

一种基于回归估计误差仿射投影算法的统计特性分析

智永锋¹ 李虎雄¹ 李茹¹

摘要 输入信号是自回归模型时, 建立了一种基于回归估计误差的仿射投影 (Affine projection using regressive estimated error, AP-REE) 算法的统计模型. 在五个假设的条件下, 推导出了 AP-REE 算法迭代方向上权值误差和权值均方误差的递归迭代方程, 分析了 AP-REE 算法稳定状态的误差. 仿真结果表明建立的统计模型与 AP-REE 算法的仿真结果具有一致性.

关键词 仿射投影, 回归估计误差, 自适应滤波, 系统辨识

引用格式 智永锋, 李虎雄, 李茹. 一种基于回归估计误差仿射投影算法的统计特性分析. 自动化学报, 2013, 39(3): 244–250

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00244

Statistical Analysis of Affine Projection Using Regressive Estimated Error Algorithm

ZHI Yong-Feng¹ LI Hu-Xiong¹ LI Ru¹

Abstract This paper presents a statistical analysis of the affine projection using regressive estimated error (AP-REE) algorithm. An analytical model is derived for autoregressive input. Under the five assumptions, deterministic recursive equations are derived for the mean weight error and for the mean-square error in the iterated direction. We also analyze the steady-state behavior of the AP-REE algorithm. Simulation results are presented to show good consistency between the algorithm and the theory.

Key words Affine projection, regressive estimated error, adaptive filter, system identification

Citation Yong-Feng Zhi, Hu-Xiong Li, Ru Li. Statistical analysis of affine projection using regressive estimated error algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 244–250

自适应滤波技术在噪声和回波消除、均衡、波束形成中得到了广泛的应用. 归一化最小均方 (Normalized least mean square, NLMS) 算法计算简单且容易实现, 获得了广泛的应用^[1]. 然而对于高度自相关的输入信号, 即输入信号协方差矩阵的特征值差异比较大, NLMS 算法表现出了收敛速度慢的特性. 在过去的三十年, 为了改善这一问题, 研究者提出了一些高效、快速收敛的自适应滤波算法^[2–5]. 如, 从几何理论研究的角度, 文献 [2] 首次提出了仿射投影 (Affine projection, AP) 算法. 文献 [3] 通过引入输入信号方向向量的概念, 建立了一种新的 AP 算法模型. 如果连续的输入信号相互正交, 将促进自适应滤波器快速收敛, 基于该思想, 文献 [4] 提出了一种基于正交因子的归一化最小均方算法, 该算法与 AP 算法具有完全相同的特性. 本文统称文献 [2–4] 提出的算法为 AP 算法. AP 算法的迭代误

差由输入向量引起, 但 AP 算法是在输入信号的方向向量上更新权值, 这两个方向不一致. 为了解决此问题, 文献 [5] 提出了一种基于回归估计误差的仿射投影 (Affine projection using regressive estimated error, AP-REE) 算法. 在不考虑系统测量噪声的条件下, AP-REE 算法的迭代误差几乎仅由迭代方向引起, 相比较于 AP 算法促进了自适应滤波器的收敛速度.

为了提高自适应滤波器的收敛性能, 不同的方法已经应用到 AP 算法中. 基于当前输入向量可再利用的思想, 文献 [6] 提出了一种新的 AP 算法模型. 利用变步长, 文献 [7] 建立了一种带有指数平滑因子的 AP 算法. 文献 [8] 提出了一个带有可变正则化因子的 AP 算法. 文献 [9] 利用进化理论决定 AP 算法的阶次, 促进了自适应滤波器的性能. 在文献 [10] 中, 为了消除回波, 把均衡的思想引入 AP 算法中.

针对 AP 算法的统计特性, 研究者已经做了大量的研究工作. 假定输入信号独立同分布, 文献 [11] 定量地分析了 AP 算法权值误差和权值均方误差 (Mean square error, MSE) 的收敛特性. 基于文献 [11] 研究的结果, 文献 [12] 通过分析滤波参数和系统测量噪声之间的相关性, 建立了 AP 算法收敛性的统计模型. 文献 [13] 分析了伪 AP 算法局部的鲁棒性和稳定状态值. 在输入信号为自回归 (Autoregressive, AR) 模型、迭代步长为 1 的条件

收稿日期 2011-06-17 录用日期 2012-06-07
Manuscript received June 17, 2011; accepted June 7, 2012
国家自然科学基金 (61201321), 西北工业大学基础研究基金 (JC20100217) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61201321), Basic Research Foundation of Northwestern Polytechnical University (JC20100217)
本文责任编辑 方海涛
Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao
1. 西北工业大学自动化学院 西安 710072
1. Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072
该文的英文版同时发表在 *Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 3, pp. 244–250, 2013.

下, 分析了 AP 算法收敛性的统计模型^[14]. 文献 [15] 在文献 [14] 的基础上, 设迭代步长小于 1, 分析了伪 AP 算法跟踪性的统计模型, 建立了权值误差和权值 MSE 的递归迭代方程. 随后在 AP 算法阶次小于 AR 输入信号模型阶次时, 文献 [16] 分析了 AP 算法的统计模型. 同时, 文献 [17] 分析了集员 AP 算法的收敛性能, 给出了稳定状态和瞬时状态的 MSE 学习曲线.

AP-REE 算法通过重新定义 AP 算法的迭代误差, 与 AP 算法相比, 提高了自适应滤波器的收敛速度, 且 AP-REE 算法的稳态解具有无偏性和一致性^[5]. 据我们所知, AP-REE 算法的统计特性至今没有研究. 本文基于文献 [14–15] 中的假设, 在 AR 输入信号模型条件下, 分析了 AP-REE 算法的收敛特性, 在自适应滤波器的迭代方向建立了权值误差和权值 MSE 的递归迭代方程, 同时分析了 AP-REE 算法的稳态误差.

1 输入信号模型

假定输入序列 $\{x_n\}$ 是均值为 0 的广义平稳的 P 阶 AR 模型, 表示为

$$x_n = \sum_{i=1}^P a_i x_{n-i} + z_n \quad (1)$$

其中, $\{z_n\}$ 是均值为 0、方差为 σ_z^2 的高斯白噪声序列. 利用抽头延迟线可以把输入信号转换为输入向量 $\mathbf{x}_n = [x_n \ x_{n-1} \ \cdots \ x_{n-N+1}]^T$, 定义为^[14]

$$\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^P a_i \mathbf{x}_{n-i} + \mathbf{z}_n = X_n \mathbf{a} + \mathbf{z}_n \quad (2)$$

其中, 输入矩阵 X_n 定义为

$$X_n = [\mathbf{x}_{n-1} \ \mathbf{x}_{n-2} \ \cdots \ \mathbf{x}_{n-P}] \quad (3)$$

向量 \mathbf{z}_n 定义为

$$\mathbf{z}_n = [z_n \ z_{n-1} \ \cdots \ z_{n-N+1}]^T \quad (4)$$

基于最小二乘的方法, 可得向量 \mathbf{a} 的估计值:

$$\hat{\mathbf{a}}_n = (X_n^T X_n)^{-1} X_n^T \mathbf{x}_n \quad (5)$$

其中, 矩阵 $X_n^T X_n$ 的阶次等于 P .

2 AP-REE 算法

图 1 表示自适应滤波器在系统辨识应用中的模型, 通过调整权值向量 \mathbf{w}_n , 使得估计输出信号 \hat{d}_n 与可能包含系统测量噪声 ε_n 的实际系统输出信号 d_n 之间的 MSE 最小. 系统测量噪声 ε_n 是均值为 0、方差为 σ_ε^2 的稳定白噪声信号, 与输入序列 $\{x_n\}$ 相互独立.

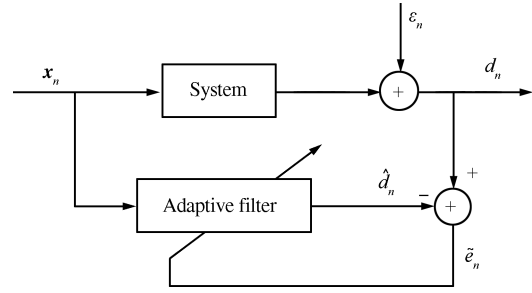


图 1 自适应系统辨识模型

Fig. 1 Adaptive system identification scenario

利用自适应滤波器实现 AP-REE 算法迭代权值向量的结构如下^[5]:

$$\hat{d}_n = \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_n \quad (6)$$

$$\tilde{e}_n = d_n - \hat{d}_n \quad (7)$$

$$e_n = \tilde{e}_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} \tilde{e}_{n-i} \quad (8)$$

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \frac{\boldsymbol{\varphi}_n}{\boldsymbol{\varphi}_n^T \boldsymbol{\varphi}_n} e_n \quad (9)$$

其中, \tilde{e}_n 表示估计的输出误差, e_n 表示回归估计误差, 作为 AP-REE 算法的迭代误差. 参数 $\hat{a}_{n,i}$, $1 \leq i \leq P$ 是向量 $\hat{\mathbf{a}}_n$ 中的一个元素, 迭代步长 μ 用来控制算法以增强自适应能力. 输入信号的方向向量 $\boldsymbol{\varphi}_n$ 定义为

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \mathbf{x}_n - X_n \hat{\mathbf{a}}_n \quad (10)$$

3 方向向量的统计特性

输入信号的方向向量 $\boldsymbol{\varphi}_n$ 是一个误差向量, 它利用最近过去的输入向量和最小二乘方法估计当前的输入向量. 因此可知 AP-REE 算法权值误差的特性依赖于方向向量 $\boldsymbol{\varphi}_n$ 的统计特性, 即依赖于自相关矩阵 $R_\boldsymbol{\varphi} = E[\boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^T]$. 为了便于分析 AP-REE 算法收敛性的统计模型, 给出了五个假设条件, 已用于文献 [14–15] 中分析 AP 算法和伪 AP 算法收敛性的统计模型.

1) 由于式 (2) 和式 (10) 中包含输入矩阵 X_n , 因此需要假定 AP-REE 算法的阶次大于或者等于 AR 模型的阶次.

2) 当 $N \gg P$ 时, 向量 \mathbf{z}_n 和输入矩阵 X_n 之间的统计特性相互独立.

定义 $S_n = X_n (X_n^T X_n)^{-1} X_n^T$ 和 $S_n^\perp = I - S_n$, 其中 I 是一个单位阵. 因此, 向量 \mathbf{z}_n 可以分解为 $\mathbf{z}_n^X = S_n \mathbf{z}_n$ 和 $\mathbf{z}_n^\perp = S_n^\perp \mathbf{z}_n$. 从式 (2) 和式 (5) 可得, 输入矩阵 X_n 仅仅依赖于 \mathbf{z}_n^X . 由于假定序列 $\{z_n\}$ 是均值等于 0 的高斯白噪声, 所以 \mathbf{z}_n 的能量均匀分布在 N 个不同的方向上, 且假设矩阵 $X_n^T X_n$ 的阶次等于 P . 因此, 当 $N \gg P$ 时, 向量 \mathbf{z}_n 和输入矩阵 X_n 之间的统计特性相互独立.

3) 输入信号的方向向量 φ_n 和权值向量 \mathbf{w}_n 之间的统计特性相互独立.

由式 (9) 可得权值向量 \mathbf{w}_n 不依赖于 φ_n , 但是依赖于 φ_{n-1} . 这个假设与输入信号是白噪声、各个时间点的输入相互独立的假设类似. 在 AP-REE 算法中, 输入信号的方向向量 φ_n 用来估计白噪声向量 \mathbf{z}_n , 其证明如下: 把式 (5) 代入式 (10) 中, 基于式 (2) 可得 $\varphi_n = (I - S_n)\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n^\perp$. 由于向量 \mathbf{z}_n^\perp 是在 N 维的空间中把能量均匀分布在 $N - P$ 个不同的方向, 即在每一时刻各维的平均能量是 $(N - P)/N$. 因此, 输入信号方向向量 φ_n 的自相关矩阵为

$$R_\varphi = E[\varphi_n \varphi_n^T] = E[\mathbf{z}_n^\perp \mathbf{z}_n^{\perp T}] = \sigma_\varphi^2 I = \frac{N - P}{N} \sigma_z^2 I \quad (11)$$

4) 输入信号的方向向量 φ_n 是均值为 0 的高斯随机向量.

从假设 3) 中可得输入信号的方向向量 φ_n 是一个均值等于 0 的高斯随机向量, 其方差等于 $\sigma_z^2 (N - P)/N$.

5) 假设存在着一个真实的 N 维权值向量 \mathbf{w}^0 , 相应的权值误差可写为

$$\tilde{\mathbf{w}}_n = \mathbf{w}^0 - \mathbf{w}_n \quad (12)$$

真实输出信号 d_n 与输入向量具有线性的关系, 其表达式如下:

$$d_n = \mathbf{w}^{0T} \mathbf{x}_n + \varepsilon_n \quad (13)$$

4 权值误差分析

在上面的假设条件下, 针对 AP-REE 算法收敛性的分析将会比较容易. 为了分析式 (9) 的收敛特性, 基于文献 [5], 把式 (7) 代入式 (8), 得:

$$e_n = \left(d_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} d_{n-i} \right) - \left(\hat{d}_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} \hat{d}_{n-i} \right) \quad (14)$$

把式 (6) 和式 (13) 代入式 (14), 得:

$$e_n = \left(\mathbf{w}^{0T} \mathbf{x}_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} \mathbf{w}^{0T} \mathbf{x}_{n-i} \right) - \left(\mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} \mathbf{w}_{n-i}^T \mathbf{x}_{n-i} \right) + \left(\varepsilon_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} \varepsilon_{n-i} \right) \quad (15)$$

在 P 个最近的迭代中, 估计的权值向量变化较慢, 可以认为最近的估计权值向量大约相等 $\mathbf{w}_n \approx$

$\mathbf{w}_{n-i}, 1 \leq i \leq P$. 因此, 基于式 (15), 可得:

$$e_n = \mathbf{w}^{0T} \left(\mathbf{x}_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} \mathbf{x}_{n-i} \right) - \mathbf{w}_n^T \left(\mathbf{x}_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} \mathbf{x}_{n-i} \right) + \left(\varepsilon_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} \varepsilon_{n-i} \right) \quad (16)$$

结合式 (10) 和式 (16), 可得:

$$e_n = \mathbf{w}^{0T} \varphi_n - \mathbf{w}_n^T \varphi_n + \left(\varepsilon_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} \varepsilon_{n-i} \right) \quad (17)$$

在假设 5) 的条件下, 基于式 (12) 和式 (17), 可得:

$$e_n = \tilde{\mathbf{w}}_n^T \varphi_n + \vartheta_n \quad (18)$$

其中

$$\vartheta_n = \varepsilon_n - \sum_{i=1}^P \hat{a}_{n,i} \varepsilon_{n-i} \quad (19)$$

在不考虑系统测量噪声的条件下, 基于式 (9) 和文献 [3] 可知, AP-REE 算法和 AP 算法的迭代方向都是输入信号的方向向量. 由式 (18) 可知, AP-REE 算法的迭代误差 e_n 几乎是由输入信号的方向向量 φ_n 引起, 其与自适应滤波器的迭代方向相同. 但是由文献 [3] 可得 AP 算法的迭代误差由输入向量 \mathbf{x}_n 引起, 其与自适应滤波器的迭代方向不相同. 在迭代步长为 1 时, AP-REE 算法变为 AP 算法, 获得了最快的收敛速度. 因此, 与 AP 算法相比较, AP-REE 算法可获得更好的收敛性能^[5].

将式 (18), 并把其结果代入式 (9), 可得:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \tilde{\mathbf{w}}_n + \mu \frac{\varphi_n \vartheta_n}{\varphi_n^T \varphi_n} \quad (20)$$

结合式 (12) 和式 (20), 可得自适应滤波器权值误差的迭代方程:

$$\tilde{\mathbf{w}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{w}}_n - \mu \frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \tilde{\mathbf{w}}_n - \mu \frac{\varphi_n \vartheta_n}{\varphi_n^T \varphi_n} \quad (21)$$

在式 (21) 两边取数学期望值, 可得:

$$E[\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}] = E[\tilde{\mathbf{w}}_n] - \mu E \left[\frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \tilde{\mathbf{w}}_n \right] - \mu E \left[\frac{\varphi_n \vartheta_n}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] \quad (22)$$

由于系统测量噪声 ε_n 是均值为 0 的白噪声, 独立于其他信号, 故式 (22) 最后一项变为 0. 因此, 在假设 3) 输入信号的方向向量 φ_n 和权值向量 \mathbf{w}_n 的统计特性相互独立的条件下, 式 (22) 可以写为

$$E[\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}] = E[\tilde{\mathbf{w}}_n] - \mu E \left[\frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] E[\tilde{\mathbf{w}}_n] \quad (23)$$

由于式 (23) 的分子 $\varphi_n \varphi_n^T$ 中一个元素的变化仅影响分母 $\varphi_n^T \varphi_n$ 中 N 个独立项元素的一个或者两个的变化. 当参数 N 值比较大时, 变量 $\varphi_n \varphi_n^T$ 中的元素变化时, $\varphi_n^T \varphi_n$ 的值变化的不是很快, 所以文献 [14] 指出可以认为变量 $\varphi_n \varphi_n^T$ 与 $\varphi_n^T \varphi_n$ 相互独立. 因此, 可得:

$$E \left[\frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] \approx E \left[\frac{1}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] E [\varphi_n \varphi_n^T] \quad (24)$$

在假设 4) 的条件下, 输入信号的方向向量 φ_n 服从高斯分布. 因此, $y = \varphi_n^T \varphi_n$ 服从开方分布, 其自由度满足 $F = (N - P)^{[18]}$.

$$f_y(y) = \frac{1}{2^{\frac{F}{2}} \sigma_\varphi^F \Gamma(\frac{F}{2})} y^{\frac{F}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma_\varphi^2}}, y \geq 0 \quad (25)$$

基于式 (25), 求积分可得

$$E \left[\frac{1}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] = \frac{1}{\sigma_\varphi^2 (F - 2)} \quad (26)$$

把式 (11) 和式 (26) 代入式 (24), 可得:

$$E \left[\frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] = \frac{1}{F - 2} I \quad (27)$$

把式 (27) 代入式 (23), 可得:

$$E[\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}] = \left(1 - \frac{\mu}{F - 2} \right) E[\tilde{\mathbf{w}}_n] \quad (28)$$

式 (28) 是 AP-REE 算法权值误差的递归迭代方程. 当迭代步长为 1 时, AP-REE 算法权值误差的递归迭代方程与文献 [14] 给出的 AP 算法权值误差的递归迭代方程相同.

5 权值均方误差分析

基于式 (21), 在假设 3) 的条件下输入信号的方向向量 φ_n 和权值向量 \mathbf{w}_n 的统计特性相互独立, 因此权值误差向量的协方差矩阵可写为

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}) = & \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n) - \mu \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n) E \left[\frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] - \\ & \mu E \left[\frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n) + \\ & \mu^2 E \left[\frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \tilde{\mathbf{w}}_n \tilde{\mathbf{w}}_n^T \frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] - \\ & \mu E \left[\left(I - \mu \frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right) \tilde{\mathbf{w}}_n \frac{\varphi_n^T \vartheta_n}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] - \\ & \mu E \left[\frac{\vartheta_n \varphi_n}{\varphi_n^T \varphi_n} \tilde{\mathbf{w}}_n^T \left(I - \mu \frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right) \right] + \\ & \mu^2 E \left[\frac{\varphi_n \vartheta_n}{\varphi_n^T \varphi_n} \frac{\vartheta_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] \quad (29) \end{aligned}$$

利用式 (27), 可得式 (29) 中的第 2 和 3 项分别为

$$\mu \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n) E \left[\frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] = \frac{\mu}{F - 2} \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n) \quad (30)$$

和

$$\mu E \left[\frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n) = \frac{\mu}{F - 2} \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n) \quad (31)$$

基于文献 [14], 在假设 4) 的条件下, 可得式 (29) 中的第 5 和 6 项等于 0, 第 4 项可以近似写为

$$\begin{aligned} \mu^2 E \left[\frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \tilde{\mathbf{w}}_n \tilde{\mathbf{w}}_n^T \frac{\varphi_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] = & \mu^2 \frac{1}{N(F^2 + 2F)} \times \\ & \{ F \text{tr}[\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)] + P E[\tilde{\mathbf{w}}_n^T] E[\tilde{\mathbf{w}}_n] \} I \quad (32) \end{aligned}$$

在假设 2) 的条件下, 式 (29) 中的第 7 项可以写为

$$\begin{aligned} \mu^2 E \left[\frac{\varphi_n \vartheta_n}{\varphi_n^T \varphi_n} \frac{\vartheta_n \varphi_n^T}{\varphi_n^T \varphi_n} \right] = & \\ \mu^2 \left\{ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[E \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right] \right\} \times & \\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varphi^2 (F - 2) (F - 4)} I \quad (33) \end{aligned}$$

把这些结果代入式 (29), 可得递归方程:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}) = & \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n) - \\ & \frac{2\mu}{F - 2} \text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n) + \mu^2 \frac{1}{N(F^2 + 2F)} \times \\ & \{ F \text{tr}[\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)] + P E[\tilde{\mathbf{w}}_n^T] E[\tilde{\mathbf{w}}_n] \} I + \\ & \mu^2 \left\{ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[E \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right] \right\} \times \\ & \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varphi^2 (F - 2) (F - 4)} I \quad (34) \end{aligned}$$

对式 (34) 两边求迹, 可得:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_{n+1})] = & \left(1 - \frac{2\mu}{F - 2} + \mu^2 \frac{1}{F + 2} \right) \times \\ & \text{tr}[\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)] + \mu^2 \frac{P}{F^2 + 2F} E[\tilde{\mathbf{w}}_n^T] E[\tilde{\mathbf{w}}_n] + \\ & \mu^2 \left\{ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[E \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right] \right\} \times \\ & \frac{N \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varphi^2 (F - 2) (F - 4)} \quad (35) \end{aligned}$$

基于式 (18), AP-REE 算法在迭代方向 MSE 的数学期望值可写为

$$\begin{aligned} \xi_n = & E \left[(\tilde{\mathbf{w}}_n^T \varphi_n + \vartheta_n) (\tilde{\mathbf{w}}_n^T \varphi_n + \vartheta_n)^T \right] = \\ & E[\tilde{\mathbf{w}}_n^T \varphi_n \varphi_n^T \tilde{\mathbf{w}}_n] + E[\vartheta_n^2] + 2E[\varphi_n^T \tilde{\mathbf{w}}_n \vartheta_n] \quad (36) \end{aligned}$$

在假设 1) 的条件下, 自适应滤波器迭代较少的次数后, $\hat{\mathbf{a}}_n$ 将趋向于 \mathbf{a} , 所以可以认为 ϑ_n 与 \mathbf{x}_n 相互独立. 由于输入信号的方向向量 φ_n 也假定独立于 $\tilde{\mathbf{w}}_n$, 所以输入信号的方向向量 φ_n 独立于 $\tilde{\mathbf{w}}_n \vartheta_n$, 并且输入信号的方向向量 φ_n 均值等于 0. 因此, 式 (36) 中的最后一项近似等于^[14]

$$\mathbf{E} [\varphi_n^T \tilde{\mathbf{w}}_n \vartheta_n] \approx \mathbf{E} [\varphi_n^T] \mathbf{E} [\tilde{\mathbf{w}}_n \vartheta_n] = 0 \quad (37)$$

在假设 2) 的条件下, 式 (36) 中的第 2 项等于^[14]

$$\mathbf{E} (\vartheta_n^2) = \left\{ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[\mathbf{E} \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right] \right\} \sigma_\varepsilon^2 \quad (38)$$

在假设 3) 的条件下, 经过简化, 式 (36) 可以重新写为

$$\begin{aligned} \xi_n = & \text{tr} [\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n) \mathbf{E} [\varphi_n \varphi_n^T]] + \\ & \left\{ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[\mathbf{E} \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right] \right\} \sigma_\varepsilon^2 = \\ & \sigma_\varphi^2 \text{tr} [\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)] + \\ & \left\{ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[\mathbf{E} \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right] \right\} \sigma_\varepsilon^2 = \\ & \frac{N-P}{N} \sigma_z^2 \text{tr} [\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)] + \\ & \left\{ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[\mathbf{E} \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right] \right\} \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (39)$$

把式 (28) 和 (35) 回归地代入式 (39) 中, 获得了 AP-REE 算法在迭代方向 MSE 的统计模型. 在迭代步长等于 1 时, AP-REE 算法在迭代方向 MSE 的统计模型与文献 [14] 中给出的 AP 算法 MSE 的统计模型相同. 同时在迭代步长等于 1、不考虑系统测量噪声的条件下, AP 算法获得了最快的收敛速度.

6 稳定状态分析

假设 AP-REE 算法收敛, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 权值误差的数学期望值 $\mathbf{E} [\tilde{\mathbf{w}}_n] = \mathbf{0}$ 和 $\text{tr} [\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_\infty)] = \text{tr} [\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_{n+1})] = \text{tr} [\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)]$. 因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由式 (35) 可得:

$$\begin{aligned} \text{tr} [\text{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_\infty)] = & \\ & \left\{ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[\mathbf{E} \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right] \right\} \times \\ & \frac{N \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varphi^2 (F-4) \left(\frac{2}{\mu} - \frac{F-2}{F+2} \right)} \end{aligned} \quad (40)$$

把式 (40) 代入式 (39), AP-REE 算法迭代方向

MSE 的稳态值可写为

$$\begin{aligned} \xi_\infty = & \left\{ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[\mathbf{E} \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right] \right\} \times \\ & \left[1 + \frac{N}{(F-4) \left(\frac{2}{\mu} - \frac{F-2}{F+2} \right)} \right] \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (41)$$

当 $N \gg P$ 时, $\sigma_z^2 \text{tr} \left[\mathbf{E} \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right]$ 约等于 $(P/N) (\sigma_z^2 / \sigma_x^2)$. 因此, 相比较于数值 1, 式 (35)、式 (39) 和式 (41) 中包含的 $\sigma_z^2 \text{tr} \left[\mathbf{E} \left[(X_n^T X_n)^{-1} \right] \right]$ 可以忽略不计^[14].

基于式 (39) 和式 (41), 可得 AP-REE 算法在迭代方向上的失调量

$$\begin{aligned} M = & \frac{\xi_\infty - \mathbf{E} [\vartheta_n^2]}{\mathbf{E} [\vartheta_n^2]} = \\ & \frac{N}{(F-4) \left(\frac{2}{\mu} - \frac{F-2}{F+2} \right)} \end{aligned} \quad (42)$$

表达式 (28)、式 (35)、式 (39) 和式 (41) 组成了 AP-REE 算法收敛性的统计模型. 由式 (42) 可以看出, 当迭代步长 μ 降低或者参数 F 增加时, AP-REE 算法的失调量降低.

基于式 (35) 和式 (42), 结合 AP-REE 算法权值误差和权值 MSE 在迭代方向收敛的条件, 可得参数迭代步长的范围 $0 < \mu < 2 \frac{F+2}{F-2}$. 因此, $0 < \mu < 2$ 是 AP-REE 算法稳定的充分条件. 由式 (35) 可得, 在迭代步长 $\mu_{\text{opt}} = \frac{F+2}{F-2}$ 时, AP-REE 算法获得了最快的收敛速度. 当迭代步长从 0 到 $\frac{F+2}{F-2}$ 递增时, 促进了 AP-REE 算法的收敛性, 但是同时也增加了其失调量. 当迭代步长从 $\frac{F+2}{F-2}$ 到 $2 \frac{F+2}{F-2}$ 递增时, 不但降低了 AP-REE 算法的收敛性, 同时也增加了其失调量. 当参数 F 足够大时, 迭代步长 $\mu_{\text{opt}} = \frac{F+2}{F-2}$ 变为 1. 因此, 对于 AP-REE 算法, 仅仅需要在区间 $\mu \in (0, 1]$ 选择迭代步长.

7 仿真示例比较

本节将比较 AP-REE 算法迭代方向仿真的 MSE 学习曲线与由式 (39) 和式 (41) 给出的统计模型. 假定自适应滤波器的初始估计权值向量 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$, 信噪比设置为 60 dB, AP-REE 算法仿真结果的 MSE 学习曲线是通过 100 个相互独立的学习曲线求平均而得. 假设自适应滤波器的真实权值向量 \mathbf{w}^0 具有最大熵, 也就是说在各个方向具有相同大小的值. 在本文中假定各个方向的幅值等于 1, 因此可得:

$$\mathbf{w}^0 = \mathbf{1} \quad (43)$$

其中, $\mathbf{1}$ 是一个所有元素等于 1 的 32 维向量.

例 1. 输入信号是 $x_n = -0.95x_{n-1} + z_n$ 的 AR(1) 模型, 其中 z_n 为均值等于 0 的高斯白噪声. 选择参数 $N = 32$ 和 $P = 1$. 在参数迭代步长 μ 等于 0.5 和 1 的条件下, 图 2 和图 3 分别给出了 AP-REE 算法的仿真与由式 (39) 和式 (41) 给出的统计模型的 MSE 学习曲线. 从图中可以看出所建立的 AP-REE 算法的统计模型与仿真的学习曲线拟合的比较较好.

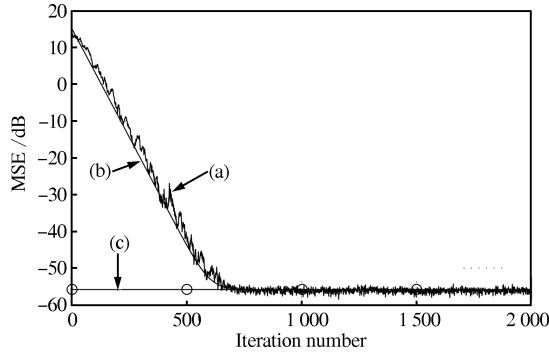


图 2 在迭代步长 $\mu = 0.5$, 输入信号是 AR(1) 模型的情况下, AP-REE 算法的学习曲线 ((a) 算法仿真; (b) 式 (39) 估计的 MSE; (c) 式 (41) 估计的稳态 MSE)

Fig. 2 Learning curves of AP-REE algorithm for AR (1) input when $\mu = 0.5$ ((a) AP-REE simulations; (b) MSE predicted by (39); (c) Steady-state MSE predicted by (41))

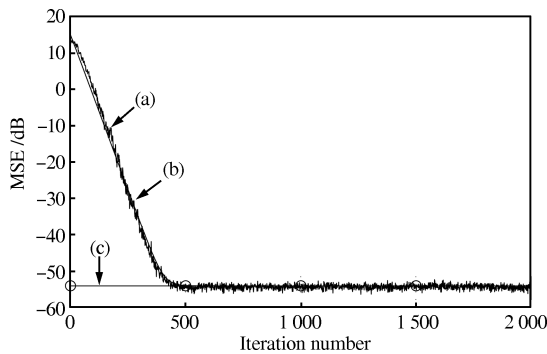


图 3 在迭代步长 $\mu = 1$, 输入信号是 AR(1) 模型的情况下, AP-REE 算法的学习曲线 ((a) 算法仿真; (b) 式 (39) 估计的 MSE; (c) 式 (41) 估计的稳态 MSE)

Fig. 3 Learning curves of AP-REE algorithm for AR (1) input when $\mu = 1$ ((a) AP-REE simulations; (b) MSE predicted by (39); (c) Steady-state MSE predicted by (41))

例 2. 考虑输入信号为 AR(2) 模型, 表达式为 $x_n = 0.95x_{n-1} - 0.35x_{n-2} + z_n$ 的输入信号, z_n 为均值等于 0 的高斯白噪声, 设置参数 $N = 32$ 和 $P = 2$. 图 4 和图 5 分别在迭代步长 μ 等于 0.5 和 1 时, 给出了 AP-REE 算法仿真和建立的统计模型的 MSE 学习曲线, 从图中可以看出, 所建立的 AP-REE 算法的统计模型与仿真学习曲线的结果一致, 特别是在稳定状态.

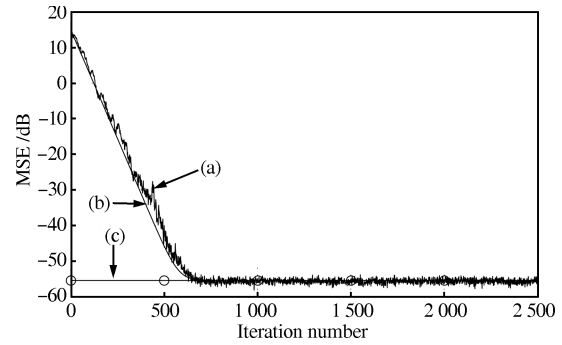


图 4 在迭代步长 $\mu = 0.5$, 输入信号是 AR(2) 模型的情况下, AP-REE 算法的学习曲线 ((a) 算法仿真; (b) 式 (39) 估计的 MSE; (c) 式 (41) 估计的稳态 MSE)

Fig. 4 Learning curves of AP-REE algorithm for AR (2) input when $\mu = 0.5$ ((a) AP-REE simulations; (b) MSE predicted by (39); (c) Steady-state MSE predicted by (41))

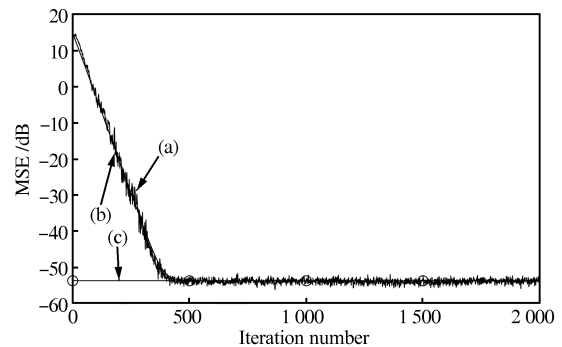


图 5 在迭代步长 $\mu = 1$, 输入信号是 AR(2) 模型的情况下, AP-REE 算法的学习曲线 ((a) 算法仿真; (b) 式 (39) 估计的 MSE; (c) 式 (41) 估计的稳态 MSE)

Fig. 5 Learning curves of AP-REE algorithm for AR (2) input when $\mu = 1$ ((a) AP-REE simulations; (b) MSE predicted by (39); (c) Steady-state MSE predicted by (41))

8 结论

在不考虑系统测量噪声的条件下, AP-REE 算法和 AP 算法的迭代方向都是输入信号的方向向量 φ_n , 但是 AP-REE 算法的迭代误差几乎是由方向向量 φ_n 引起的, AP 算法的迭代误差是由输入向量 x_n 引起的, 二者方向不同. 在本文中, 基于文献 [14–15] 给出的五种假设和输入信号模型, 分析了 AP-REE 算法的统计特性, 在自适应滤波器的迭代方向建立了权重误差和权值 MSE 的递归迭代表达式, 同时分析了 AP-REE 算法的稳态误差. 仿真结果表明, 建立的 AP-REE 算法的统计模型与仿真结果的结果是一致的.

References

- 1 Haykin S. *Adaptive Filter Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002

- 2 Ozeki K, Umeda T. An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties. *Electronics and Communication in Japan*, 1984, **67**(5): 19–27
- 3 Rupp M. A family of adaptive filter algorithms with decorrelating properties. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, **46**(3): 771–775
- 4 Sankaran S G, Beex A A L. Fast generalized affine projection algorithm. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2000, **14**(6): 623–641
- 5 Zhang S, Zhi Y F. Affine projection algorithm using regressive estimated error. *ISRN Signal Processing*, 2011, doi: 10.5402/2011/180624
- 6 Chang M S, Kong N W, Park P G. An affine projection algorithm based on reuse time of input vectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **17**(8): 750–753
- 7 Fan Y, Zhang J. Variable step-size affine projection algorithm with exponential smoothing factors. *Electronics Letters*, 2009, **45**(17): 911–912
- 8 Yin W T, Mehr A S. A variable regularization method for affine projection algorithm. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2010, **57**(6): 476–480
- 9 Kim S E, Kong S J, Song W J. An affine projection algorithm with evolving order. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, **16**(11): 937–940
- 10 Paleologu C, Ciochina S, Benesty J. An efficient proportionate affine projection algorithm for echo cancellation. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, **17**(2): 165–167
- 11 Sankaran S G, Beex A A L. Convergence behavior of affine projection algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, **48**(4): 1086–1096
- 12 Paul T K, Ogunfunmi T. On the convergence behavior of the affine projection algorithm for adaptive filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2011, **58**(8): 1813–1826
- 13 Rupp M. Pseudo affine projection algorithms revisited: robustness and stability analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(5): 2017–2023
- 14 De Almeida S J M, Bermudez J C M, Bershad N J, Costa M H. A statistical analysis of the affine projection algorithm for unity step size and autoregressive inputs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2005, **52**(7): 1394–1405
- 15 De Almeida S J M, Bermudez J C M, Bershad N J. A stochastic model for a pseudo affine projection algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(1): 107–118
- 16 De Almeida S J M, Costa M H, Bermudez J C M. A stochastic model for the deficient order affine projection algorithm. In: Proceedings of the 10th International Conference on Information Sciences Signal Processing and Their Applications. Kuala Lumpur, Malaysia, USA: IEEE, 2010. 554–557
- 17 Diniz P S R. Convergence performance of the simplified set-membership affine projection algorithm. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2011, **30**(2): 439–462
- 18 Papoulis A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. New York: McGraw-Hill, 1965

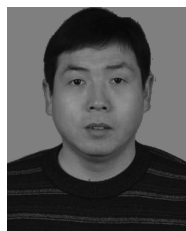


智永锋 西北工业大学自动化学院讲师。2010 年获得西北工业大学自动化学院博士学位。主要研究方向为随机信号建模, 时变频谱估计。本文通信作者。

E-mail: yongfeng@nwpu.edu.cn

(**ZHI Yong-Feng** Lecturer in the Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University.

He received his Ph.D. degree in control science and engineering from Northwestern Polytechnical University in 2010. His research interest covers stochastic signal representation and modeling, time-varying spectral estimation and filtering. Corresponding author of this paper.)



李虎雄 西北工业大学自动化学院博士研究生。2007 年获得华中科技大学硕士学位。主要研究方向为数字信号处理, 数字图像处理。E-mail: jsj-lhx@126.com

(**LI Hu-Xiong** Ph.D. candidate in the Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University.

He received his master degree from Huazhong University of Science and Technology in 2007. His research interest covers digital signal processing and image processing.)



李茹 西北工业大学自动化学院硕士研究生。主要研究方向为数字信号处理, 数字通信。E-mail: liru0319@163.com

(**LI Ru** Master student in the Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University. Her research interest covers digital signal processing and digital communication.)