

一种新的基于保证定界椭球算法的非线性集员滤波器

周波¹ 钱堃¹ 马旭东¹ 戴先中¹

摘要 基于未知但有界噪声假设的集员滤波器为传统的概率化滤波方法提供了一种可行的替代选择, 然而其潜在的计算负担和保守性考虑制约了该方法的实际应用. 本文提出一种新的基于保证定界椭球近似的改进集员滤波方法, 用于解决针对非线性系统的状态估计问题, 在保证实时性的前提下降低了算法的保守性. 首先, 对非线性模型进行线性化处理, 采用 DC (Difference of convex) 规划方法对线性化误差进行外包定界, 并通过椭球近似将其融合到系统噪声中; 在此基础上提出了一种结合了椭球直和计算和基于迭代外定界椭球算法的椭球-带交集计算所构成的经典预测-更新步骤来估计得到状态的可行椭球集. 与常规的非线性扩展集员滤波方法的仿真比较表明了本文所提出算法的有效性和改进性能.

关键词 集员滤波, 有界噪声, 定界椭球, DC 规划, 状态估计

引用格式 周波, 钱堃, 马旭东, 戴先中. 一种新的基于保证定界椭球算法的非线性集员滤波器. 自动化学报, 2013, 39(2): 150-158

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00150

A New Nonlinear Set Membership Filter Based on Guaranteed Bounding Ellipsoid Algorithm

ZHOU Bo¹ QIAN Kun¹ MA Xu-Dong¹ DAI Xian-Zhong¹

Abstract The framework of set membership filter (SMF) with unknown-but-bounded noise assumption provides an attractive alternative for probabilistic filters. However, the potential computational burden and conservation consideration may seriously limit the usage of this filter in practical applications. In this paper, based on guaranteed bounding ellipsoid approximation, a new enhanced set membership filter with better real-time property and reduced conservation is proposed for state estimation problem of nonlinear systems. The nonlinear model is firstly linearized and the DC programming method is used to outer-bound the linearization error, which is incorporated to the model noise with ellipsoidal approximations. A classical two-step prediction-correction procedure consisting vector sum computation between ellipsoids and an iterative outer-bounding ellipsoid algorithm to intersect ellipsoid with strip is presented to compute the ellipsoidal feasible set of the estimated states. Simulation results with comparisons to the nonlinear extended set membership filter are given to demonstrate the effectiveness and improved performances of our proposed algorithm.

Key words Set membership filter (SMF), bounded noise, bounding ellipsoid, difference of convex (DC) programming, state estimation

Citation Bo Zhou, Kun Qian, Xu-Dong Ma, Xian-Zhong Dai. A new nonlinear set membership filter based on guaranteed bounding ellipsoid algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(2): 150-158

传统的状态估计问题通常采用贝叶斯估计方法来解决, 例如经典的针对线性系统的 Kalman 滤波 (Kalman filter, KF)、针对非线性系统的扩展 Kalman 滤波 (Extended Kalman filter, EKF)

和无迹 Kalman 滤波 (Unscented Kalman filter, UKF)^[1], 以及基于 Monte-Carlo 采样的粒子滤波 (Particle filter, PF)^[2] 等. 这些方法的实质均是在对过程误差和观测误差作概率化假设的基础上, 利用所有可获取的测量来构造待估计状态的后验密度分布. 然而, 在很多实际应用中, 过程噪声和传感器噪声的先验知识往往是不充分且不能精确确定的, 从而导致其概率分布假设 (例如 Kalman 滤波需要高斯分布假设) 很难得到满足, 尤其是噪声本身为非高斯、非白噪声或有偏噪声的情形. 此外, 实际系统的非线性特征会严重降低上述滤波方法的估计性能^[3]. 有鉴于此, 基于确定性噪声假设的集员 (Set membership) 滤波方法往往被视为一种较概率化滤波器具有更好可行性的替代方案.

与概率滤波方法相比, 集员滤波 (Set membership filter, SMF) 所存在的唯一假设就是过程噪声

收稿日期 2011-10-19 录用日期 2012-09-14
Manuscript received October 19, 2011; accepted September 14, 2012

国家自然科学基金 (61005092, 61105094), 教育部博士点新教师基金资助 (20100092120026)

Supported by National Natural Science Foundation of China (61005092, 61105094) and Doctoral Program Foundation of Institutions of High Education of China (20100092120026)

本文责任编辑 方海涛

Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao

1. 复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室 (东南大学自动化学院) 南京 210096

1. Key Laboratory of Measurement and Control of Control Systems Engineering (School of Automation, Southeast University), Ministry of Education, Nanjing 210096

该文的英文版同时发表在 *Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 2, pp. 150-158, 2013.

和观测噪声是未知但有界的 (Unknown-but-bounded, UBB), 这一点在实际系统中通常能够得到保证. 此外, 集员滤波框架中估计得到的是状态变量的可行集而不是后验概率密度, 该可行解集由与系统模型、初始状态和 UBB 噪声假设相一致的所有状态点构成, 即可以获得估计状态的严格不确定边界约束, 有利于与后继的控制和规划问题的结合. 集员滤波的这种保证估计特性能够大大提高整体系统的稳定性、鲁棒性和可靠性, 从而可广泛应用于如机器人定位与地图创建^[4-6]、神经网络训练^[7]、故障诊断^[8-9] 等诸多控制领域.

集员滤波方法的一个关键问题是如何描述真实可行集的复杂形状. 一种比较常用的方法是采用例如椭球^[10-11]、区间^[12]、超平行体^[13-14]、全对称多胞形^[15-16] 等规则的几何集合来近似实际可行集, 以降低算法的计算复杂度. 其中, 椭球近似方法由于其仿射变换下的不变性、包络矩阵的协方差意义以及便于优化等特点而获得了广泛的应用^[17]. 早期的椭球集员滤波研究由 Schweppe 等^[18] 和 Bertsekas 等^[19] 提出, 但没有考虑椭球的优化问题. 在此基础上, 以椭球迹或体积最小化为优化准则的椭球定界算法研究拓展了集员滤波方法的应用领域^[20-23]. 然而, 相对于已经较为完善的线性集员滤波方法而言, 针对非线性系统的集员滤波研究由于可行集在非线形变换下的复杂性一直没有很大的进展. 一些学者提出了类似 EKF 的通过线性化技术扩展得到的非线性集员滤波方法^[5, 24], 但这些方法需要预先给定线性化误差的不确定性范围, 其实用性受到限制. 其他可行的非线性处理方法包括采用区间分析计算线性化误差边界的扩展集员滤波方法 (Extended SMF, ESMF) 等^[25], 然而与线性集员滤波方法相比该算法的稳定性和收敛性均大大降低, 同时计算量也大为增加.

本文提出了一种新的基于 UBB 噪声假设的非线性集员滤波方法来解决非线性系统的状态估计和定界问题, 通过对算法的计算复杂度和保守性的综合考虑, 来寻求估计精度和实时性之间的平衡. 本算法在对原系统作与上文类似的线性化处理之后, 采用来自凸优化领域的 DC (Difference of convex) 规划方法^[26] 对线性化误差进行定界, 其优点在于在没有增加计算量的同时获得了线性化误差的紧致边界; 在此基础上采用预测-更新步骤来计算待估计状态的可行集, 通过引入具有更好的优化性和计算效率的椭球直和计算方法以及椭球-带交集计算方法来降低整体算法的复杂性, 使之更适合于实际应用.

1 问题描述

考虑如下形式的非线性离散时间系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^m$ 分别是在采样时刻 k 的状态变量和观测变量; $\mathbf{f}(\cdot)$ 和 $\mathbf{h}(\cdot)$ 是已知的非线性二阶可导函数; $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^m$ 表示随时间变化的过程噪声和测量噪声, 并且满足以下假设.

假设 1. 噪声项 \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 为满足如下边界条件的未知但有界 (UBB) 噪声:

$$\begin{cases} |w_{k,i}| \leq \varepsilon_{k,i}^w, & i = 1, 2, \dots, n \\ |v_{k,j}| \leq \varepsilon_{k,j}^v, & j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2)$$

或者记为如下的范数形式:

$$\|\mathbf{w}_k\|_\infty^w \leq 1, \quad \|\mathbf{v}_k\|_\infty^v \leq 1 \quad (3)$$

其中, $w_{k,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 和 $v_{k,j}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) 分别是噪声 \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 的各个分量; $\varepsilon_{k,i}^w$ 和 $\varepsilon_{k,j}^v$ 是已知的正常数; n 维矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 的 α 加权 l_∞ 范数定义为 $\|\boldsymbol{\beta}\|_\infty^\alpha = \max_{i=1,2,\dots,n} |\beta_i/\alpha_i|$. 注意这里定义的边界本身是时变的. 在许多应用中, UBB 噪音假设往往比概率化假设更切合实际, 其边界可通过综合考虑系统模型、驱动器和传感器等实际物理因素来确定.

此外, 对系统的初始状态假设如下.

假设 2. 假定系统的初始状态 \mathbf{x}_0 属于一个已知的有界集 $\mathbf{x}_0 \in X_0$, 其中, X_0 可以通过状态的先验知识来确定.

根据上述假设, 集员滤波中计算的状态可行集定义如下.

定义 1. 对于给定的测量序列 $\mathbf{y}_{1:k} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$, 在 k 时刻状态 \mathbf{x}_k 的可行集 X_k 由所有可能的状态点组成, 这些状态点与所有可获得的信息, 包括系统模型 (1)、噪声假设 (2) 和初始状态集 X_0 等相一致.

与经典的 Kalman 滤波方法类似, 集员滤波算法可分为如下的预测和更新 (或称校正) 两个步骤.

步骤 1 (预测). k 时刻状态的预测集 $X_{k,k-1}$ 通过过程模型和过程噪声假设计算得到:

$$\begin{aligned} X_{k,k-1} &= \mathbf{f}(X_{k-1}) \oplus W_k = \\ & \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k \mid \mathbf{x}_{k-1} \in X_{k-1}, \mathbf{w}_k \in W_k \} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, X_{k-1} 是 $k-1$ 时刻的状态可行集; W_k 是由假设 2 定义的过程噪声 \mathbf{w}_k 的不确定集.

步骤 2 (更新). 根据测量值 \mathbf{y}_k 可定义观测集如下:

$$S_k = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x})\|_\infty^v \leq 1 \right\} \quad (5)$$

则 k 时刻的状态可行集 X_k 可计算为

$$X_k = X_{k,k-1} \cap S_k \quad (6)$$

如上述所言, 真实可行集的形状往往极为复杂, 有时甚至是非凸或非连通的, 而求解过程中存在的非线性变换更加剧了算法的复杂度, 从而导致理想的集员滤波器难以在实际中得到应用. 一种比较常用的解决方案是采用规则集合外包来逼近真实可行集的近似方法. 本文中 will 选择计算量较小的椭球集来近似可行集.

定义 2. 一个 n 维椭球 $E(\mathbf{a}, P)$ 的定义为

$$E(\mathbf{a}, P) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T P^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 1 \right\} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ 为椭球的中心; $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为确定椭球形状的包络矩阵, 且满足对称正定性. 椭球 $E(\mathbf{a}, P)$ 的几何尺寸量度通常用体积来表示, 它与 $\det(P)$ 成比例; 或者用半轴长度的平方和表示, 由包络矩阵 P 的迹 $\text{tr}(P)$ 给出.

定义 3. 一个 n 维区间矢量 (Interval vector) 或者轴对齐盒 (Axis-aligned box) 可定义为

$$[\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max}] = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid x_{i,\min} \leq x_i \leq x_{i,\max} \right\} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{x}_{\min} = (x_{1,\min}, x_{2,\min}, \dots, x_{n,\min})^T$ 和 $\mathbf{x}_{\max} = (x_{1,\max}, x_{2,\max}, \dots, x_{n,\max})^T$ 分别是区间矢量的下边界和上边界. 可将区间矢量重写为如下形式:

$$B(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{a} + \text{diag}\{\mathbf{r}\} \mathbf{z}, \|\mathbf{z}\|_{\infty} \leq 1 \right\} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{a} = (\mathbf{x}_{\min} + \mathbf{x}_{\max})/2$ 表示区间矢量的中心; $\mathbf{r} = (\mathbf{x}_{\max} - \mathbf{x}_{\min})/2$ 表示区间矢量的宽度, 它定义了区间边界的大小.

定义 4. 一个 n 维超平行体可定义为

$$P(\mathbf{a}, T) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{a} + T\mathbf{z}, \|\mathbf{z}\|_{\infty} \leq 1 \right\} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{a} = (\mathbf{x}_{\min} + \mathbf{x}_{\max})/2$ 为超平行体的中心; $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为一个非奇异矩阵, 其各列定义了超平行体的边界.

2 基于定界椭球的非线性集员滤波

在本节中, 针对非线性系统的状态估计问题提出了一种新的基于定界椭球的集员滤波算法. 该算法的主要思想类似于 EKF 算法, 首先, 对非线性模型进行线性化, 然后, 将包含预测-校正步骤的线性集员滤波直接用于所得到的线性化系统. 本集员滤波算法与 EKF 的区别在于不能简单忽略线性化误差, 而是需要将其带来的不确定性补偿到最终的可行集中, 保证集员滤波算法的鲁棒性本质.

非线性集员滤波算法的实现需要考虑三个问题:

1) 如何计算线性化误差的不确定性边界. 常用的方法包括对其进行明确的假设或者采用区间分析的方法直接计算, 其中前者在实际中难以得到满足, 而后

者会增加算法的计算复杂性和保守性, 有时甚至会降低算法的稳定性. 本文引入 DC 规划方法 (详见文献 [16, 26]) 来优化获得每个采样时刻线性化误差的保证边界, 由于充分利用了系统的非线性结构特征, DC 规划通常可以用较少的计算复杂度获得更为紧致的边界估计, 从而降低了算法保守性; 2) 如何将线性化误差和过程噪声融合到状态预测步骤. 该问题的实质是多个椭球的直和 (即 Minkowski 和) 计算. 本文采用了最优椭球迹准则的显式次优解, 从而使算法的计算复杂度大为降低; 3) 在更新步骤中预测集和观测集交集计算的最优解往往难于直接获得, 而数值计算方法则会增加算法的复杂度而不适合实时应用. 本文由此提出了一种迭代最优定界椭球算法, 以椭球-带迭代求交集进行逼近的方式来完成更新步骤. 本文所提出的非线性集员滤波算法的具体算法步骤如下:

首先假设初始状态集合 X_0 为椭球描述形式, 即 $\mathbf{x}_0 \in E(\hat{\mathbf{x}}_0, P_0)$, 并且假定前一步估计得到的状态 \mathbf{x}_k 的可行集为 $E(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, P_{k-1})$.

2.1 线性化误差定界

在当前状态点 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$, 原系统的非线性过程模型可以线性化为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + A_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{e}_k = \mathbf{f}_L(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{e}_k \quad (11)$$

其中, $A_k = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{k-1}} \right) \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ 是函数 \mathbf{f} 的 Jacobean 矩阵; \mathbf{e}_k 是线性化误差. 这里为了推导方便, 首先假设 \mathbf{f} 是一个实值函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. 对于实际为矢量形式的函数 $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, 即 $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_m]^T$, 其中 $f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 是 \mathbf{f} 的分量, 则需要将每个 f_i 作序列化处理.

定义 5. 实值函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为凸集 S 上的 DC 函数, 即存在两个凸函数 g_1 和 g_2 使 $f(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x})$. 这里 g_1 和 g_2 为集合 S 上的凸函数的含义是 $\nabla^2 g_i(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \right) g_i(\mathbf{x}) \geq 0$ ($i = 1, 2$), $\mathbf{x} \in S$, 其中符号 “ \geq ” 对于 $n > 1$ 的高维函数 f 应理解为半正定的.

应当指出, 上述 f 的凸假设可以很容易得到满足, 因为 f 是二阶连续可导函数, 而每一个连续函数都可以通过 DC 函数以任意精度逼近. 此外, f 的 DC 形式总是可以得到, 如在椭球可行集中假设 $\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \right) f(\mathbf{x}) \geq -2\alpha I$, $\alpha \geq 0$, 选取 $g_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ 和 $g_2(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ 即可构成 DC 表示形式^[26]. 关于 DC 规划更多详细内容可以参考文献 [16, 26].

函数 g_1 和 g_2 在当前状态估计点 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 的次梯

度可计算为

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial g_1(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{u}_2 = \frac{\partial g_2(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} \quad (12)$$

则满足下面的约束:

$$g_1(\mathbf{x}_{k-1}) \geq g_1(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{u}_1^T(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (13)$$

$$g_2(\mathbf{x}_{k-1}) \geq g_2(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{u}_2^T(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (14)$$

其中, 上面两式右边的线性函数(分别定义为 \bar{g}_1 和 \bar{g}_2) 称为 g_1 和 g_2 的弱函数. 由此线性化误差 $e_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) - f_L(\mathbf{x}_{k-1}) = g_1(\mathbf{x}_{k-1}) - g_2(\mathbf{x}_{k-1}) - f_L(\mathbf{x}_{k-1})$ 的定界问题可通过 DC 规划方法来求取近似解. 注意根据式 (13) 和式 (14) 有 $\bar{g}_1 - g_2 - f_L$ 是凹函数, $g_1 - \bar{g}_2 - f_L$ 是凸函数, 则有 e_k 的取值范围为

$$\left[\min_{\mathbf{x}_{k-1} \in V_S} \{\bar{g}_1(\mathbf{x}_{k-1}) - g_2(\mathbf{x}_{k-1}) - f_L(\mathbf{x}_{k-1})\}, \max_{\mathbf{x}_{k-1} \in V_S} \{g_1(\mathbf{x}_{k-1}) - \bar{g}_2(\mathbf{x}_{k-1}) - f_L(\mathbf{x}_{k-1})\} \right] \quad (15)$$

其中, 符号 V_S 表示凸集合 S 中所有顶点的集合. 上面的等式仅代表 f 为实值函数的情形. 对向量函数则需逐一考虑和计算 f 的分量 f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 以获得 e_k 每个分量的区间. 此外, 对椭球可行集 $E(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, P_{k-1})$, 顶点集合 V_E 由它的边界点组成, 因此, 式 (15) 的计算转化为两个半正定规划 (Semidefinite problem, SDP) 的问题, 从而可采用内点法等优化方法加以解决^[27].

为了进一步减小计算量, 本文采用带有限个顶点的外包盒来逼近椭球体以对式 (15) 进行计算. 需要注意的是, 外包盒的选择并不是唯一的, 例如可以选取轴对齐包围盒 (Axis-aligned bounding box, AABB) $B(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{r})$, 其中 $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^n$ 为椭球的半长轴矢量. 下面的定理将表明, 存在一个最小体积的椭球外包有向包围盒 (Oriented bounding box, OBB) 可供选取近似.

定理 1. 椭球 $E(\mathbf{a}, P)$ 的最小体积外包盒即为一个所有边与椭球相切且同时平行于该椭球各轴的有向包围盒.

证明. 容易验证为使最小体积 OBB 的体积尽可能的小, 其边界应该与椭球的边界相切. 考虑椭球可通过一个欧氏空间中的单位球仿射变换得到:

$$E(\mathbf{a}, P) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{a} + H\mathbf{z}, \|\mathbf{z}\|_2 \leq 1\} \quad (16)$$

其中, $\|\cdot\|_2$ 定义为 l_2 欧氏范数; $H = UD^{1/2}$ 为正定对称矩阵 P 进行奇异值分解 (Singular value decomposition, SVD) $P = UDU^T = HH^T$ 后得到的一个平方根, 其中, U 为单位上三角阵, D 为对角阵. 在该仿射变换下, 椭球的所有 OBB 均为单位球的外

包且相切的超平行体转化得到, 而其中边平行于椭球轴的 OBB 将被视为由原单位球的外包 AABB 转化而来. 图 1 给出 $n = 2$ 时, 将 F_1 下单位球转换为 F_2 下的椭球的示例.

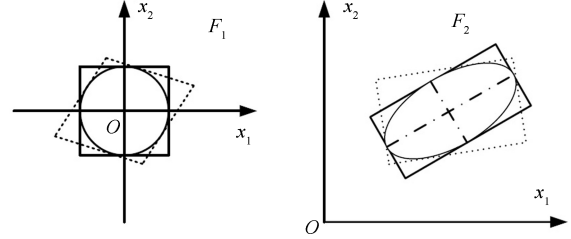


图 1 椭球的仿射变换

Fig. 1 Affine transformation of ellipsoid

容易推出在仿射变换下, F_2 中 OBB 的体积为 F_1 中相应超平行体伸缩 $\det(H)$ 倍得到. 由于在 F_1 中最小体积的椭球外包超平行体为体积等于 2^n 的单位 AABB, 从而在 F_2 中转换得到的最小体积 OBB 应满足:

$$\min V_{\text{OBB}} = 2^n \det(H) = 2^n \sqrt{\det(P)} \quad (17)$$

则可以推出由 F_1 中单位 AABB 转换而来的边与椭球相切且平行于椭球轴的 OBB 为具有最小体积的椭球外包盒. \square

根据定理 1, 椭球 $E(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, P_{k-1})$ 的最小体积外包盒即为 $B(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, H_{k-1})$, 其顶点集记为 V_B , 其中 H_{k-1} 为 P_{k-1} 的平方根. 由此式 (15) 的 DC 规划问题可通过考虑此包围盒顶点集 V_B 中 $2n$ 个顶点即可实现, 从而以区间矢量形式给出线性化误差的边界为 $e_k \in [e_{k,\min}, e_{k,\max}]$, 或者 $B(\mathbf{a}_e, \mathbf{r}_e)$, 其中 $\mathbf{a}_e = (e_{k,\min} + e_{k,\max})/2$, $\mathbf{r}_e = (e_{k,\max} - e_{k,\min})/2$. 本文所采用的 DC 规划方法在精度方面可提供线性化误差的二阶近似结果, 并可在计算复杂度与保守性间保持良好的平衡.

2.2 状态预测

本步骤中将计算得到式 (3) 中的 k 时刻状态预测集 $X_{k,k-1}$. 非线性过程模型 (11) 经过线性化可转化为如下形式:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_L(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k \quad (18)$$

上式表明, 状态预测集是通过三个集合的直和计算得到的: 由线性函数 \mathbf{f}_L 得到的 $E(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, P_{k-1})$ 的仿射变换集, 线性化误差 \mathbf{e}_k 的外包定界区间矢量 $B(\mathbf{a}_e, \mathbf{r}_e)$ 和过程噪声 \mathbf{w}_k 的不确定集 $B(\mathbf{0}, \mathbf{r}_w)$, 其中如式 (2) 中的假设有 $\mathbf{r}_w = [\varepsilon_{k,1}^w, \varepsilon_{k,2}^w, \dots, \varepsilon_{k,n}^w]^T$. 这三个集合的计算分别如下.

首先, 通过仿射变换 \mathbf{f}_L , 原椭球 $E(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, P_{k-1})$ 将转换成一个新的椭球 $E(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}), A_k P_{k-1} A_k^T)$.

而对于线性化误差和过程噪声的不确定集, 通过定义辅助变量 $\mathbf{w}_k^a = \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k$, 根据区间矢量的直和计算可将两者合并为

$$\mathbf{w}_k^a \in B(\mathbf{a}_e, \mathbf{r}_e) \oplus B(\mathbf{0}, \mathbf{r}_w) = B(\mathbf{a}_e, \mathbf{r}_e + \mathbf{r}_w) \quad (19)$$

由此集员滤波的预测步骤 (3) 将转化为求椭球 $E(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}), A_k P_{k-1} A_k^T)$ 和区间矢量 $B(\mathbf{a}_e, \mathbf{r}_e + \mathbf{r}_w)$ 的直和计算. 通常情况下, 该问题并不存在规范的几何解集. 为了算法的可行性, 并与本文采用的椭球近似保持一致, 可根据如下定理先将区间矢量 $B(\mathbf{a}_e, \mathbf{r}_e + \mathbf{r}_w)$ 采用外包椭球来逼近.

定理 2. 对中心为 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \in \mathbf{R}^n$, 边界为 $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 的区间矢量 (或轴对齐盒) $B(\mathbf{a}, \mathbf{r})$, 其最小体积外包椭球 $E(\mathbf{c}, P)$ 可以选取为

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}, \quad P = n \text{diag}\{\mathbf{r}^T \mathbf{r}\} \quad (20)$$

证明. 由对称性易证明该区间矢量外包椭球的中心应选择为区间矢量的中心, 即 $\mathbf{c} = \mathbf{a}$. 假设区间矢量的外包椭球的形式为 $E(\mathbf{a}, P)$, 且有 $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $P = \text{diag}\{b_1^2, b_2^2, \dots, b_n^2\}$, 其中 $b_i > 0$ 表示半轴长度. 寻找最小体积外包椭球就转化为如下的 SDP 问题

$$\begin{aligned} \min \det(P) &= \prod_{i=1}^n b_i \\ \text{s. t. } b_i > 0, \quad \mathbf{r}^T P^{-1} \mathbf{r} &= \sum_{i=1}^n b_i^{-2} r_i^2 = 1 \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $\det(P)$ 与椭球的体积成正比; 约束条件为令椭球包住区间矢量的边界条件. 为了解决这个带约束的优化问题, 定义如下 Lagrange 函数:

$$L = \prod_{i=1}^n b_i + \lambda \sum_{i=1}^n b_i^{-2} r_i^2 \quad (22)$$

并令 $\frac{\partial L}{\partial b_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 得:

$$b_i = n^{\frac{1}{2}} r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

从而得到式 (20) 形式的最小体积外包椭球. \square

根据定理 2, 区间矢量 $B(\mathbf{a}_e, \mathbf{r}_e)$ 可近似为外包椭球 $E(\mathbf{a}_a, P_a)$, 其中, $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e$, $P_a = n \text{diag}\{(\mathbf{r}_e + \mathbf{r}_w)^T (\mathbf{r}_e + \mathbf{r}_w)\}$, 从而将预测状态集的计算转化为两个椭球集 $E(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}), A_k P_{k-1} A_k^T)$ 和 $E(\mathbf{a}_a, P_a)$ 的直和计算. 然而, 所得预测集仍不一定为椭球, 但可构造一个外包椭球 $E(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}, P_{k,k-1})$ 来近似^[22]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{a}_a, \quad P_{k,k-1} = \frac{A_k P_{k-1} A_k^T}{1 - \beta_k} + \frac{P_a}{\beta_k} \quad (24)$$

其中, $0 \leq \beta_k < 1$ 为带选择的滤波器参数, 可以通过优化该参数以减小所得椭球尺寸, 即降低算法的保守性. 其中, $\beta_k = 0$ 对应于无噪声的情况, 此时 $P_{k-1,k} = A_k P_{k-1} A_k^T$. 对于一般情况可选择最小迹优化准则来计算 β_k , 从而可得到封闭形式的解, 降低算法的计算量, 并使其具有更好的鲁棒性. 相应的最优 β_k 为

$$\beta_k = \frac{\sqrt{\text{tr}(P_a)}}{\sqrt{\text{tr}(A_k P_{k-1} A_k^T) + \sqrt{\text{tr}(P_a)}}} \quad (25)$$

通过定理 2 中所描述的椭球来近似区间矢量, 预测集的计算转化为两个椭球的直和计算. 由此可得到外包椭球近似的显式形式, 从而使得算法计算复杂度大大降低, 且能够与本文所采用的椭球可行集形式保持一致.

2.3 测量更新

测量更新步骤是通过求预测椭球集 $E(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}, P_{k,k-1})$ 和式 (4) 中根据测量值得到的观测集 S_k 的交集来计算 k 时刻状态 X_k 的可行集. 然而, 由于非线性变换 \mathbf{h} 下 S_k 的形状通常比较复杂, 且不能用规则的几何集来表示. 从而使得两者的交集难以直接计算. 本文提出了一种迭代外定界椭球算法, 对观测集采用带进行近似, 并与序列更新策略相结合, 从而使得算法可行且计算量较小. 为了实现该算法, 首先需要以类似于状态预测的方式将线性化和 DC 规划过程应用到观测模型. 观测方程 \mathbf{h} 在预测状态 $\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}$ 处线性化得到:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}) + C_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}) + \mathbf{o}_k \quad (26)$$

其中, $C_k = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\right) \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1})$ 为 \mathbf{h} 的 Jacobian 矩阵; \mathbf{o}_k 为线性化误差. 通过 DC 规划和定理 1 可推得外包线性化误差 \mathbf{o}_k 的区间矢量 $B(\mathbf{a}_o, \mathbf{r}_o)$, 然后, 定义辅助变量 $\mathbf{v}_k^a = \mathbf{o}_k + \mathbf{v}_k$, 计算 \mathbf{o}_k 和测量噪声 \mathbf{v}_k 这两个区间矢量的直和以将它们合并:

$$\mathbf{v}_k^a \in B(\mathbf{a}_o, \mathbf{r}_o) \oplus B(\mathbf{0}, \mathbf{r}_v) = B(\mathbf{a}_o, \mathbf{r}_o + \mathbf{r}_v) \quad (27)$$

其中, $\mathbf{r}_v = [\varepsilon_{k,1}^v, \varepsilon_{k,2}^v, \dots, \varepsilon_{k,m}^v]^T$ 为式 (2) 中所假设的测量噪声边界.

根据上述步骤, 式 (5) 中观测集 S_k 可重写为

$$\left\{ \mathbf{x} \left\| \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}) + C_k (\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} - \mathbf{x}) \right\|_{\infty}^{\mathbf{r}_o + \mathbf{r}_v} \leq 1 \right\} \quad (28)$$

上式可以视为 n 个独立的带 (Strip) 的交集:

$$\bigcap_{i=1}^m S_{k,i} = \bigcap_{i=1}^m \left\{ \mathbf{x} \left\| \mathbf{y}_{k,i}^a - C_{k,i} \mathbf{x} \right\| \leq r_i^a \right\} \quad (29)$$

其中, $\mathbf{y}_{k,i}^a$ 和 r_i^a ($i = 1, 2, \dots, m$) 分别为 $\mathbf{y}_k^a = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}) + C_k \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}$ 和 $\mathbf{r}_o + \mathbf{r}_k$ 的分量;

$\mathbf{C}_{k,i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 为 C_k 的行向量. 从而可得可行集 X_k 为

$$X_k = E(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}, P_{k,k-1}) \cap (\cap_{i=1}^n S_{k,i}) \quad (30)$$

注意观测集 S_k 通常是一个多面体, 因此难以直接计算式 (30) 的交集. 一种替代方法是采用序列更新的方法将式 (30) 进行迭代处理, 转化为 m 次椭球和带的交集计算. 文献 [20] 中给出了一种针对标量观测的椭球和带交集计算的最小体积外定界椭球算法 (Out-bounding ellipsoid, OBE). 本文中通过序列更新方法将其扩展到矢量化观测情形, 给出了一种迭代化 OBE 算法, 具体描述如下.

迭代初始化为

$$\hat{\mathbf{x}}_k^0 = \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}, \quad P_k^0 = P_{k,k-1} \quad (31)$$

且每一步的中间椭球定义如下:

$$E(\hat{\mathbf{x}}_k^i, P_k^i) \supseteq (E(\hat{\mathbf{x}}_k^{i-1}, P_k^{i-1}) \cap S_{k,i}) \quad (32)$$

对于 $i = 1, 2, \dots, m$, 从中心 $\hat{\mathbf{x}}_k^{i-1}$ 到每个超平面的归一化距离计算如下:

$$\alpha_{k,i}^+ = \frac{y_{k,i}^a - \mathbf{C}_{k,i} \hat{\mathbf{x}}_k^{i-1} + r_i^a}{\sqrt{\mathbf{C}_{k,i} P_k^{i-1} \mathbf{C}_{k,i}^T}} \quad (33)$$

$$\alpha_{k,i}^- = \frac{y_{k,i}^a - \mathbf{C}_{k,i} \hat{\mathbf{x}}_k^{i-1} - r_i^a}{\sqrt{\mathbf{C}_{k,i} P_k^{i-1} \mathbf{C}_{k,i}^T}} \quad (34)$$

如果 $\alpha_{k,i}^+ < -1$ 或 $\alpha_{k,i}^- > 1$, 则可以推出当前中间椭球 $E(\hat{\mathbf{x}}_k^{i-1}, P_k^{i-1})$ 与 $S_{k,i}$ 并没有交集, 这表示可行集 X_k 是空集. 此时当前迭代结束, 预测椭球作为本时刻的估计可行集, 即

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}, \quad P_k = P_{k,k-1} \quad (35)$$

如果 $\alpha_{k,i}^+ > -1$ 且 $\alpha_{k,i}^- < 1$, 则椭球与带之间的交集不为空. 此时应当进行超平面收缩处理以保证其与椭球相交, 从而减小所得交集椭球的体积:

$$\alpha_{k,i}^+ = \min(\alpha_{k,i}^+, 1), \quad \alpha_{k,i}^- = \max(\alpha_{k,i}^-, -1) \quad (36)$$

如果 $\alpha_{k,i}^+ \alpha_{k,i}^- \leq -1/n$, 则有 $\hat{\mathbf{x}}_k^i = \hat{\mathbf{x}}_k^{i-1}$, $P_k^i = P_k^{i-1}$. 否则:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^i = \hat{\mathbf{x}}_k^{i-1} + \lambda_i \frac{S_k^i \mathbf{C}_{k,i}^T e_i}{d_i^2} \quad (37)$$

$$P_k^i = \left(1 + \lambda_i - \frac{\lambda_i e_i^2}{d_i^2 + \lambda_i g_i}\right) S_k^i \quad (38)$$

其中

$$S_k^i = P_k^{i-1} - \frac{\lambda_i}{d_i^2 + \lambda_i g_i} P_k^{i-1} \mathbf{C}_{k,i}^T \mathbf{C}_{k,i} P_k^{i-1} \quad (39)$$

参数 e_i 、 d_i 、 g_i 的计算如下:

$$e_i = \sqrt{g_i} \left(\frac{\alpha_{k,i}^+ + \alpha_{k,i}^-}{2} \right) \quad (40)$$

$$d_i = \sqrt{g_i} \left(\frac{\alpha_{k,i}^+ - \alpha_{k,i}^-}{2} \right) \quad (41)$$

$$g_i = \mathbf{C}_{k,i} P_k^{i-1} \mathbf{C}_{k,i}^T \quad (42)$$

其中, λ_k 取下式的正根以使得到的椭球体积最小:

$$(n-1)g_i^2 \lambda_i^2 + ((2n-1)d_i^2 - g_i + e_i^2)g_i \lambda_i + (n(d_i^2 - e_i^2) - g_i)d_i^2 = 0 \quad (43)$$

最终有

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^m, \quad P_k = P_k^m \quad (44)$$

需要注意的是, 迭代交集的计算过程和中间椭球的近似操作表明本文提出的算法不是最优而是次优的. 然而, 相对于直接计算式 (5), 本文所提出的算法简单可行, 且能够极大地改进算法的实时性.

相较现有方法, 本文提出的非线性集员滤波方法从三个方面来有效地解决了实时性和保守性之间的平衡问题, 使之更适合于实时应用: 首先, 引入优化领域的 DC 规划方法取代广泛使用的区间分析方法来确定非线性方程余子项的不确定性边界, 从而在提高实时性的同时仍能保持甚至降低算法的保守性, 如文献 [16, 26] 所述; 其次, 通过计算两个包围盒的直和并将线性化误差合并到噪声中, 然后, 由外包定界椭球进行近似, 从而将状态估计问题转化为椭球直和问题, 定理 1 和定理 2 表明这种处理手段能够很大程度地降低了算法的保守性; 最后, 通过提出一种迭代的外包定界椭球 (OBE) 算法来计算外包椭球-带的交集的最小体积椭球, 这种次优处理相对于直接计算式 (5) 能大大减少计算负担.

此外, 其他的一些改进措施也能够结合到本文所提出的算法之中, 以进一步提高滤波器的性能. 例如, 包络矩阵采用其方根或 UD 分解形式进行迭代计算可以改善算法的稳定性, 采用选择更新策略可用于改善算法的实时性等^[28].

2.4 算法总结

本文提出的非线性集员滤波算法可总结如下:

步骤 1. 如式 (11) 和式 (26) 所示, 在当前状态估计点对系统模型进行线性化, 采用 DC 规划方法并结合定理 1, 用如式 (15) 所示的区间矢量确定线性化误差边界;

步骤 2. 通过计算两个区间矢量的直和, 将线性化误差融合到系统噪声中, 如式 (19) 和式 (27) 所示;

步骤 3. 应用定理 2 计算步骤 2 中得到的过程模型误差所对应区间矢量的外包椭球, 然后, 根据式 (24) 计算两椭球的直和得到预测状态集;

步骤 4. 采用迭代外包定界椭球 (OBE) 算法对矢量观测进行序列化处理, 每一步迭代过程中需要计算椭球-带的交集, 从而最终得到本时刻的状态可行集估计, 如式 (31)~式 (44) 所示.

3 仿真验证

本节给出一个非线性估计实例以证明本文所提出算法的有效性. 所采用的非线性模型为式 (45) 所示的 Duffing 方程的离散时间状态空间形式^[25].

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k-1} + \Delta T x_{2,k-1} \\ x_{2,k-1} + \Delta T \left(-k_0 x_{1,k-1} (1 + k_d x_{1,k-1}^2) - c x_{2,k-1} \right) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_k \quad (45)$$

上述非线性模型能描述一些非常典型的物理过程, 例如非线性电路以及 Mass-spring 等. 需要注意的是该系统的非线性只依赖于 $x_{1,k}$.

观测方程假设为

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_k \quad (46)$$

模型中参数选择如下: $\Delta T = 0.1 \text{ s}$; $k_0 = 1.5$; $k_d = 3$; $c = 1.24$; 总仿真时间为 7s; 真实的初始状态设为 $\mathbf{x}_0 = [0.2, 0.3]^T$, 同时设初始状态可行集为 $E(\hat{\mathbf{x}}_0, P_0)$, 其中, $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0.2, 0.3]^T$, $P_0 = \text{diag}\{0.01, 0.01\}$; 过程噪声 \mathbf{w}_k 与观测噪声 v_k 分别假设为边界为 $|w_{k,i}| \leq 0.002 (i = 1, 2)$ 和 $|v_k| \leq 0.001$ 的均匀噪声. 仿真中将把本文提出的算法与文献 [25] 中提出的针对在线应用的 ESMF 算法进行比较. 在 ESMF 算法中线性化误差由区间计算确定边界, 并且预测-更新步骤中椭球和与交集的参数最优化采用的数值算法近似. 单次仿真结果如图 2~图 6 中所示. 此外, 表 1 中列出了两种算法超过 20 次仿真的平均结果比较. 为了避免受初始条件的影响, 所有计算中排除了 $k \leq 10$ 时的结果.

图 2 给出了两种算法的状态轨迹估计结果, 从图 2 中可以看出这两种滤波器都能很好地跟踪真实轨迹值. 图 3 和图 4 比较了两种滤波的状态点和边界估计结果, 注意这里采用可行集的中心来表示状态的点估计结果. 从图 3 中看出, 两种滤波方法的点估计结果均能跟踪真实值, 并且性能相似. 而对于边界估计, 从图 4 中看出两个滤波算法得到的状态边

界均能包含真实值, 然而与 ESMF 算法相比, 本文提出的新算法能够获得更为紧凑的边界, 尤其对状态 x_2 , 新算法的边界位于 ESMF 边界的内部. 这一结论也能从图 5 和图 6 中得到验证, 这两幅图中给出了椭球可行集和对应的体积的比较结果, 并且图 5 中将 $k = 15$ 时的估计结果进行放大以便于观察, 可以看出本算法中的椭球估计集相比 ESMF 体积更小, 从而与图 4 中边界估计结果相一致. 此外, 图 6 表明了本算法得到的椭球可行集体积总是比 ESMF 中的小, 这再一次表明本算法的保守性的改进. 需要注意的是, 仿真中并不能保证在所有的迭代步骤中, 新算法的估计状态边界都能够处于 ESMF 边界之内 (如图 4 中, 对状态 x_1 新算法的边界更窄, 但并没有被 ESMF 的边界包围), 但是在平均意义下, 新算法能够保证保守性的改进, 其定量分析结果如表 1 所示.

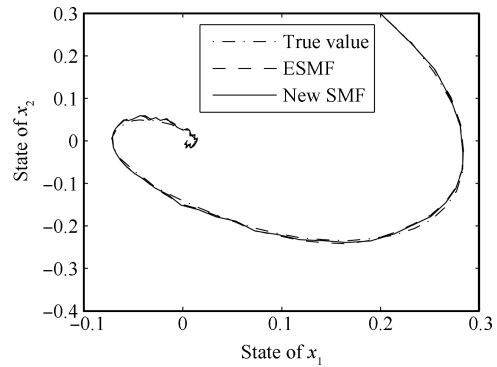


图 2 状态轨迹

Fig. 2 State trajectories

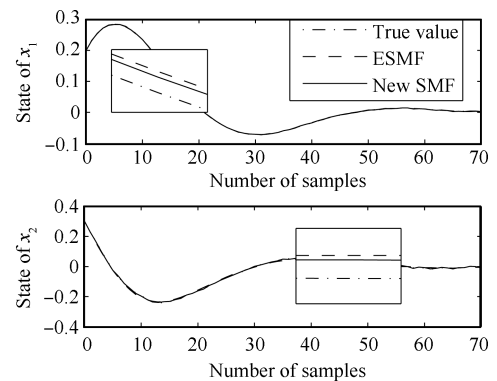


图 3 状态估计

Fig. 3 State estimations

表 1 给出了超过 20 次迭代运行的状态均方差、椭球可行集体积, 以及单步迭代 CPU 时间平均值的定量比较结果. 从表 1 中可以看出, 两种滤波方法得到的状态均方差平均值十分接近, 注意尽管新算法在平均意义下比 ESMF 有所提高, 但并不能保证在所有运行中都能如此, 实际仿真中可以观察到

ESMF 有可能在某个单次运行中更好. 而从体积和 CPU 运行时间的比较可以看出, 新算法的主要优点在于在实时性和保守性方面均有了较大的改进, 这主要是由于本算法采用 DC 规划方法替代区间算法进行线性化误差定界, 以及采用了更好的中间集近似方法以及相应的迭代更新算法.

表 1 ESMF 和新 SMF 性能比较
Table 1 Performance comparison of ESMF and new SMF

	x_1 MSE	x_2 MSE	体积	CPU 时间 (ms)
ESMF	0.0005967	0.004139	0.0005575	3.061
New SMF	0.0005582	0.003393	0.0002760	2.569

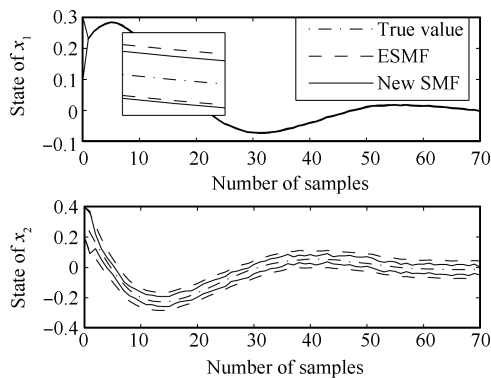


图 4 状态的保证边界

Fig. 4 Guaranteed bounds of states

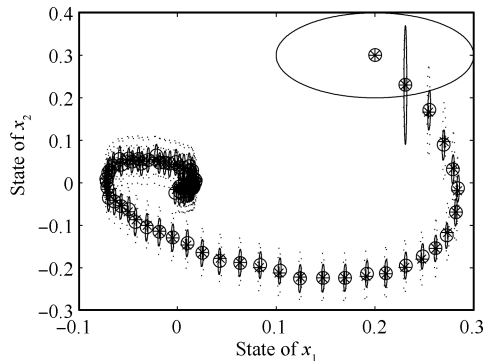


图 5 椭球可行集

Fig. 5 Ellipsoidal feasible set

4 结论

本文提出了一种新的集员滤波方法用于解决系统噪声未知但有界的非线性系统的保证状态估计问题. 首先, 对非线性系统进行了类似 EKF 的线性化处理, 同时考虑了由线性化误差引起的不确定性, 并通过 DC 规划方法确定其边界; 在此基础上通过预测-更新两步过程来计算与测量和噪声边界近似相一致的待估计状态的可行集. 其中, 预测步骤通过计

算椭球的矢量和来完成, 而更新步骤则通过序列化观测更新方法迭代计算椭球和带的交集来实现. 本文所提出的算法在计算复杂度和保守性之间达到一个很好的平衡, 相比现有方法而言更适用于实时应用, 扩展了集员滤波方法的适用范围. 未来的研究工作主要包括探索更好的高性能定界方法, 以及对所提出算法进行实验验证等.

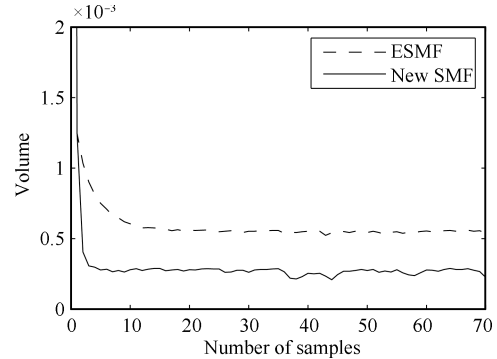


图 6 椭球的体积变化

Fig. 6 Volume evolution of ellipsoids

References

- 1 Bar-Shalom Y, Li X R, Kirubarajan T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. New York: Wiley, 2002. 200–217
- 2 Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, Clapp T. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(2): 174–188
- 3 Einicke G A, White L B. Robust extended Kalman filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(9): 2596–2599
- 4 Di Marco M, Garulli A, Lacroix S, Vicino A. Set membership localization and mapping for autonomous navigation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2001, **11**(7): 709–743
- 5 Calafiore G. Reliable localization using set-valued nonlinear filters. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2005, **35**(2): 189–197
- 6 Jaulin L. A nonlinear set membership approach for the localization and map building of underwater robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 2009, **25**(1): 88–98
- 7 Yu W, De Jesús Rubio J. Recurrent neural networks training with stable bounding ellipsoid algorithm. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2009, **20**(6): 983–991
- 8 Fagarasan I, Ploix S, Gentil S. Causal fault detection and isolation based on a set-membership approach. *Automatica*, 2004, **40**(12): 2099–2110
- 9 Combastel C, Zhang Q H. Robust fault diagnosis based on adaptive estimation and set-membership computations. In: *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical*. Beijing, China: IFAC, 2006. 7314–7319
- 10 Fogel E, Huang Y F. On the value of information in system identification — bounded noise case. *Automatica*, 1982, **18**(2): 229–238

- 11 Kurzhanskiy A A, Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability analysis of discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(1): 26–38
- 12 Kieffer M, Jaulin L, Walter É. Guaranteed recursive nonlinear state bounding using interval analysis. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2006, **16**(3): 193–218
- 13 Chisci L, Garulli A, Zappa G. Recursive state bounding by parallelotopes. *Automatica*, 1996, **32**(7): 1049–1055
- 14 Chisci L, Garulli A, Vicino A, Zappa G. Block recursive parallelotopic bounding in set membership identification. *Automatica*, 1998, **34**(1): 15–22
- 15 Alamo T, Bravo J M, Camacho E F. Guaranteed state estimation by zonotopes. *Automatica*, 2005, **41**(6): 1035–1073
- 16 Alamo T, Bravo J M, Redondo M J, Camacho E F. A set-membership state estimation algorithm based on DC programming. *Automatica*, 2008, **44**(1): 216–224
- 17 Ros L, Sabaster A, Thomas F. An ellipsoidal calculus based on propagation and fuse. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2002, **32**(4): 430–442
- 18 Schweppe F C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, **13**(1): 22–38
- 19 Bertsekas D P, Rhodes I B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, **16**(2): 117–128
- 20 Belforte G, Bona B. An improved parameter identification algorithm for signals with unknown-but-bounded errors. In: *Proceedings of the 7th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation*. York, UK: IFAC, 1985. 1507–1511
- 21 Durieu C, Walter É, Polyak B T. Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2001, **111**(2): 273–303
- 22 Chernousko F L, Rokityanskii D Y. Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2000, **104**(1): 1–19
- 23 Maksarov D G, Norton J P. Computationally efficient algorithms for state estimation with ellipsoidal approximations. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, **16**(6): 411–434
- 24 Shamma J S, Tu K Y. Approximate set-valued observers for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(5): 648–658
- 25 Scholte E, Campell M E. A nonlinear set-membership filter for on-line applications. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, **13**(15): 1337–1358
- 26 Horst R, Thoai N V. DC programming: overview. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1999, **103**(1): 1–43
- 27 Boyd S, Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 561–615
- 28 Zhou B, Han J D, Liu G J. A UD factorization-based nonlinear adaptive set-membership filter for ellipsoidal estimation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, **18**(16): 1513–1531



周波 东南大学自动化学院智能机器人与智能控制研究所讲师。2009 年获得中国科学院沈阳自动化研究所博士学位。主要研究方向为机器人控制, 自主规划和非线性辨识。本文通信作者。

E-mail: zhoubo@seu.edu.cn

(**ZHOU Bo** Lecturer at the Institute of Intelligent Robot and Intelligent Control, School of Automation, Southeast University. He received his Ph.D. degree from Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences in 2009. His research interest covers robot control, autonomous planning methods, and nonlinear identification. Corresponding author of this paper.)



钱堃 东南大学自动化学院智能机器人与智能控制研究所讲师。2010 年获得东南大学自动化学院博士学位。主要研究方向为智能机器人系统和计算机视觉。

E-mail: kqian@seu.edu.cn

(**QIAN Kun** Lecturer at the Institute of Intelligent Robot and Intelligent Control, School of Automation, Southeast University. He received his Ph.D. degree from School of Automation, Southeast University in 2010. His research interest covers intelligent robot system and computer vision.)



马旭东 东南大学自动化学院智能机器人与智能控制研究所教授。1988 年获得清华大学自动化系硕士学位。主要研究方向为计算机控制与管理综合系统, 机器人智能控制, 嵌入式控制器及 DSP 开发。E-mail: xdma@seu.edu.cn

(**MA Xu-Dong** Professor at the Institute of Intelligent Robot and Intelligent Control, School of Automation, Southeast University. He received his master degree from Tsinghua University in 1988. His research interest covers computer control and management system, intelligent robot control, embedded controller, and DSP system application.)



戴先中 东南大学自动化学院智能机器人与智能控制研究所教授。1988 年获得清华大学电子工程博士学位。主要研究方向为电力系统, 人工神经网络, 机器人学, 先进制造系统。

E-mail: xzdai@seu.edu.cn

(**DAI Xian-Zhong** Professor at the Institute of Intelligent Robot and Intelligent Control, School of Automation, Southeast University. He received his Ph.D. degree in electrical engineering from Tsinghua University in 1986. His research interest covers power system, artificial neural networks, robotics, and advanced manufacturing systems.)