数据库中准确确定待识别人脸图像的身份是一个很困难的问题. Wright 等提出一种基于稀疏表示的人脸识别方法<sup>[41]</sup>, 不但在人脸识别准确率上获得了特别好的效果, 而且还具有在有遮挡或损毁等大的误差存在情况下的人脸识别能力. 这种人脸识别的核心思想是: 待识别人脸图像在由训练集中人脸图像构成的过完备字典 (Overcomplete dictionary) 上具有稀疏表示 (Sparse representation). 训练集中每类样本的人脸图像数目和光照变化充分多, 以张成该类人脸图像的样本子空间. 通过求解待识别人脸图像在训练集过完备字典上的稀疏表示系数, 选取重构误差最小者作为人脸识别结果. 这种基于稀疏表示的人脸识别方法对训练集中的人脸图像要求较高. 首先, 训练集中同一个人的人脸图像应该充分多, 这些人脸图像要具有多种不同的光照条件, 以张成比较完整的该类人脸图像样本子空间; 其次, 该方法对人脸图像间的对齐要求很高, 否则, 由于人脸图像间

位置关系的不准确会造成这种稀疏表示方法的失效. Wagner 等提出了一种最小化对齐误差稀疏性的鲁棒图像对齐方法<sup>[42-43]</sup>, 用于解决待识别人脸图像与训练集中人脸图像之间的对齐问题. 在文献 [42-43] 中, 他们还设计了一个硬件采集系统, 用于采集多光照变化条件下的人脸图像, 从而使训练集中同一人的脸图像具有充分多的光照变化情况, 同时使图像数目尽量少, 从而构成一个鲁棒、高效的人脸图像训练集. 进一步, 为了更好地处理人脸图像中存在的大的遮挡问题, Zhou 等<sup>[44]</sup> 抓住了遮挡区域往往是连续存在的特点, 将马尔科夫随机场 (Markov random field, MRF) 模型引入了基于稀疏表示的人脸识别方法之中, 利用遮挡连续性的先验知识, 进而利用稀疏表示的原理, 将这些被连续遮挡或损毁的区域恢复出来, 获得了更加有效和稳定的人脸识别结果. 整个这种基于稀疏表示的人脸识别方法得到了很好的识别效果, 获得了很高的评价<sup>[45]</sup>. 也有研究人员提出对训练集中人脸图像构成的过完备字典进行改进, 以提高人脸识别的效果. 例如, Yang 等提出了基于 Gabor 特征的稀疏表示人脸识别方法, 压缩了遮挡字典库部分, 在人脸识别的性能和效率上都有所提升<sup>[46]</sup>. 在文献 [47] 中, Ma 等提出了一种具有鉴别性的低秩字典学习算法用于优化过完备字典库. 在文献 [48] 中, Chen 等则提出了一种新的低秩矩阵近似算法, 并在字典库中加入了结构非相干性.

**图像超分辨率重建.** Yang 等从稀疏表示的角度重新思考了图像超分辨率重建的问题<sup>[49-50]</sup>, 并提出了基于稀疏表示的单幅图像超分辨率重建算法. 根据图像的统计特点, 如果选取了合适的过完备字典库, 那么一个图像块可由这个字典库中的原子 (Atom) 的稀疏线性组合表示. 一般情况下, 低分辨率图像可认为是由高分辨率图像下采样得到的. 根据这种对应关系, 建立互相对应的低分辨率图像块过完备字典库和高分辨率图像块过完备字典库. 对于一个低分辨率图像块, 首先求得该图像块在低分辨率图像块过完备字典库上的稀疏表示系数, 然后将这组系数对应到高分辨率图像块过完备字典库上, 重建出高分辨率图像块. 这种基于稀疏表示的高分辨率重建方法不但取得了好的重建效果, 而且对噪声更加鲁棒.

**编码频闪摄像 (Coded strobing photography).** 编码频闪摄像<sup>[51]</sup> 可以从拍摄的高速周期或近似周期运动物体的低帧率的视频中恢复出高帧率的视频. 这种方法利用了周期运动信号在时域上的冗余性, 换言之, 周期信号在傅里叶变换域是稀疏的. 在使用普通低速相机拍摄视频时, 对运动物体采用编码频闪方式的光照, 拍摄得到编码频闪下的

图像. 然后根据信号在傅里叶变换域的系数是稀疏的特点, 根据估计出的频率的分布, 利用结构稀疏性 (Structured sparsity), 采用  $\ell_1$  范数最小化方法得到傅里叶系数, 再重建出高速视频的信号. 传统的拍摄高速运动物体的方法中, 使用高速相机拍摄时, 由于拍摄帧率很高、曝光时间很短, 需要给予场景很强的光照以保证较高的信噪比 (Signal to noise ratio, SNR); 使用单频闪的方式拍摄, 也存在光通量 (Light-throughput) 不足的问题. 而文献 [51] 所提出的编码曝光摄像的方法大大增加了光通量, 可达到普通低速摄像光通量的 50%.

## 4.2 矩阵秩最小化的应用

**光照传输矩阵重建.** 在基于图像的重光照 (Image-based relighting) 中, 需要得到准确的光照传输矩阵 (Light transport matrix) 以获得高质量的重光照结果<sup>[52]</sup>. 为了获得准确的光照传输矩阵, 往往需要采集巨大量的图像数据, 采集的图像数据会达到几千甚至上万幅. 场景的光照传输矩阵具有数据相干性 (Coherence) 和稀疏性的特点. Peers 等<sup>[53]</sup> 利用反射函数 (Reflectance functions) 在某些基函数 (例如球面谐波函数或小波基 (Spherical harmonics or wavelets)) 下是稀疏的或可压缩的特点, 设计了不同的光照模式进行图像的采集, 并提出了一种层次化的重建算法, 利用空域像素间的相关性提高重建质量, 减少计算复杂度. Wang 等<sup>[54]</sup> 正是利用这个特点, 设计了一种新的图像采集方式和光照传输矩阵重建算法, 大大降低了图像采集的数量 (仅需采集几百幅图像). 他们用固定视角的相机和置于二维平面上的点光源装置采集场景的三维反射场 (4D reflectance fields). 首先采样得到光线传输矩阵的稀疏的行和列上的元素, 并从中估计出核函数; 然后将这些已知元素映射到核空间, 使用 Nyström 方法重建出完整的矩阵, 即核 Nyström 方法 (Kernel Nyström method); 最后再将重建出的矩阵反映射回去, 得到最终的重建的光照传输矩阵. 这种方法充分利用了数据间的非线性相干性, 经过核映射后的光照传输矩阵的秩被大大减低了, 因而可使用 Nystörm 方法从稀疏的数据中重建出完整的矩阵. 这种方法大大降低了需采集的图像数目. 他们将重建的光照传输矩阵用于场景的重光照等实验均取得了很好的实验结果. Huang 等<sup>[55]</sup> 设计了稀疏地预计算光照传输矩阵的方法: 对于光照传输复杂的区域, 选取较多的点 (Dense vertices), 根据区域的特点 (局部光照传输矩阵秩的大小), 自适应地进行角度域的采样; 对于不重要的区域则选取较少的点 (Sparse vertices), 只进行少量的光线角度域的采样; 利用光照传输矩阵的局部低秩性, 重建出完整的



光照传输矩阵. 这种稀疏地预计算光照传输矩阵的方法还可与接下来的重光照算法结合起来, 例如簇主成分分析算法 (Clustered principal component analysis, CPCA), 进一步降低算法时间.

**鲁棒视频恢复.** 在文献 [56] 中, Ji 等利用低秩矩阵填充成功地进行了鲁棒视频去噪的工作. 他们开发了一个基于块的视频去噪算法, 将时域空域中相近的块聚集起来, 先估计出噪声存在的位置, 然后将噪声去除问题建模为低秩矩阵填充, 利用低秩矩阵填充算法进行噪声的去除. 他们的算法可适用于去除混合噪声, 例如混有脉冲噪声的大的高斯噪声 (Heavy Gaussian noise with impulsive noise), 而传统的视频去噪算法往往依赖视频中存在的噪声符合高斯统计模型的假设. 在文献 [57] 中, Ji 等还提出了基于矩阵低秩稀疏分解的鲁棒视频恢复算法, 并将之用于视频去噪和视频补绘 (Inpainting) 上, 也取得了很不错的效果.

**超声波断层成像仪校准.** Karbasi 等巧妙地运用了低秩矩阵填充进行超声波断层成像仪的校准 (Ultrasound tomography calibration)<sup>[58-60]</sup>. 超声波断层成像仪通过使用超声波及其在媒质中的传播特性, 对媒质进行断层扫描成像. 在成像之前, 需要精确定位超声波传感器的位置, 以获得准确的度量结果. 通常, 通过发射超声波信号, 测量超声波从发射器到接收器的飞行时间 (Time-of-flight, ToF), 组成飞行时间矩阵, 再从中推断出传感器的位置信息. 但是, 这个矩阵往往会含有缺失元素, 在度量过程中, 还会受到大噪声的干扰, 还存在匹配错误的情况. 对于飞行时间矩阵相关的距离矩阵, 虽然通常情况下是一个满秩矩阵, 但与其对应的平方距离矩阵则是一个低秩矩阵, 秩最多为 4. 文中利用这个低秩矩阵的特点, 同时考虑到矩阵的结构特点, 采用改进的 Optspace<sup>[61]</sup> 算法, 从含有未知元素和大噪声的平方距离矩阵中重建出完整的平方距离矩阵. 最后使用了已有的多维尺度算法 (Multi-dimensional scaling, MDS) 得到传感器正确的位置信息. 这种基于结构矩阵填充与恢复的方法在超声波断层成像仪的校准上取得了不错的仿真结果.

### 4.3 低秩矩阵恢复的应用

**视频背景建模.** 文献 [18] 中, Candès 等将鲁棒主成分分析用于监控视频的背景建模中. 对于监控视频, 一般是由固定的相机拍摄到的图像序列. 将每幅图像排列为一个向量, 再将所有图像序列对应的向量排列为一个矩阵, 则稳定的背景部分对应于低秩矩阵部分, 而活动的物体或人物构成视频的前景, 对应于稀疏矩阵部分. 由主成分追踪算法, 将由图像序列对应的矩阵进行矩阵低秩稀疏分解, 便可成功

地将静止的背景和活动的前景分开, 从而可用于对背景建模和识别前景运动.

**光度立体重建 (Photometric stereo reconstruction).** 光度立体重建是指由固定角度、变化光照条件下拍摄得到的多幅图像重建出物体表面的法向 (Surface orientations). 在进行光度立体重建时, 立体重建的效果往往受到物体表面非朗伯特特性 (Non-Lambertian) 造成的阴影 (Shadows) 或高光 (Specularities) 的影响. 与传统的采用 RANSAC 或中值滤波来克服这些受损野值带来的不利影响不同, 文献 [62-63] 中提出了一种基于低秩矩阵填充与恢复的鲁棒光度立体重建方法. 这种方法的出发点是: 如果不含阴影, 拍摄得到的凸的朗伯特表面物体在不同光照条件下的表现 (Appearance) 张成三维子空间或光照锥 (Illumination cone); 如果凸的物体表面含有投射阴影 (Cast shadows), 那其表现也可由一个低维的线性子空间近似表示. 如果把每幅图像拉成向量, 再把这些向量排列起来构成一个矩阵. 那么理想情况下, 这个矩阵应该是一个秩为 3 的低秩矩阵. 文献 [62-63] 中所提方法便是试图从带有未知元素和损毁的数据中重建出这个低秩矩阵, 然后利用已知的光线方向信息, 恢复物体表面法向信息. 这个方法将鲁棒光度立体重建问题建模为含有未知元素和损毁元素的低秩矩阵恢复问题, 得到了统一的模型框架, 并采用先进的核范数和  $l_1$  范数最小化的优化方法, 有高效的求解方法进行计算. 这种方法最大的优点是能够处理数据中存在的由阴影、高光等带来的大的非高斯误差 (Non-Gaussian errors).

**鲁棒联合图像对齐.** 在文献 [64-65] 中, Peng 等设计了一种基于低秩稀疏分解的鲁棒联合图像对齐方法 (Robust alignment by sparse and low-rank decomposition, RASL), 用于对齐一组本质上线性相关的图像, 同时可以去除图像中存在的遮挡、损毁等造成的大的误差. 这种方法可以看作是模型 (20) 的一种拓展应用. 它通过寻找一组最优的图像变换参数, 使得经过位置变换后的这组图像构成的矩阵能够被分解为一个低秩矩阵部分 (代表对齐且恢复出的图像) 和一个稀疏矩阵部分 (代表遮挡、损毁等造成的大的误差). 由于非线性非凸约束的存在, RASL 模型本身是一个非凸优化问题, 在实际求解中通过对约束条件进行逐步线性化, 然后迭代求解一系列的线性化后的凸优化问题, 最终得到原问题的解. 这种鲁棒联合图像对齐的方法在各种可控和自然条件下采集得到图像集上均表现得很好, 对人脸识别、联合图像去噪和视频去抖动等均有帮助, 也被成功应用于“会说话的”仿真人脸头像合成 (Photo-real talking head synthesis)<sup>[66]</sup> 和视



频流中的人脸图像复原 (Face recovery from video streaming)<sup>[67]</sup> 等技术上。

**低秩纹理结构.** 文献 [68–69] 提出了一种名为具有变换不变性的低秩纹理 (Transform invariant low-rank textures, TILT) 模型, 可以用于提取二维图像中的低秩纹理, 即使图像中存在严重的损毁或变形, TILT 方法也很有效. 在经过合适的仿射或投影变换后, 图像所对应的场景中存在有规则的模式尤其是具有某种对称性的纹理结构可以看作是一个低秩矩阵, 而存在的遮挡、损毁等误差可以看作是一个稀疏矩阵. TILT 模型也是矩阵低秩稀疏分解模型 (20) 的一种推广. TILT 模型不但可以用于二维平面图像, 还可推广应用于广义圆柱形表面<sup>[70]</sup>. TILT 模型还被进一步拓展应用到了室外三维模型重建 (Urban 3D reconstruction)<sup>[71]</sup>、摄像机校准 (Camera calibration)<sup>[72]</sup> 和字符识别 (Optical character recognition)<sup>[73]</sup> 等.

下面我们再展示低秩矩阵恢复的两个具体应用实例, 分别是旧电影修复和去除视频中的雨线. 这两个实例在其他的文献中还没有被涉及到.

**旧电影修复.** 以前的摄像技术远不如现在这么先进, 也远不像今天这样能够方便地拍摄高质量的视频. 以往往往是采用胶卷呈像的方式进行摄像的. 现在, 为了更好地保存较早时候拍摄的这些具有历史价值的珍贵视频资料, 常常需要将胶卷影像进行数字化. 但是由于年代久远, 那些旧的胶卷往往会发生化学变化, 使得视频中出现各种斑点、划痕、颜色失真、噪声、图像抖动等失真. 利用视频帧与帧之间的相关性, 可以使用低秩模型对原始视频进行建模, 使用稀疏模型来刻画视频中出现的斑点、划痕等失真. 对于镜头固定不动时拍摄的视频, 我们将视频的各帧排列为一个列向量, 将各帧对应的列向量合起来排列为一个矩阵. 这样, 我们将这个矩阵分解为一个低秩矩阵和一个稀疏矩阵来修复旧电影中的

失真. 如图 1 所示, 我们展示了使用主成分追踪算法进行旧电影修复的一个实例. 图中展示的是一段旧电影片段中的一帧, 图 1 (a) 是待修复的电影片段的一帧, 图 1 (b) 和图 1 (c) 分别展示的是修复得到的视频帧 (对应于低秩矩阵的部分) 和对应的斑点、划痕、颜色失真等误差部分 (对应于稀疏矩阵部分). 可以看到, 算法成功地移除了原始视频中存在的明显的失真. 注意, 这与传统的旧电影修复方法很不一样. 传统的方法往往采用“检测”和“修复”两步的策略, 并且, 它们在进行失真检测时, 往往采用一些启发式的方法, 对于不同类型的失真采用不同的模型分别检测<sup>[74]</sup>. 而在这里所展示的方法中, “检测”与“修复”是一步完成的, 对于误差失真仅仅进行了稀疏性的假设, 能够同时修复斑点、划痕、颜色失真等.

**去除视频中的雨线.** 拍摄户外场景时, 视频的质量往往受到天气状况的影响, 例如, 拍摄下雨或下雪天的场景时, 视频中会出现雨滴、雨线、雪花等<sup>[75]</sup>. 虽然每一帧图像都会受到雨滴、雨线或是雪花的遮挡或模糊, 但并不是每一帧中的每一个像素都会受其影响. 镜头固定不动拍摄视频的情况在监控视频中是十分常见的. 我们利用场景本身近似不变、利用遮挡的稀疏性, 采用主成分追踪算法去除视频中的雨线. 如图 2 (a) 所示, 所拍摄的下大雨场景的原始视频帧中有明显的雨线. 采用主成分追踪算法得到的低秩矩阵部分对应于图 2 (b), 视频帧中的雨线被成功去除了, 图 2 (c) 就是对应的“雨线”部分. 这里的做法与传统的去除“雨线”的做法很不一样. 传统的方法, 如文献 [75] 中的方法需要对“雨”的物理模型做复杂的分析与假设. 而我们的做法没有考虑其物理模型, 去除“雨线”的效果也十分好.

压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复等模型与应用研究方兴未艾. 以上所列举的它们在图像处理、计算机视觉、计算机图形学、计算摄像

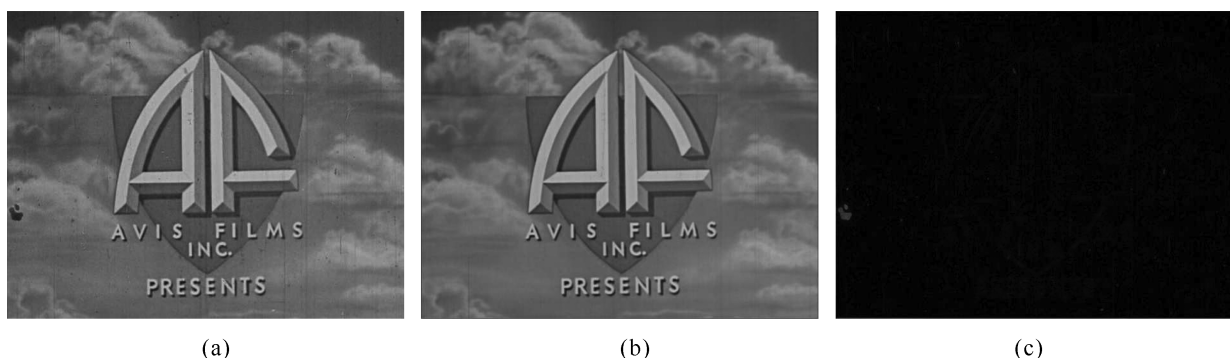


图 1 旧电影修复实例 ((a) 输入的老电视频帧中的一帧; (b) 使用主成分追踪算法恢复得到的对应视频帧; (c) 对应的视频帧中的被损坏部分. 每帧图像的分辨率为 480 像素 × 620 像素大小.)

Fig. 1 Example of old movie restoration ((a) One frame from the input old movie; (b) The restored corresponding frame obtained by PCP; (c) The corrupted error in the corresponding frame. Each frame is of 480 × 620 resolution.)

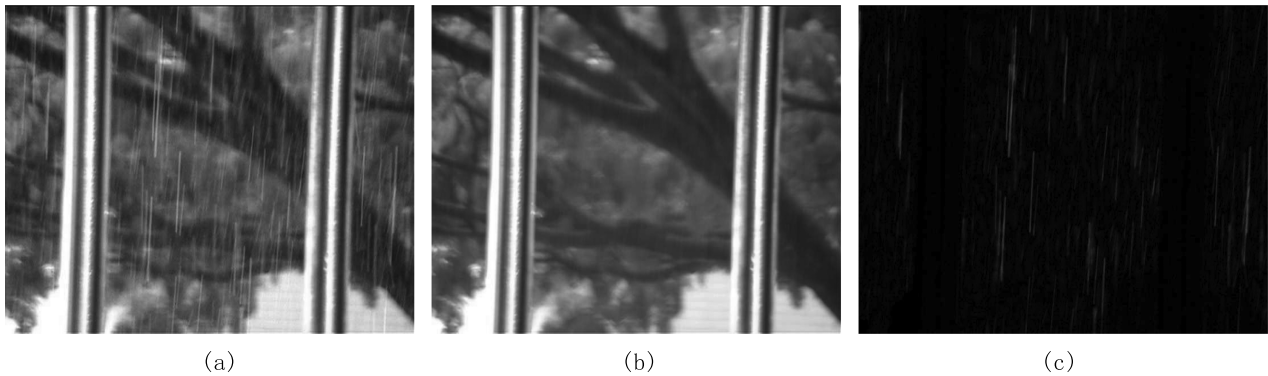


图 2 去除视频中的“雨线”示例 ((a) 输入的 100 帧视频中的第 1 帧; (b) 使用主成分追踪算法恢复得到的对应视频帧; (c) 对应的视频帧中的“雨线”部分. 每帧图像的分辨率为  $576 \text{ 像素} \times 720 \text{ 像素}$ 大小.)

Fig. 2 Example of rain removal in the video ((a) The first frame of a 100-frame video; (b) The restored corresponding frame obtained by PCP; (c) The “rain” in the corresponding frame. Each frame is of  $576 \times 720$  resolution.)

学等多方面的应用仅仅是管中窥豹, 但已可见一斑.

## 5 未来研究工作展望

有关压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复的未来研究工作, 可以从多个不同的角度进行.

### 5.1 在理论方面

如何更加合理和充分地利用高维数据的结构, 对实际问题的建模和求解都具有重要的意义. 例如, 尽管  $l_1$  范数最小化的理论和算法都有了长足的发展, 但是在处理一些具体的实际问题时还会遇到困难. 这表现在: 数学模型并没有对问题做出完全合理的描述, 问题本身结构上的一些先验知识并没有被充分和合理地利用起来. 举例来说, 在鲁棒联合图像对齐问题中, 图像中出现的遮挡等常常具有连续性; 在运动恢复结构问题中<sup>[76]</sup>, 得到的不完整的观测矩阵中, 已知元素呈现出近似带状分布的特点. 因此, 在稀疏性或(和)低秩性之外, 如何更进一步地去发现和利用数据中潜在的本质结构, 对于大规模复杂的高维数据分析和处理具有举足轻重的作用. 已有一些研究工作开始对此作出探讨. 例如, 在基于模型的压缩传感 (Model-based compressed sensing)<sup>[77]</sup>中, 除了利用数据的稀疏性之外, 还通过限定零系数和大幅值系数的具体分布来利用数据中的更多结构, 从而进一步降低了压缩传感所需要的观测量的数目. 结构稀疏性 (Structured sparsity)<sup>[78-79]</sup> 探讨如何更充分地挖掘和利用变量间的关系和结构. 例如, 利用小波子带系数的垂直结构关系 (Hierarchical information) 往往比普通的  $l_1$  范数最小化得到的结果效果要好. 对于矩阵秩最小化, 除了原始数据矩阵是低秩的这个先验信息外, 探讨矩阵包含的更多的结构信息对于提高低秩矩阵填充和低秩矩阵恢复等性能会很有帮助. 例如, 现有的低秩矩阵填充算

法, 在对已知元素呈现出带状分布的空缺矩阵进行填充时, 效果不如对已知元素是随机分布的空缺矩阵填充的效果好. 总而言之, 如何更好地探索和利用大规模数据所包含的结构, 是一个重要的研究方向.

### 5.2 在算法方面

充分利用问题的结构和现有的硬件条件, 开发快速的、并行的算法对问题的高效求解和实际应用具有重要的作用. 例如, 在矩阵核范数最小化中, 最耗时的计算集中在矩阵奇异值分解运算上. 传统的算法对一个维数为  $m \times n$  的矩阵进行奇异值分解的计算复杂度是  $O(mn^2)$ . 为此, 人们采取不同的方法降低其计算量. 一方面采取了“分而治之”的方法, 另一方面采用了一些随机算法. 这些算法往往需要在效率和精确度上作出折中. “分而治之”的方法包括: 在文献 [80] 中, Mackey 等提出了一种“分而治之”的方法用于噪声矩阵的低秩稀疏分解, 他们先将大矩阵分成若干小矩阵, 并行求解, 再将结果按照一定的原则整合起来; 在文献 [81] 中, Liu 等提出了一种名为  $l_1$  滤波 ( $l_1$  filtering) 的算法用于矩阵低秩稀疏分解问题, 他们先在称为“种子矩阵 (Seed matrix)”的小矩阵上进行主成分追踪算法, 再在对应的行子矩阵和列子矩阵上进行  $l_1$  滤波, 最后采用广义的 Nyström 方法 (Generalized Nyström method) 恢复余下的元素. 随机算法包括: 在文献 [82] 中, 线性时间复杂度奇异值分解方法 (Linear time singular value decomposition, LTSVD) 采用了一种快速的蒙特卡罗 (Monte Carlo) 方法以近似地求解 SVD 问题; 在文献 [83] 中, Zhou 等通过双向随机投影 (Bilateral random projection, BRP) 来加速低秩矩阵填充和恢复等. 我们相信, 这些方法对于我们的应用问题, 例如 RASL 模型的求解, 也有重要的借鉴之处. 利用现有的计算机硬件条件, 尤

其是图形处理器 (Graphics processing unit, GPU) 强大的并行处理功能, 对于提高算法实际的运行效率至关重要. 例如, 在文献 [21] 中, 陈敏铭等开发了奇异值分解和低秩矩阵恢复算法的 GPU 并行版本; 在文献 [30] 中, Yang 等实现了  $\ell_1$  范数最小化的并行版本, 并将其应用到基于稀疏表示的人脸识别中. 算法的效率对于实际应用, 尤其是实时性要求比较高的场合, 是十分重要的. 因此, 设计和开发高效的算法, 并充分利用问题的结构和硬件条件, 也是未来重要的研究课题.

### 5.3 在应用方面

根据应用问题本身的物理意义, 设计合理的数学模型, 使用现代凸优化方法进行高效的求解, 也是未来重要的研究方向. 压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复等已在信号处理、图像处理、计算机视觉、机器学习<sup>[84]</sup> 等很多方面展现出成功的应用. 例如, 文献 [85] 采用低秩重构的方法以减少类间分布的差异, 从而进行多视角的物体识别. 在文献 [86] 中, 作者认为图像是由低秩结构和特定特征空间的稀疏噪声构成的, 他们使用低秩矩阵表示图像背景、稀疏矩阵表示图像的显著性区域, 从而利用矩阵低秩稀疏分解进行图像的显著性区域检测, 取得了很好的效果. 在文献 [87] 中, 作者则将矩阵秩最小化用于融合由不同模型得到的置信度分数, 并在物体分类、视频事件检测等应用中得到显著的性能提升. 还有研究人员将这些技术用于医学影像的处理中. 与传统的基于图像分割的跟踪方法不同, 在文献 [88] 中, 作者认为除了快速运动、组织变形的二尖瓣单张区域外, 一个心动周期组成的图像序列能够用低秩矩阵很好地表示, 他们提出了一种基于低秩表示的超声心动图二尖瓣单张跟踪方法, 实现了全自动无监督的跟踪算法. 还有很多十分有意义的应用不断涌现, 篇幅所限, 不再一一介绍. 我们相信, 合理把握问题的物理结构, 设计合理的数学模型和实用的求解方法, 压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复等新的大规模数据的分析与处理方法必定会在更多的实际应用中发挥作用.

## 6 总结

在本文中, 我们分别介绍了压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复的基础理论知识, 以及它们在图像处理、计算机视觉和计算摄像学等领域的典型应用. 从中, 我们可以领略到这些基础理论和凸优化模型的强大之处以及它们在实际应用中的广泛性和有效性. 压缩传感、矩阵秩最小化及低秩矩阵恢复在高维信号、图像分析与处理、计算机视觉等方面的应用方兴未艾. 采用合适的数学模型与算法, 是对

高维信号分析与处理的关键所在. 由本文所述的实例中, 我们对它们在高维信号和大规模数据分析与处理中的巨大作用已有所了解, 这些基础理论及求解凸优化问题的高效算法为实际的应用提供了理论保证和有力工具. 利用压缩传感、矩阵秩最小化和低秩矩阵恢复等原理与方法, 充分挖掘高维信号和大规模数据中的信息, 以此设计新型的数据采集方式和重建算法, 具有广阔的应用前景.

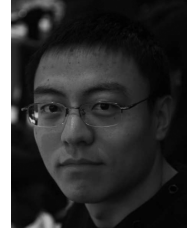
## References

- Basri R, Jacobs D W. Lambertian reflectance and linear subspaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, **25**(2): 218–233
- Natarajan B K. Sparse approximate solutions to linear systems. *SIAM Journal of Computing*, 1995, **24**(2): 227–234
- Recht B, Fazel M, Parrilo P A. Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization. *SIAM Review*, 2010, **52**(3): 471–501
- Donoho D L. High-dimensional data analysis: the curses and blessings of dimensionality. *American Mathematical Society Math Challenges Lecture*, 2000. 1–32
- Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489–509
- Candès E J, Tao T. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, **51**(12): 4203–4215
- Special section compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 12–101
- Li Shu-Tao, Wei Dan. A survey on compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(11): 1369–1377 (李树涛, 魏丹. 压缩传感综述. 自动化学报, 2009, **35**(11): 1369–1377)
- Yang J Y, Peng Y G, Xu W L, Dai Q H. Ways to sparse representation: an overview. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2009, **52**(4): 695–703
- Elad M. *Sparse and Redundant Representations: from Theory to Applications in Signal and Image Processing*. New York: Springer, 2010
- Dai Qiong-Hai, Fu Chang-Jun, Ji Xiang-Yang. Research on compressed sensing. *Chinese Journal of Computers*, 2011, **34**(3): 425–434 (戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究. 计算机学报, 2011, **34**(3): 425–434)
- Eldar Y C, Kutyniok G. *Compressed Sensing: Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012
- Ma Jian-Wei, Xu Jie, Bao Yue-Quan, Yu Si-Wei. Compressive sensing and its application: from sparse to low-rank regularized optimization. *Signal Processing*, 2012, **28**(5): 609–623 (马坚伟, 徐杰, 鲍跃全, 于四伟. 压缩感知及其应用: 从稀疏约束到低秩约束优化. 信号处理, 2012, **28**(5): 609–623)
- Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306

- 15 Taubman D S, Marcellin M W. *JPEG 2000: Image Compression Fundamentals, Standards and Practice. The International Series in Engineering and Computer Science*. New Yoik: Springer, 2002
- 16 SIGKDD A, KDD Cup N, Workshop [Online], available: <http://www.cs.uic.edu/~liub/KDD-cup-2007/proceedings.html>, October 31, 2012
- 17 Candès E J, Tao T. The power of convex relaxation: near-optimal matrix completion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **56**(5): 2053–2080
- 18 Candès E J, Li X D, Ma Y, Wright J. Robust principal component analysis? *Journal of the ACM*, 2011, **58**(3): 1–37
- 19 Chandrasekaran V, Sanghavi S, Parrilo P A, Willsky A S. Rank-sparsity incoherence for matrix decomposition. *SIAM Journal on Optimization*, 2011, **21**(2): 572–596
- 20 Valiant L G. Graph-theoretic arguments in low-level complexity. In: *Proceedings of the 6th Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*. New York: Springer, 1977. 162–176
- 21 Chen Min-Ming. Algorithms and Implementation of Matrix Reconstruction [Master dissertation], Institute of Computing Technology of Chinese Academy of Science, China, 2010 (陈敏铭. 矩阵重建的算法与实现 [硕士学位论文], 中国科学院计算机技术研究所, 中国, 2010)
- 22 Zhou Z H, Li X D, Wright J, Candès E J, Ma Y. Stable principal component pursuit. In: *Proceedings of the 2010 IEEE International Symposium on Information Theory*. Austin, TX: IEEE, 2010. 1518–1522
- 23 Ganesh A, Wright J, Li X D, Candès E J, Ma Y. Dense error correction for low-rank matrices via principal component pursuit. In: *Proceedings of the 2010 IEEE International Symposium on Information Theory*. Austin, TX: IEEE, 2010. 1513–1517
- 24 Combettes P L, Wajs V R. Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 2005, **4**(4): 1168–1200
- 25 Cai J F, Candès E J, Shen Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, **20**(4): 1956–1982
- 26 Beck A, Teboulle M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problem. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, **2**(1) 183–202
- 27 Toh K C, Yun S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized least squares problems. *Pacific Journal of Optimization*, 2010, **6**(3): 615–640
- 28 Lin Z C, Chen M M, Wu L Q, Ma Y. The Augmented Lagrange Multiplier Method for Exact Recovery of Corrupted Low-rank Matrices. UIUC Technical Report UILU-ENG-09-2215, arXiv preprint arXiv: 1009.5055, 2010
- 29 Yuan X M, Yang J F. Sparse and low-rank matrix decomposition via alternating direction methods [Online], available: <http://www.math.hkbu.edu.hk/~xmyuan/Publication.html>, June 25, 2013
- 30 Yang A, Ganesh A, Sastry S, Ma Y. Fast  $l_1$ -minimization algorithms and an application in robust face recognition: a review. In: *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Image Processing*, 2010. 1849–1852
- 31 Yin W, Osher S, Goldfarb D, Darbon J. Bregman iterative algorithms for  $l_1$ -minimization with applications to compressed sensing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, **1**(1): 143–168
- 32 Rockafellar R T. *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1970
- 33 Daubechies I, Defrise M, de Mol C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 2004, **57**(11): 1413–1457
- 34 Daubechies I, DeVore R, Fornasier M, Güntürk S. Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2010, **63**(1): 1–38
- 35 Fornasier M, Rauhut H, Ward R. Low-rank matrix recovery via iteratively reweighted least squares minimization. *SIAM Journal on Optimization*, 2011, **21**(4): 1614–1640
- 36 He R, Sun Z N, Tan T N, Zheng W S. Recovery of corrupted low-rank matrices via half-quadratic based nonconvex minimization. In: *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Providence, RI: IEEE, 2011. 2889–2896
- 37 Lustig M, Donoho D, Pauly J M. Sparse MRI: the application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2007, **58**(6): 1182–1195
- 38 Lustig M, Donoho D L, Santos J M, Pauly J M. Compressed sensing MRI. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 72–82
- 39 Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, Laska J N, Sun T, Kelly K F, Baraniuk R G. Single-pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 83–91
- 40 Studer V, Bobin J, Chahid M, Mousavi S H S, Candès E, Dahan M. Compressive fluorescence microscopy for biological and hyperspectral imaging. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2011, **109**(26): E1679–E1687
- 41 Wright J, Yang A Y, Ganesh A, Sastry S S, Ma Y. Robust face recognition via sparse representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, **31**(2): 210–227
- 42 Wagner A, Wright J, Ganesh A, Zhou Z H, Ma Y. Towards a practical face recognition system: robust registration and illumination by sparse representation. In: *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Miami, FL: IEEE, 2009. 597–604
- 43 Wagner A, Wright J, Ganesh A, Zhou Z, Mobahi H, Ma Y. Toward a practical face recognition system: robust alignment and illumination by sparse representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012, **34**(2): 372–386
- 44 Zhou Z, Wagner A, Mobahi H, Wright J, Ma Y. Face recognition with contiguous occlusion using Markov random fields. In: *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Computer Vision*. Kyoto: IEEE, 2009. 1050–1057
- 45 Kroeker K L. Face recognition breakthrough. *ACM Communication*, 2009, **52**(8): 18–19

- 46 Yang M, Zhang L. Gabor feature based sparse representation for face recognition with gabor occlusion dictionary. In: Proceedings of the 11th European Conference on Computer Vision. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 448–461
- 47 Ma L, Wang C C, Xiao B H, Zhou W. Sparse representation for face recognition based on discriminative low-rank dictionary learning. In: Proceedings of the 2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Providence, RI: IEEE, 2012. 2586–2593
- 48 Chen C F, Wei C P, Wang Y C F. Low-rank matrix recovery with structural incoherence for robust face recognition. In: Proceedings of the 2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Providence, RI: IEEE, 2012. 2618–2625
- 49 Yang J C, Wright J, Huang T S, Ma Y. Image super-resolution as sparse representation of raw image patches. In: Proceedings of the 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Anchorage, AK: IEEE, 2008. 1–8
- 50 Yang J C, Wright J, Huang T S, Ma Y. Image super-resolution via sparse representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, **19**(11): 2861–2873
- 51 Veeraraghavan A, Reddy D, Raskar R. Coded strobing photography: compressive sensing of high speed periodic events. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, **33**(4): 671–686
- 52 Debevec P, Hawkins T, Tchou C, Duiker H P, Sarokin W, Sagar M. Acquiring the reflectance field of a human face. In: Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. New York, USA: ACM, 2000. 146–156
- 53 Peers P, Mahajan D K, Lamond B, Ghosh A, Matusik W, Ramamoorthi R, Debevec P. Compressive light transport sensing. *ACM Transactions on Graphics*, 2009, **28**(1): 1–18
- 54 Wang J P, Dong Y, Tong X, Lin Z C, Guo B N. Kernel Nyström method for light transport. *Proceedings of ACM SIGGRAPH*, 2009, **28**(3): 1–10
- 55 Huang F C, Ramamoorthi R. Sparsely precomputing the light transport matrix for real-time rendering. *Computer Graphics Forum*, 2010, **29**(4): 1335–1345
- 56 Ji H, Liu C Q, Shen Z W, Xu Y H. Robust video denoising using low rank matrix completion. In: Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. San Francisco, CA: IEEE, 2010. 1791–1798
- 57 Ji H, Huang S B, Shen Z W, Xu Y H. Robust video restoration by joint sparse and low rank matrix approximation. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011, **4**(4): 1122–1142
- 58 Karbasi A, Oh S, Parhizkar R, Vetterli M. Ultrasound tomography calibration using structured matrix completion. In: Proceedings of the 20th International Congress on Acoustics. Sydney, Australia, 2010
- 59 Parhizkar R, Karbasi A, Vetterli M. Calibration in circular ultrasound tomography devices. In: Proceedings of the 36th International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Prague: IEEE, 2011. 549–552
- 60 Parhizkar R, Karbasi A, Oh S, Vetterli M. Calibration using matrix completion with application to ultrasound tomography [Online], available: <http://arxiv.org/abs/1012.4928>, July 5, 2013
- 61 Keshavan R H, Montanari A, Oh S. Matrix completion from a few entries. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(6): 2980–2998
- 62 Wu L, Ganesh A, Shi B, Matsushita Y, Wang Y T, Ma Y. Robust photometric stereo via low-rank matrix completion and recovery. In: Proceedings of the 10th Asian Conference on Computer Vision. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 703–717
- 63 Wu L, Ganesh A, Shi B, Matsushita Y, Wang Y T, Ma Y. Convex optimization based low-rank matrix completion and recovery for photometric stereo and factor classification [Online], available: <http://perception.csl.illinois.edu/matrix-rank/stereo.html>, June 25, 2013
- 64 Peng Y G, Ganesh A, Wright J, Xu W L, Ma Y. RASL: robust alignment by sparse and low-rank decomposition for linearly correlated images. In: Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). San Francisco, CA: IEEE, 2010. 763–770
- 65 Peng Y G, Ganesh A, Wright J, Xu W L, Ma Y. RASL: robust alignment by sparse and low-rank decomposition for linearly correlated images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (TPAMI)*, 2012, **34**(11): 2233–2246
- 66 Wu K K, Wang L J, Soong F K, Yam Y. A sparse and low-rank approach to efficient face alignment for photo-real talking head synthesis. In: Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Prague: IEEE, 2011. 1397–1400
- 67 Tan W T, Cheung G, Ma Y. Face recovery in conference video streaming using robust principal component analysis. In: Proceedings of the 18th IEEE International Conference on Image Processing. Brussels, Belgium: IEEE, 2011. 3225–3228
- 68 Zhang Z D, Liang X, Ganesh A, Ma Y. TILT: transform invariant low-rank textures. In: Proceedings of the 2011 Computer Vision – ACCV, Springer Berlin Heidelberg, 2011. 314–328
- 69 Zhang Z D, Ganesh A, Liang X, Ma Y. TILT: transform invariant low-rank textures. *International Journal of Computer Vision*, **99**(1): 1–24
- 70 Zhang Z D, Liang X, Ma Y. Unwrapping low-rank textures on generalized cylindrical surfaces. In: Proceedings of the 2011 International Conference on Computer Vision (ICCV). Barcelona, Spain: IEEE, 2011. 1347–1354
- 71 Mobahi H, Zhou Z H, Yang A Y, Ma Y. Holistic 3D reconstruction of urban structures from low-rank textures. In: Proceedings of the 2011 International Conference on Computer Vision Workshops. Barcelona: IEEE, 2011. 593–600
- 72 Zhang Z D, Matsushita Y, Ma Y. Camera calibration with lens distortion from low-rank textures. In: Proceedings of the 2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Providence, RI: IEEE, 2011. 2321–2328

- 73 Zhang X, Lin Z, Sun F, Ma Y. Rectification of Optical Characters as Transform Invariant Low-rank Textures. *International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR)*, 2013
- 74 Ren J, Vlachos T. Detection of dirt impairments from archived film sequences: survey and evaluations. *SPIE Journal of Optical Engineering*, 2010, **49**(6): 067005
- 75 Garg K, Nayar S K. Detection and removal of rain from videos. In: *Proceedings of the 2004 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. Washington, DC, USA: IEEE, 2004. 1-528-1-535
- 76 Angst R, Zach C, Pollefeys M. The generalized trace-norm and its application to structure-from-motion problems. In: *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Computer Vision*. Barcelona, Spain: IEEE, 2011. 1-8
- 77 Baraniuk R G, Cevher V, Duarte M F, Hegde C. Model-based compressive sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(4): 1982-2001
- 78 Eldar Y C, Mishali M. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(11): 5302-5316
- 79 Bach F. Structured sparsity-inducing norms through submodular functions. In: *Proceedings of the 2010 in Advances in Neural Information Processing Systems*, 2010. 118-126
- 80 Mackey L W, Talwalkar A, Jordan M I. Divide-and-conquer matrix factorization. In: *Proceedings of the 2011 Neural Information Processing Systems*, 2011. 1134-1142
- 81 Liu R S, Lin Z C, Wei S M, Su Z X. Solving principal component pursuit in linear time via  $l_1$  filtering [Online], available: <http://www.cis.pku.edu.cn/faculty/vision/zlin/zlin.htm>, July 5, 2013
- 82 Drineas P, Kannan R, Mahoney M W. Fast Monte Carlo algorithms for matrices II: computing a low-rank approximation to a matrix. *SIAM Journal on Optimization*, 2006, **36**(1): 158-183
- 83 Zhou T Y, Tao D. GoDec: randomized low-rank and sparse matrix decomposition in noisy case. In: *Proceedings of the 2011 International Conference on Machine Learning*, 2011. 33-40
- 84 Zhuang L S, Gao H Y, Lin Z C, Ma Y, Zhang X, Yu N H. Non-negative low rank and sparse graph for semi-supervised learning. In: *Proceedings of the 2012 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Providence, RI: IEEE, 2012. 2328-2335
- 85 Jhuo I, Liu D, Lee D T, Chang S F. Robust visual domain adaptation with low-rank reconstruction. In: *Proceedings of the 2012 Computer Vision and Pattern Recognition*, 2012. 2168-2175
- 86 Shen X, Wu Y. A unified approach to salient object detection via low rank matrix recovery. In: *Proceedings of the 2012 Computer Vision and Pattern Recognition*, 2012. 853-860
- 87 Ye G N, Liu D, Jhuo I H, Chang S F. Robust late fusion with rank minimization. In: *Proceedings of the 2012 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Providence, RI: IEEE, 2012. 3021-3028
- 88 Zhou X W, Yang C, Yu W C. Automatic mitral leaflet tracking in echocardiography by outlier detection in the low-rank representation. In: *Proceedings of the 2012 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Providence, RI: IEEE, 2012. 972-979

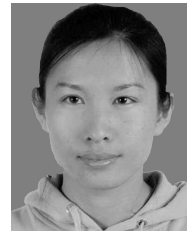


**彭义刚** 国家计算机网络应急技术处理协调中心工程师。2007 年获北京邮电大学学士学位, 2012 年获清华大学博士学位。主要研究方向为计算机视觉, 图像处理 and 计算机网络。本文通信作者。

E-mail: pengyigang@gmail.com

(**PENG Yi-Gang** Engineer at National Computer Network Emergency

Response Technical Team Coordination Center of China. He received his bachelor degree from Beijing University of Posts and Telecommunications in 2007, and his Ph. D. degree from Tsinghua University in 2012. His research interest covers computer vision, image processing, and computer network. Corresponding author of this paper.)



**索津莉** 清华大学自动化系讲师。2004 年获山东大学学士学位, 2010 年获中国科学院研究生院博士学位。主要研究方向为计算摄像学和计算机视觉。

E-mail: jlsuo@tsinghua.edu.cn

(**SUO Jin-Li** Lecturer in the Department of Automation, Tsinghua University. She received her bachelor degree

from Shandong University in 2004 and Ph. D. degree from Graduate University of Chinese Academy of Sciences in 2010. Her research interest covers computational photography and computer vision.)

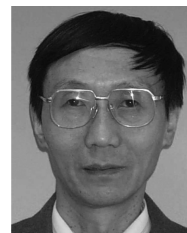


**戴琼海** 清华大学自动化系教授。1996 年获东北大学博士学位。主要研究方向为信号处理, 计算机视觉和图形学, 视频处理与通信和计算摄像学。

E-mail: qionghaidai@tsinghua.edu.cn

(**DAI Qiong-Hai** Professor in the Department of Automation, Tsinghua University. He received his Ph. D. degree

from Northeastern University. His research interest covers signal processing, computer vision and graphics, video processing and communications, and computational photography.)



**徐文立** 清华大学自动化系教授。分别于 1970 年和 1980 年获清华大学学士和硕士学位, 1990 年获美国科罗拉多大学博士学位。主要研究方向为自动控制 and 计算机视觉。

E-mail: xuwl@tsinghua.edu.cn

(**XU Wen-Li** Professor in the Department of Automation, Tsinghua

University. He received his bachelor and master degrees from Tsinghua University in 1970 and 1980, respectively, and Ph. D. degree from the University of Colorado at Boulder, CO, USA, in 1990. His research interest covers automatic control and computer vision.)