

结构化压缩感知研究进展

刘芳^{1,2} 武娇^{1,2,3} 杨淑媛² 焦李成²

摘要 压缩感知 (Compressive sensing, CS) 是一种全新的信息采集与处理的理论框架. 借助信号内在的稀疏性或可压缩性, 可从小规模的线性、非自适应的测量中通过非线性优化的方法重构信号. 结构化压缩感知是在传统压缩感知基础上形成的新的理论框架, 旨在将与数据采集硬件及复杂信号模型相匹配的先验信息引入传统压缩感知, 从而实现对更广泛类型的信号准确有效的重建. 本文围绕压缩感知的三个基本问题, 从结构化测量方法、结构化稀疏表示和结构化信号重构三个方面对结构化压缩感知的基本模型和关键技术进行详细的阐述, 综述了结构化压缩感知的最新的研究成果, 指出结构化压缩感知进一步研究的方向.

关键词 压缩感知, 压缩观测, 稀疏表示, 信号重构, 结构模型

引用格式 刘芳, 武娇, 杨淑媛, 焦李成. 结构化压缩感知研究进展. 自动化学报, 2013, **39**(12): 1980–1995

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.01980

Research Advances on Structured Compressive Sensing

LIU Fang^{1,2} WU Jiao^{1,2,3} YANG Shu-Yuan² JIAO Li-Cheng²

Abstract Compressive sensing (CS) is a newly developed theoretical framework for information acquisition and processing. Using the non-linear optimization methods, the signals can be recovered from fewer linear and non-adaptive measurements by taking advantage of the sparsity or compressibility inherent in real world signals. Structured compressive sensing is a new framework which can treat more general signal classes to achieve the accurate and effective reconstruction in practice by introducing the prior information matching with data acquisition hardware and complicated signal models to traditional compressive sensing. In this paper, the basic models and key techniques of structured compressive sensing are introduced in terms of the structured measurements, the structured dictionary representation and the structured signal reconstruction, which correspond to three basic aspects of compressive sensing, and the recent developments of structured compressive sensing are reviewed in detail. Finally, the current and future challenges of the structured compressive sensing are discussed.

Key words Compressive sensing (CS), compressive measurement, sparse representation, signal reconstruction, structured model

Citation Liu Fang, Wu Jiao, Yang Shu-Yuan, Jiao Li-Cheng. Research advances on structured compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(12): 1980–1995

收稿日期 2012-09-10 录用日期 2013-04-09
Manuscript received September 10, 2012; accepted April 9, 2013
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2013CB329402), 国家自然科学基金 (61072106, 61072108, 61173090, 61272023), 高等学校学科创新引智计划 (111 计划) (B07048), 教育部长江学者和创新团队发展计划 (IRT1170), 国家教育部博士点基金 (20110203110006), 智能感知与图像理解教育部重点实验室开放基金 (IPIU012011002) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB329402), National Natural Science Foundation of China (61072106, 61072108, 61173090, 61272023), Fund for Foreign Scholars in University Research and Teaching Programs (111 Project) (B07048), Program for Cheung Kong Scholars and Innovative Research Team in University (IRT1170), National Research Foundation for the Doctoral Program of Higher Education of China (20110203110006), and the Open Research Fund Program of Key Laboratory of Intelligent Perception and Image Understanding of Ministry of Education of China (IPIU012011002)

本文责任编辑 王聪
Recommended by Associate Editor WANG Cong
1. 西安电子科技大学计算机学院 西安 710071 2. 智能感知与图像理解教育部重点实验室 西安 710071 3. 中国计量学院理学院 杭州 310018

1. School of Computer Science and Technology, Xidian Univer-

新兴的压缩感知 (Compressive sensing, CS) 为信息采集提供了全新的方法. 与传统的 Nyquist 采样相比, CS 以压缩形式 (即低采样率) 直接感知具有稀疏或可压缩性的对象, 而不是先以高速率进行采样, 然后再对数据进行压缩, 因此 CS 为解决传统采样方法面临的高成本、低效率、信息冗余以及数据存储和传输的资源浪费等问题带来了新的契机. CS 领域的研究始于 Candès 等^[1-4] 和 Donoho^[5] 开创性的工作, 他们证明了具有稀疏或可压缩性的有限维信号, 可从小规模的线性、非自适应的测量中使用非线性优化的方法获得恢复. CS 理论一经提出就备受关注, 之后的几年涌现出大量的相关研究, 并在许多工程领域实现了 CS 的应用, 例如欠 Nyquist 采样系统^[6]、压缩成像系统^[7]、压缩传感网络^[8] 等. 最

1. School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an 710071 2. Key Laboratory of Intelligent Perception and Image Understanding of Education, Xidian University, Xi'an 710071 3. College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018

典型的应用例子是在医学成像领域, CS 成像在保持诊断质量的同时将儿科的核磁共振成像 (Nuclear magnetic resonance imaging, NMRI) 的速度提高了 7 倍^[9]. 这种基于 CS 理论的新型成像方法, 将对医学成像领域中昂贵的成像器件的设计产生重要的影响.

自 2006 年 CS 理论提出以来, 国际与国内出现了许多 CS 理论与应用研究的课题组和科研机构, 召开了众多相关的研讨会, 并且在 IEEE 的信息论、信号处理及图像处理等国际知名期刊涌现出上百篇涉及 CS 理论与应用方面的文献. 其中一些关于传统 CS 理论的优秀的综述性文献^[1, 10-15] 对 CS 的理论基础、基本问题、研究方法以及 CS 的应用前景进行了详细的介绍. 上述文献指出, 传统 CS 理论是以信号的稀疏性或可压缩性为基础的, 研究的基本内容包括信号的稀疏表示、压缩测量 (采样) 方法设计和信号重构算法设计. 传统 CS 的工作多集中于使用随机测量对有限维的信号进行低速观测, 以信号固有的变换稀疏性作为先验信息来重构信号, 没有考虑时间连续信号的情况和应用 CS 理论所必须的硬件系统. 为此与数据采集硬件系统和复杂信号模型相匹配的先验信息被引入到传统 CS, 这些先验信息在 CS 中的应用主要表现在三个方面: 1) 结构化的测量方法, 即传统 CS 中的随机测量被与信号相匹配的结构化测量框架所代替; 2) 结构化字典下的表示, 即获得信号低维结构的稀疏表示 (即结构稀疏表示); 3) 结构化的 CS 重构, 即在信号的重构中使用能够对更为广泛类型的信号 (包括无限维信号) 进行描述的结构先验模型. 由此传统 CS 理论得到推广, 逐步形成 CS 的新的理论框架 — 结构化 CS 理论^[16].

本文对新的结构化 CS 理论的研究状况进行综述. 在第 1 节中, 首先概述传统 CS 的数学模型; 其次, 在第 2 节中介绍结构化 CS 中的几种低维结构模型; 在第 3 节中, 围绕 CS 理论的三个基本问题, 对结构化 CS 的相关研究方法进行详细的综述; 最后, 在第 4 节中展望未来的研究方向.

1 传统压缩感知

传统 Nyquist 采样通过均匀采样获取数据, 而 CS 系统则是以信号与观测函数之间的内积的形式来对数据进行采样. 假设信号 $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^N$ 在某个正交字典 $\Psi \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 下具有稀疏表示, 即 $\mathbf{f} = \Psi \mathbf{x}$, 变换系数 \mathbf{x} 是稀疏的, 那么给定与 Ψ 不相关的观测矩阵 $\Theta \in \mathbf{R}^{K \times N} (K \ll N)$, 我们可获得 K 维压缩的线性测量 (投影):

$$\mathbf{y} = \Theta \mathbf{f} \quad (1)$$

这些少量的测量中包含了重构信号 \mathbf{f} 的充足信息.

若令 $\Phi = \Theta \Psi$, 式 (1) 可转化为

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \mathbf{x} \quad (2)$$

Φ 被称为 CS 信息算子.

与压缩采样过程相对的逆问题是从测量 \mathbf{y} 中重构信号 \mathbf{f} . 求解式 (2) 获得变换系数 $\tilde{\mathbf{x}}$, 从而估计 $\tilde{\mathbf{f}}$. 但该问题是欠定的, 具有无穷多个解. CS 理论以 \mathbf{x} 的稀疏性作为约束条件, 大大减少了问题可行解的个数. 这时, 求解式 (2) 是寻找线性系统稀疏解的过程, 一般被称为稀疏逼近 (Sparse approximation)^[17], 出现在诸如统计学、信号处理、机器学习、编码理论和逼近理论等许多领域. CS 重构是稀疏逼近的一种特殊形式.

信号的传统压缩感知过程如图 1 所示, 其中压缩观测、稀疏表示和信号优化重构这三个基本模块是 CS 理论研究的三个重要方向. 信号的稀疏性是 CS 的必备条件, 非相关的观测是 CS 的关键, 非线性优化是 CS 重构信号的手段^[15].

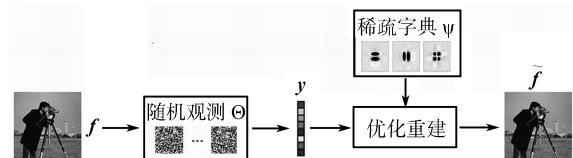


图 1 传统压缩感知框架

Fig. 1 Frame of traditional compressive sensing

2 信号的低维结构模型

一般来说, 包含着先验知识的模型对寻找或处理我们感兴趣的信号是很有帮助的, 而我们研究的信号往往具有各种不同的潜在的低维结构, 也就是说, 高维信号的自由度通常远低于信号的维数. 近年来, 在许多领域出现了对信号的低维结构模型的研究^[16, 18]. 本节将介绍几个在 CS 中常用的信号结构模型.

2.1 稀疏信号模型

稀疏信号模型是信号处理领域普遍使用的最简单的模型, 传统 CS 理论正是以其为基础构建起来的. 从数学的定义来说, 当信号 $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^N$ 在某个基或字典下的变换系数 \mathbf{x} 中仅含有 k 个非零项, 即 $\|\mathbf{x}\|_0 = k (k \ll N)$, 称 \mathbf{f} 是 k -稀疏的. 稀疏性体现出在很多情况下高维信号实际仅包含了远低于其维数的少量信息. 实际场景中的大部分信号并不是精确稀疏的, 但能够由 k -稀疏信号很好地逼近, 通常称这些信号是可压缩的. 对稀疏信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$, 所有 k -稀疏信号构成的集合记为

$$\Sigma_k = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_0 \leq k\} \quad (3)$$

$|\Sigma_k|$ 表示 k -稀疏信号的个数, 则 $|\Sigma_k| = C_N^k$.

如上所述, 压缩测量中重构信号是一个欠定问题, 过去十年许多研究者从理论和求解算法上对此进行了研究. 理论表明, 在稀疏模型约束下, 当观测矩阵满足有限等距性质 (Restricted isometry property, RIP)^[2, 19–22], 或当 Φ 中线性相关的列的最小数目 $\text{spark}(\Phi)$ 大于 $2k$ 时^[23], 式 (2) 有唯一确定的解.

2.2 多测量向量模型

在实际应用中, 研究的复杂信号往往隐含着稀疏性之外的一些潜在的结构信息, 从而出现如何将信号结构与稀疏性相结合以获得更优结果的问题.

对有限维信号的重构问题, 传统 CS 由单重测量恢复未知的稀疏信号, 被称为单测量向量 (Single measurement vector, SMV) 模型. 作为 SMV 模型的推广, 多测量向量 (Multiple measurement vector, MMV) 模型是 CS 中使用的第一类结构模型. 从多重测量恢复多个未知的稀疏信号, 被用于分布式压缩感知 (Distributed CS)^[24] 的联合稀疏重构问题. MMV 问题在信号处理领域的研究已超过十年, 最初在脑磁图数据处理中提出^[25], 之后被应用于阵列信号处理、认知无线电、多带通信以及 DNA 微阵列等^[16].

MMV 模型具有如下形式:

$$Y = \Phi X + V \quad (4)$$

其中 $X = [\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^Q] \in \mathbf{R}^{N \times Q}$ 是信号矩阵, 表示由 Q 个信号 $\mathbf{x}^q \in \mathbf{R}^N$ ($q = 1, \dots, Q$) 构成的信号集; $Y = [\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^Q] \in \mathbf{R}^{K \times Q}$ 是多测量矩阵, $\Phi \in \mathbf{R}^{K \times N}$ 是 CS 信息矩阵, $V \in \mathbf{R}^{K \times Q}$ 是 Gaussian 白噪声矩阵. 当 $Q = 1$ 时, 式 (4) 退化为 SMV 模型.

MMV 模型假设信号 \mathbf{x}^q ($q = 1, \dots, Q$) 是 k -稀疏的, 并且具有相同的稀疏支撑, 即非零值出现在相同的位置. 定义 $\Omega = \text{supp}(X) = \cup_q \text{supp}(\mathbf{x}^q)$ 为 X 的非零行的位置标识集, 则 X 最多有 k 个非零行, 即 $|\text{supp}(X)| \leq k$, 我们称 X 是 k -联合稀疏矩阵^[26].

对从多测量 Y 重构信号矩阵 X 的问题, 可以通过求解 Q 个 SMV 问题, 依次从 \mathbf{y}^q 恢复 \mathbf{x}^q 来重构 X . 但由于所有的信号 \mathbf{x}^q ($q = 1, \dots, Q$) 都具有相同的支撑, 因此可以期望利用这种联合结构信息来提高重构质量. 也就是说, 一般情况下重构 X 所需的测量的数量 $K \times Q$ 要小于 $S \times Q$, 其中 S 是由传统 CS 方法在相同精度下重构单个信号 \mathbf{x}^q 所需的测量个数^[16].

MMV 模型的 k -联合稀疏矩阵 X 满足 $\text{rank}(X) \leq k$, $\text{rank}(X)$ 是 X 的秩. 文献 [26] 从理论上证明了从多测量 $Y = \Phi X$ 唯一确定 k -联合

稀疏矩阵 X 的充分必要条件是

$$|\text{supp}(X)| < \frac{\text{spark}(\Phi) - 1 + \text{rank}(X)}{2} \quad (5)$$

文献 [26–27] 证明了当用 $\text{rank}(Y)$ 代换式 (5) 中的 $\text{rank}(X)$ 时, 仍能够保证从 Y 唯一地确定 X , 并提出可获得更优性能的基于 Y 的秩信息重构算法. 文献 [28] 证明了甚至在有无穷多个向量 \mathbf{x}_q 的情况下, 上述唯一恢复的条件也是充分的.

上述研究表明, 具有较大的秩的矩阵 X 能够从比支撑个数少得多的测量中恢复; 具有较大支撑的矩阵 X 能够从与支撑个数相同的测量恢复. 当 $\text{rank}(X) = k$, 且 $\text{spark}(\Phi)$ 的最大的可能值等于 $K + 1$ 时, 由式 (5) 可得 $K \geq k + 1$, 也就是说在最理想的情况下, MMV 模型的每个信号仅需 $k + 1$ 个测量即可保证唯一重构, 这比传统 CS (或 SMV 模型) 中由 spark 性质获得的保证唯一恢复的测量数量 $2k$ ^[23] 要低得多.

2.3 子空间联合模型

这种结构化模型可以推广至无限维空间. 对具有某些结构的 N 维 k -稀疏信号, 可能仅需将信号的支撑限制在 Σ_k 中的一个更小的子集上就能够很好地刻画信号的结构. 例如当信号的非零系数以某种聚集形式出现时, 就可以由子空间联合 (Unions of subspaces) 模型来刻画信号的这种结构. 信号的子空间联合模型是对稀疏模型的扩展, 能够用于刻画包括维数有限和无限的更多类型的信号.

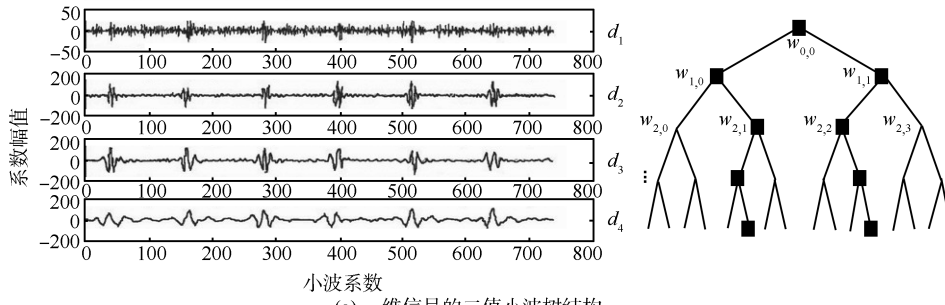
在子空间联合模型中, 如果已经知道 \mathbf{x} 位于 L 个可能的子空间 U_1, \dots, U_L 中的某个子空间, 那么 \mathbf{x} 一定位于这 L 个子空间的并中^[16, 29], 即

$$\mathbf{x} \in U = \bigcup_{l=1}^L U_l \quad (6)$$

其中, U_l ($1 \leq l \leq L$) 是 \mathbf{R}^N 中的 k -维子空间, 对应于 \mathbf{x} 中 k 个非零系数的某个特定的位置集合. 与包含所有可能的 N 维 k -稀疏信号的集合 Σ_k (由 C_N^k 个子空间的并构成) 相比, L 往往远小于 C_N^k .

当前还没有统一的方法来处理所有的联合模型, 研究者们对在一些特殊类型的子空间联合模型下的信号采样和恢复问题做出了相关的理论和应用研究^[16]. 最简单的联合模型为有限个子空间的联合 (Finite union of subspaces, FUS) 模型, 其中子空间的个数和维数都是有限的.

文献 [30] 中提出的基于模型的 CS (Model-based CS) 使用了 FUS 模型的一种特殊情况 — 结构稀疏支撑 (Structured sparse supports) 模型. 该模型利用支撑的额外信息, 如向量的非零元素的位置, 使得 U 仅是 Σ_k 中的一部分. 一种典型的结



(a) 一维信号的二值小波树结构
(a) Binary wavelet tree structure of a one-dimensional signal



(b) 二维图像的小波四叉树结构
(b) Wavelet quadtree structure of a two-dimensional image

图 2 信号/图像的小波树结构

Fig. 2 Wavelet tree structure of signal/image

构稀疏支撑模型为树结构支撑 (Tree-structured supports) 模型^[30]. 光滑的小波基为光滑和分段光滑的信号, 包括自然图像, 提供了稀疏或可压缩表示, 并且这些信号和图像的小波系数自然地形成一种树状结构, 具有大幅值的系数沿着树的分支而聚集, 如图 2 所示. 因此仅需要使用由与树结构相对应的子空间构成的并集来表示信号.

FUS 模型的另一种特殊情况是子空间的稀疏和 (Sparse sums of subspaces) 模型, 在这种模型中构成并集的每个子空间 U_l 是 k 个低维子空间的直和^[16, 31]:

$$U_l = \bigoplus_{j=1}^k W_{l_j} \tag{7}$$

其中 $\{W_{l_1}, \dots, W_{l_k}\}$ 是给定的子空间集合, $\dim(W_{l_j}) = d_l$. 因此不同的子空间 U_l 对应于从 L 个子空间 W_{l_j} 中取出不同的 k 个子空间构成的和. 当 $\dim(W_{l_j}) = 1$ 时, 该模型退化为标准的稀疏模型. 由此, 可得到块稀疏 (Block sparsity) 模型^[32-34], 即一个向量中的某些块等于零, 其他部分不为零. 图 3 给出一个块稀疏向量的例子. 向量 \mathbf{x} 分成 5 个块, 其中阴影区域表示向量的 10 个非零元素, 它们占了 2 个块, d_l 表示第 l 个块中包含的元素的个数. 当对所有 $l, d_l = 1$ 时, 块稀疏性退化为标准稀疏性. 统计学领域对块稀疏模型的性质进行了大量的研究^[35-38], 此外块稀疏模型也被用于 DNA 微阵分析^[39-40]、稀疏通信信道均衡^[41] 和源定位^[42]

等应用中.

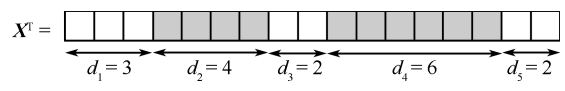


图 3 块稀疏向量^[16]

Fig. 3 Block sparse vector^[16]

对 FUS 模型, 文献 [29-31, 43-44] 将传统 CS 中的标准的 RIP 性质扩展为 (U, δ) -RIP 性质, 证明了在常数 δ 足够小的情况下, 为 FUS 模型设计的重构算法能够正确恢复稀疏向量 \mathbf{x} , 并给出了保证稳定恢复所需的测量数量. 文献 [32] 在子空间的稀疏和模型下对相关性 (Coherence) 进行了推广, 定义了矩阵的块相关性 (Block-coherence). 文献 [45-46] 加入了子空间的内部结构, 例如子空间的稀疏性, 这相当于在对单个块的优化中加入表示稀疏性的正则项, 从而得到多层的结构稀疏模式, 该模型已被成功地应用于源识别和分离问题^[46].

上述维数与个数都有限的子空间联合模型主要依赖于对模拟输入的离散化, 没有考虑实际的硬件系统. 为了能在硬件上真正地实现对具有结构的模拟信号的低速采样和重建, 出现了更为复杂的子空间联合模型的研究. 这些子空间的联合模型包括子空间个数有限而子空间维数无限的模型、子空间维数有限而个数无限的模型和子空间维数和个数都无限的模型.

由于是对由联合子空间表示的模拟信号的低速采样, 因此解决相同问题所使用的方法与上述有限

子空间联合模型中对离散化信号使用的方法有本质的区别. 处理模拟信号的欠 Nyquist 采样问题的两个主要的框架是 Xampling 和有限更新率 (Finite-rate of innovation, FRI). Xampling 框架主要处理那些能够被表示为有限个无限维子空间的并的模拟信号, 例如多带模型^[47]. 在这种模型中, 模拟信号由带限信号的有限和构成, 信号分量通常具有一个相对较小的带宽, 但分布在一个比较大的频率范围内^[48]. 另一类能够用子空间的并表示的信号是具有有限更新率的一类信号^[49]. 依赖于特定的结构, 这种模型对应于有限维子空间的无限或有限个并^[6, 50-51], 可以刻画许多具有低自由度的信号. 在这种情况下, 每个子空间对应于参数值的某种选择, 参数的可能取值的集合是无限维的, 从而由模型张成的子空间的个数也是无限的. 借助于子空间的这种模拟的并, 使我们能够以低速率对模拟信号进行采样及实时处理, 并且设计出有效的硬件, 诸如使用调制器、低速率模数转换器 (Analog-to-digital converter, ADC) 和低通滤波等标准模拟设计组件实现模拟前端^[6], 从而促进模拟 CS 框架从理论到实际应用的发展.

2.4 低秩矩阵模型

矩阵的稀疏性主要表现在两个方面: 1) 矩阵元素的稀疏性, 即矩阵具有很少的非零元素; 2) 矩阵奇异值的稀疏性, 即矩阵具有很少的非零奇异值, 也就是说矩阵的秩非常小, 这时我们称矩阵为低秩矩阵. 对矩阵 $X \in \mathbf{R}^{N_1 \times N_2}$, 低秩矩阵的集合可表示为

$$\{X \in \mathbf{R}^{N_1 \times N_2} : \text{rank}(X) \leq r\} \quad (8)$$

矩阵 X 的奇异值分解为 $X = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*$, $\sigma_1, \dots, \sigma_r \geq 0$ 为奇异值, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in \mathbf{R}^{N_1}$ 和 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathbf{R}^{N_2}$ 为相应的奇异向量.

近年来低秩矩阵重建已成为机器学习、信号处理、计算机视觉等领域研究的热点, 矩阵的恢复与填充可看作是 CS 重构由一维信号到二维矩阵的推广. 在低秩矩阵约束下, 矩阵填充问题表示为

$$\min_Z \text{rank}(Z), \text{ s.t. } P_\Omega(Z) = P_\Omega(X) \quad (9)$$

其中 Ω 为具有缺失元素的矩阵 X 中已知元素的标识集, $P_\Omega(X)$ 定义为

$$P_\Omega(X_{ij}) = \begin{cases} X_{ij}, & \text{若 } (i, j) \in \Omega \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

最近, 一些同时考虑矩阵元素与矩阵奇异值的稀疏性的低秩矩阵模型被用于矩阵恢复问题:

$$\min_Z \text{rank}(Z) + \lambda \|E\|_l, \text{ s.t. } X = Z + E \quad (11)$$

其中 $\lambda > 0$ 为正则参数, $\|\cdot\|_l$ 为某种正则策略. 模型 (11) 通常被称为鲁棒主成分分析 (Robust principal component analysis, RPCA)^[52]. 在 RPCA 的基础上, 文献 [53] 提出低秩加稀疏矩阵分解的低秩表示 (Low-rank representation, LRR) 模型处理多子空间问题. LRR 模型表示为

$$\min_Z \text{rank}(Z) + \lambda \|E\|_l, \text{ s.t. } X = DZ + E \quad (12)$$

其中, $D \in \mathbf{R}^{N_1 \times n}$ 是一个线性张成数据空间的字典, n 为字典中原子的个数. 类似于 CS 的 l_0 -最小化问题, 式 (9)~(12) 都是 NP (Nondeterministic polynomial)-难的. 一类有效的方法是用矩阵的核范数 $\|Z\|_*$ (即矩阵 Z 的奇异值的和) 代替 $\text{rank}(Z)$, 将上述问题转化为凸优化问题进行求解^[54-55].

3 结构化压缩感知

传统 CS 在信号的采集与重建中仅将稀疏性作为唯一的先验信息, 而结构化 CS 在传统 CS 的三个基本模块中引入了结构先验, 即结构化的观测、结构化的字典和结构化的信号重构. 结构化 CS 的理论框架如图 4 所示, 可以看到, 结构化 CS 以结构稀疏表示为基础, 采用与信号匹配的结构化观测, 在结构化先验下, 对更为广泛的信号类实现更加有效的重构. 接下来, 我们将结合上一节给出的信号的各种低维结构模型对结构化 CS 理论的三个基本问题进行详细的介绍.

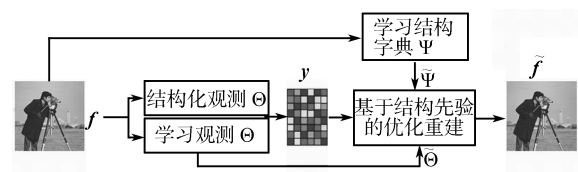


图 4 结构化压缩感知框架

Fig. 4 Frame of structured compressive sensing

3.1 结构化观测矩阵

为了保证从低维测量 \mathbf{y} 重构信号 \mathbf{x} 时式 (2) 存在确定的解, 传统 CS 理论要求观测矩阵 Θ 与稀疏基矩阵 Ψ 不相关, 从而使信息算子 Φ 以很大的概率满足 RIP 性质^[10]. 除了 RIP 性质之外, 相关性判别理论^[56]、矩阵 spark 判别理论^[57] 以及测量算子零空间理论^[58] 等都可作为衡量观测矩阵处理稀疏信号的能力的判定标准. 因此在传统 CS 中, 主要设计满足上述性质的非自适应的观测矩阵. 观测矩阵固定, 不随信号发生改变. 已证明传统 CS 广泛使用的随机观测矩阵 (如随机 Gaussian 矩阵) 能够以高概率保证 RIP 和不相关性, 但当信号维数很高时, 随机观测矩阵将导致复杂度过高的问题, 不易实现.

在某些特定应用中, 观测矩阵的类型通常受到

传感器的感知模式和能力的限制^[16], 同时为减少测量数量, 并实现对模拟信号的采样, 我们也希望观测矩阵与信号相匹配. 因此与传统 CS 相比, 结构化 CS 使用与信号结构或传感器感知模式相匹配的结构化观测矩阵. 目前, 结构化的观测矩阵主要有欠采样不相关基 (Subsampled incoherent bases)、结构化欠采样矩阵 (Structurally subsampled matrices)、欠采样循环矩阵 (Subsampled circulant matrices) 和可分离矩阵 (Separable matrices) 等. 关于结构化观测矩阵的理论及硬件实现可参见文献^[16] 的详细综述.

利用欠采样不相关基进行采样, 是通过首先任意选择与稀疏基不相关的一个正交基, 然后选择信号在这个正交基下的系数的子集来获得 CS 测量的^[59]. 对欠采样不相关基的应用主要有两类. 在第一类应用中, 采集硬件被限制在变换域中直接获得测量, 最常见的例子为 NMRI^[60]、层析成像^[2] 和光学显微术^[61-62]. 在这几种应用中, 从硬件获得的测量都对应于图像的二维连续 Fourier 变换系数, 图 5 展示了一个 NMRI 采样及 CS 重构的例子, 第二类应用是设计一种可获得信号在一个向量集上投影的新的采集装置, 例如由单像素照像机^[8, 63] (如图 6 所示) 可获得图像在具有二值元素的向量集上的投影. 此外这种类型的结构化的观测矩阵已被用于设计采集周期性的多频模拟信号, 设计的采集设备被称为随机采样 ADC^[65].

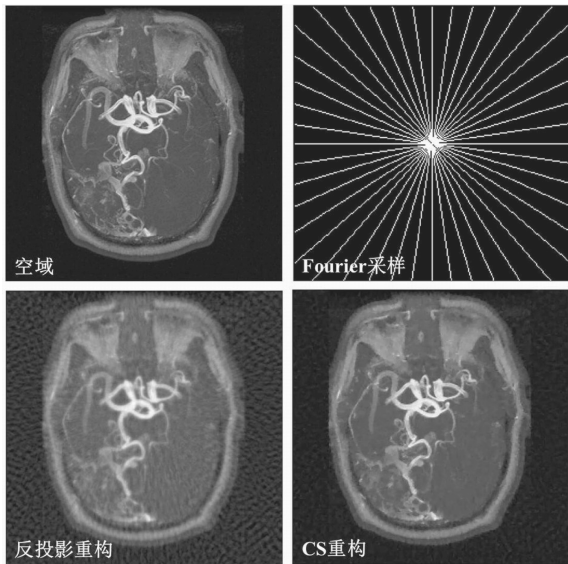
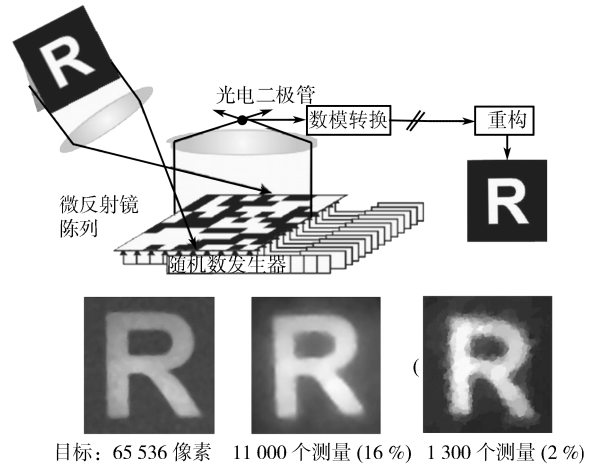


图 5 核磁共振成像^[64]

Fig. 5 Nuclear magnetic resonance imaging^[64]

在某些应用中, 由采集设备得到的测量不能直接对应于信号在特定变换下的系数, 获得的观测是多个信号系数的线性组合, 在这种情况下产生的 CS 观测矩阵被称为结构化欠采样矩阵^[66]. 结构化欠采

样矩阵被用来设计采集周期性的多频模拟信号的压缩信息采集设备 (如图 7 所示). 利用这种框架以及改进的恢复算法能够对更广泛的频率稀疏信号进行采样^[67].



目标: 65 536 像素 11 000 个测量 (16%) 1 300 个测量 (2%)

图 6 单像素照像机成像^[64]

Fig. 6 Image acquisition with single pixel camera^[64]

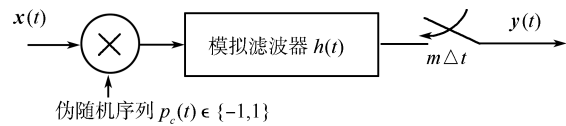


图 7 压缩 ADC 采样模型^[15]

Fig. 7 Compressive ADC^[15]

循环结构^[68-70] 被用于 CS 观测矩阵. 最早出现在通信领域中的信号估计和多用户检测中, 在那里信号响应和多用户模式这些待估计信号被赋予稀疏先验, 并且在测量之前这些信号与采样硬件的脉冲响应进行卷积. 由于卷积等价于 Fourier 变换域的乘积算子, 因此利用快速 Fourier 变换进行乘法运算可加速 CS 的恢复过程.

对于多维信号, 可分离矩阵^[71-72] 提供了在计算上非常有效的压缩测量方法, 例如从多维数据进行超立方体采样. 这些矩阵具有像 Kronecker 积一样简洁的数学形式, 并且矩阵子块之间的相关性反映了显著的特征结构. 可分离 CS 观测矩阵主要用于诸如视频序列和高光谱立方数据等多维信号. 利用可分离观测矩阵, 单像素照像机被推广为单像素高光谱照像机^[73].

3.2 结构化稀疏表示

信号的稀疏表示是 CS 理论应用的前提, 选择适当的字典 Ψ , 使信号在 Ψ 下具有较高的稀疏度, 可提高信号感知的效率. Candès 等^[4] 和 Donoho^[5] 的研究表明仅使用 $K \geq ck \log(N/k)$ 个独立同分布的 Gaussian 测量就能够以很高的概率精确重构 k -稀

疏信号或高度近似于 k -稀疏信号的可压缩信号. 由此可见, 当信号在字典 Ψ 表示下的稀疏度越高时, 精确重构信号所需要的观测数量就越少. 因此在 CS 中力求使用或设计可获得信号高稀疏度表示的字典 Ψ .

构造字典通常有两种方法: 1) 基于数学工具构造字典的解析方法, 构造的字典是固定字典; 2) 基于学习的方法, 通过学习构造与特定信号数据相匹配的字典. 传统 CS 多使用固定字典, 对具有复杂结构的信号, 这种字典不够灵活, 不能获得足够的稀疏性. 结构化 CS 通过固定字典的级联和具有特定结构的字典的学习, 丰富字典的内容, 实现信号的自适应结构化稀疏表示.

3.2.1 固定字典

正交字典是传统 CS 在早期使用的一种固定形式的字典, 通常是由它们的算法所描述的, 例如由 Fourier 变换、离散余弦变换、小波变换等得到的标准正交字典, 这些变换具有构造简单、实现快速、表示的复杂度低的特点. 在信号特征与字典的原子特征一致时, 能够得到高效精确的表示. 但对于诸如图像等复杂信号, 正交字典不能灵活地对其进行表示, 获得足够的稀疏度. 大量研究表明超完备的冗余字典能够更为灵活地表示信号, 获得更高的稀疏度, 其中包括 Curvelets^[74]、Contourlets^[75] 和 Bandelets^[76]. 在 CS 领域, Candès 等^[77] 从理论上证明了一定条件下, 在高度超完备冗余字典下稀疏的信号能够被精确地重构.

现实世界中的信号多具有复杂结构, 可看成是由多种结构类型的分量组成, 例如音频信号中的瞬变和不变的部分, 自然图像中的边缘、纹理和光滑部分. 其中每一种结构类型都完全不同, 并且任何一个都不能有效地表示另一个. 这种由不同结构混合而成的信号可由正交基级联字典有效表示. 当由正交基级联而成的字典的相干系数 $\mu = 1/\sqrt{N}$ 时, 级联字典被认为是 (完全) 不相干的, 信号在其上的稀疏表示满足精确重构条件^[15]. 常见的正交基级联字典有由不同的正交小波基构成的正交基级联字典、小波函数和 Curvelet 函数组成的正交基级联字典等^[78-79]. Gribonval 等^[80] 给出信号在有限维的任意 (冗余) 字典下具有唯一稀疏表示的条件, 指明由非正交字典联合而成的级联字典, 如双正交小波基级联字典, 在对包含多种结构的信号的稀疏表示中也具有良好的性能. 通过级联的方式丰富了字典的内容, 使得信号中的每种结构都能在相应的字典下得到稀疏的表示, 但级联字典的应用也要求信号的特性与字典特性相一致, 否则将难以得到满意的表示.

3.2.2 结构化字典学习

上述字典是固定的, 其原子类型一旦确定就不再变化, 在 CS 中选择字典时或多或少需要知道信号的先验信息, 并且当研究的信号发生变化时, 使用的字典不一定适合. 由此出现获得信号最优稀疏表示的自适应结构化字典学习方法, 该方法是从大量的训练样本集中学习字典. 字典学习的数学模型如下:

$$\min_{\Psi, X} \|F - \Psi X\|_F^2, \text{ s.t. } \|f_i\|_0 \leq k_0, 1 \leq i \leq L \quad (13)$$

其中矩阵 $F \in \mathbf{R}^{N \times L}$ 是训练样本集, f_i 是 F 的第 i 列, 矩阵 $\Psi \in \mathbf{R}^{N \times M}$ 是未知的字典, 矩阵 $X \in \mathbf{R}^{M \times L}$ 是一个稀疏矩阵, X 的每个列向量对应于 F 的每个列向量在字典 Ψ 下的稀疏表示.

字典学习问题 (13) 是非凸组合优化问题, 求解的经典算法包括 MOD (Method of optimal directions) 算法^[81-82] 和 K-SVD (K-singular value decomposition) 算法^[83]. MOD 算法交替地执行稀疏编码和字典更新. 在稀疏编码步, 算法固定字典, 对每个信号独立地进行稀疏编码; 在字典更新步, 算法通过求解二次优化问题 (13) 的解析解更新字典. MOD 算法仅需要很少次的迭代就可以收敛, 虽然逆矩阵的运算使算法具有较高的复杂度, 但总体上来说 MOD 是一种非常有效的方法. K-SVD 算法使用与 MOD 不同的字典更新规则, 对字典中的原子 (即字典的列向量) 逐一进行更新, 通过对当前迭代步的原子和与之对应的稀疏系数的同步更新, K-SVD 算法更为有效. 与构造字典的解析方法相比, 上述字典学习算法能够得到更有效的字典, 并且在实际应用中可获得更优的性能.

目前有许多关于结构化字典学习方法的研究, 即在学习中加入字典元素间的结构信息以获得信号的结构化稀疏表示. 训练一个由酉矩阵级联而成的字典的学习算法^[84] 是对学习结构化过完备字典的第一次尝试. 这种结构能够保证训练的字典是一个紧框架, 并可降低字典学习的计算复杂度. 该算法假设要学习一个由 L 个酉矩阵级联的字典 $\Psi = [\Psi_1, \dots, \Psi_L]$. 在稀疏编码步, 该算法利用 BCR (Block-coordinate-relaxation) 算法^[85] 有效地进行稀疏表示; 在字典更新步, 该算法对 L 个矩阵迭代地交替更新. 由于使用的模型相对严格, 该方法在实际中不能很好地表示非常灵活的结构. 双稀疏性 (Double sparsity) 字典学习方法^[86] 是一种利用被训练字典的原子在已知字典下的稀疏模型来进行字典学习的方法. 在这种结构下, 被训练字典的每个原子可由一个预先给定的字典的原子的稀疏组合来表示. 该方法一方面可自适应地构造字典, 另一方

面又能够有效地提高字典学习的效率. ISD (Image signature dictionary)^[87] 是一种变换不变字典, 以子图像块作为原子. 该方法以块的形式描述不变性, 需要很少的训练样本, 字典学习过程可快速收敛, 并且在这种结构下有可能训练出具有不同大小的原子的字典^[88-89]. 块稀疏结构模型是信号子空间联合模型的一种特例, 近来存在一些关于块稀疏字典学习的工作. Zelnik-Manor 等^[90] 提出寻找给定样本集最优块稀疏表示的字典学习方法. 该方法将字典的块结构作为未知的先验, 通过数据对块结构进行推导从而对字典进行调整, 提出的 BK-SVD (Block K-SVD) 算法对块结构和字典迭代地交换更新. 在块结构更新步, 根据字典原子所表示的样本集的相似性逐步地对原子进行合并; 在字典更新步, 采用 K-SVD 算法的一种推广形式, 通过依次更新字典原子得到稀疏字典, 当块的规模为 1 时即为 K-SVD 算法. BK-SVD 算法没有考虑原子间的结构信息. Li 等^[91] 在 BK-SVD 的基础上加入了块内原子的局部几何结构模型, 提出 DL-GSGR (Dictionary learning with group sparsity and graph regularization) 算法. 算法通过字典中原子的块结构首先创建一个图模型, 然后将块稀疏约束和图正则项进行组合得到字典学习模型, 最后通过交替更新块稀疏编码和字典对模型进行求解, 获得的字典既能保证块稀疏性又能保持原子间的局部几何结构, 并且可以有效地降低字典块之间的相关性. 此外, Jenatton 等^[92] 提出一种基于树结构稀疏正则化的分层字典学习方法. 该方法在字典学习中加入反映字典元素间相关性的树结构层次模型, 利用原-对偶方法计算树结构稀疏正则化的近邻算子, 并通过加速的梯度方法求解信号的树结构稀疏分解问题. 近年来, 国内的一些学者也在诸如图像去噪、修复等问题中使用和构造一些新的结构字典学习方法, 如基于树型冗余字典的信号稀疏表示^[93]、基于图像块局部相似聚类的字典学习方法^[94-95]、基于非局部联合稀疏逼近的字典学习方法^[96] 以及图像结构自适应多成分稀疏表示^[97] 等.

3.3 结构化信号重构

3.3.1 基于标准稀疏先验的传统 CS 重构

在稀疏模型的约束下, 传统 CS 重构问题可表示为如下的 l_0 -范数非凸优化问题:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0, \text{ s.t. } \mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} \quad (14)$$

求解上述 l_0 -范数优化问题的最原始的方法是搜索与线性测量相一致的最稀疏的解向量. 对 N 维 k -稀疏信号, 需要穷举 \mathbf{x} 的 C_N^k 个可行解, 使得问题是 NP-难的^[34-35], 为此出现了许多可替代 l_0 -范数优化的可行算法.

一类常用的方法是用 l_1 范数代替 l_0 范数, 将问题转化为 l_1 -范数最小化 (凸优化), 这样可得到如下基追踪 (Basis pursuit, BP)^[17] 优化问题:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1, \text{ s.t. } \mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} \quad (15)$$

理论研究表明, 在某些条件下, l_1 -最小化问题与 l_0 -问题是等价的, 由 l_1 -凸优化也可获得最稀疏的解^[10, 56, 58]. 求解 l_1 -凸优化的算法有内点法、梯度下降法、线性 Bregman 迭代算法、最小角回归算法等. 在信号稀疏度较低或观测中存在大量噪声的情况下, 凸优化方法较为稳定, 但对于大规模数据, 或者观测矩阵和字典中包含有连续的元素时, 凸优化方法将面对高维或无限维的问题.

贪婪方法是稀疏重构的另一类流行算法, 主要由对信号系数和支撑的迭代逼近过程构成. 算法迭代地确定信号的支撑, 通过拟合与测量数据不匹配的部分逐步改进对稀疏信号的估计. 常用的算法包括匹配追踪 (Matching pursuit, MP)、正交匹配追踪 (Orthogonal matching pursuit, OMP)、分段正交匹配追踪 (Stage-wise OMP, StOMP)、正则化正交匹配追踪 (Regularized OMP, ROMP)、压缩采样匹配追踪 (Compressed sample MP, CoSaMP)、子空间追踪 (Subspace pursuit, SP) 等. 与 l_1 -凸优化相比, 贪婪算法将问题约简为一维子优化问题序列进行求解, 从而速度较快, 在处理高维数据时更具优势.

还存在许多 Bayesian 稀疏重构方法. 在不同的稀疏先验假设下, Bayesian 框架下的最大后验 (Maximum a posteriori, MAP) 估计可产生 l_p -凸优化或 l_p -非凸优化 ($0 < p < 1$). 一些初步的理论与实验结果表明在低采样率下 l_p -非凸模型优于 l_1 -优化模型^[98-104]. 求解 l_p -问题的算法包括 FOCUSS (Focal under determined system solver)^[105-106]、迭代重复加权最小二乘 (Iteratively reweighted least square, IRLS) 算法^[107] 以及 Bayesian 进化追踪算法 (Bayesian evolutionary pursuit algorithm, BEPA)^[104] 等. 基于多层稀疏先验假设, 由稀疏 Bayesian 学习 (Sparse Bayesian learning, SBL) 方法^[108] 可获得快速的 Bayesian CS (BCS) 算法^[109]. 对于传统 CS 重构算法的详细综述可参见文献 [14, 110-111].

基于标准稀疏模型的传统 CS 的逆问题的可行解空间的维数 C_N^k 随信号维数的增大呈指数增长, 因此从中选择可行解具有充分的自由性. 在实际应用中, 这种过高的自由性通常会导致算法不稳定、不能获得精确的估计^[30, 112]. 为了克服这个问题, 结构化 CS 引入信号的结构模型, 将其作为 CS 逆问题的可行解选择的先验信息来约束可行解空间. 与传统 CS 相比, 结构化 CS 有效地降低了压缩测量的

数量, 提高重构质量, 并且将对有限维信号的压缩感知过程扩展到对无限维信号的处理^[30-31]. 以下我们将对有限维信号的基于 MMV 模型、子空间联合模型和基于先验正则化方法的结构化重构进行介绍.

3.3.2 基于 MMV 模型的结构化 CS 重构

将传统 CS (或 SMV) 的优化问题 (14) 进行推广, 可以得到如下 MMV 稀疏恢复的优化问题^[26]:

$$\min_X |\text{supp}(X)|, \text{ s.t. } Y = \Phi X \quad (16)$$

利用矩阵范数, 式 (16) 又可表示为^[16]

$$\min_X \|X\|_{0,q}, \text{ s.t. } Y = \Phi X \quad (17)$$

其中矩阵的 $l_{p,q}$ 范数定义为

$$\|X\|_{p,q} = \left(\sum_i \|\mathbf{x}_i\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (18)$$

\mathbf{x}_i 是 X 的第 i 个行向量. 对任意的 q 和 $p = 0$, $\|X\|_{0,q} = |\text{supp}(X)|$ 是 X 中的非零行的个数, 称为行 l_0 - 伪范数.

与传统 CS 的 l_0 范数优化问题一样, 式 (15) 或式 (16) 也是 NP- 难的, 常使用一些次优的方法进行求解, 提出的算法一般都是现有的求解 SMV 问题的算法的直接推广, 主要有基于混合范数的优化算法和贪婪算法.

基于优化的算法对式 (17) 中的行 l_0 - 伪范数进行放松, 得到如下的混合范数最小化问题

$$\min_X \|X\|_{p,q}, \text{ s.t. } Y = \Phi X \quad (19)$$

对于 p 和 q 的不同取值 (例如: $p, q \geq 1$; $p, q = 1, 2, \infty$ 等), 形成不同的算法. Tropp^[113] 使用 $p = 1, q = \infty$ 的混合范数代替式 (17) 中的行 l_0 - 伪范数, 将问题松弛为凸优化问题, 从而可以使用标准的数学规划软件求解. Cotter 等^[114] 研究了基于 $p \leq 1, q = 2$ 的混合范数的 MMV 问题, 将求解 SMV 问题的 FOCUSS 算法推广为求解 MMV 问题的 MFOCUSS 算法. Fornasier 等^[115] 考虑了 $p = 1, q = 1, 2, \infty$ 的混合范数模型, 提出一种二步阈值 Landweber 算法.

标准的贪婪算法被推广到多测量的情况^[32, 111, 114, 116]. SOMP (Simultaneous OMP)^[117] 算法是 OMP 向 MMV 模型的扩展, 基本思想是以残差矩阵代换残差向量, 每次迭代中选择与当前残差具有最大 q - 相关性的原子, 并对矩阵 X 中相应的行向量进行更新. 一些不同算法的区别主要在于使用了不同的 q 值. 与 SOMP 相类似的匹配追踪

类型的算法还有 M-BMP (MMV blok Mp) 和 M-ORMP (MMV orthogoanl matching pursuit)^[114] 等. Davies 等^[26] 分析了由多测量向量 Y 唯一确定 k - 联合稀疏矩阵 X 的充分必要条件 (5), 指出将式 (5) 中的 $\text{rank}(X)$ 用 $\text{rank}(Y)$ 代换仍能够保证从 Y 唯一地确定 X . 上述基于混合范数优化的算法和贪婪算法都没有用到 Y 的秩信息, 被称为是 Rank blind 算法. 他们将 Y 的秩信息用于 MMV 稀疏重构, 对 SOMP、M-ORMP 等算法进行推广, 提出了一类 RA (Rank aware) 贪婪算法, 包括 RA-OMP 和 RA-ORMP 算法. 实验结果表明对 MMV 联合稀疏重构问题, Rank aware 贪婪算法比相应的 Rank blind 算法具有更优的重构性能.

在 Bayesian 框架下, Wipf 等^[118] 利用自动相关决策^[119-120] 方法提出求解 MMV 问题的 M-SBL 算法, 该算法是标准的 SBL 的推广. Wipf 等^[121] 提出基于 SBL 的迭代重复加权的 l_1 和 l_2 方法, 并将其推广求解 MMV 问题.

多个信号的联合稀疏结构在 MMV 问题的求解中起到重要的作用, 但算法忽略了信号矩阵 X 的时空结构, 即 X 的行向量 (信号源) 中的元素被假定为独立同分布的, 这种假设在很多实际场景下是不合适的. 例如, 在高采样速率下, 所获得的信号源的连续采样的幅值具有强相关性. Zhang 等^[122] 和 Cho 等^[123] 提出的算法通过建立信号源的自回归 (Auto regression, AR) 模型在稀疏恢复中学习这种时空结构, 尽管获得了优于上述未考虑时空结构的 MMV 算法的性能, 但过低的效率限制了它们的应用. Zhang 等^[124] 提出一种基于信号源时空相关结构的多测量向量的稀疏 Bayesian 学习 (TMSBL) 算法, 使对多信号的联合稀疏重构从质量和效率上得到了提升. 此外, Zhang 等^[125] 对迭代重复加权算法 M-FOCUSS^[114] 进行改进, 提出基于信号源时空相关结构的迭代重复加权算法 tMFOCUSS. Wu 等^[126] 通过设计基于多尺度 CS^[127] 的图像的多变量压缩采样方法, 将小波域图像的 CS 重构问题转化为 MMV 问题. 图像小波系数的聚集性使得位于同一尺度的邻域内的系数具有显著的统计相关结构, 即时空相关结构. 他们在 Bayesian 框架下利用多变量尺度混合模型对小波系数尺度内的相关结构进行建模, 将其与 CS 的重构相结合, 提出求解 MMV 问题的快速多变量追踪算法 (Multivariate pursuit algorithm, MPA). 对于基于 MMV 模型的 CS 重构的较为详细的综述可参见文献 [128].

3.3.3 基于子空间联合模型的结构化 CS 重构

近来树结构模型被用于一些重构算法, 取得了优于传统 CS 重构的性能. 其中由 Baraniuk 等提出的基于模型的 CoSaMP (Model-based

CoSaMP)^[30]、Duarte 等的树匹配追踪 (Tree-based MP, TMP) 算法^[129] 和 La 等的树正交匹配追踪 (Tree-based OMP, TOMP) 算法^[130] 是在传统贪婪算法基础上加入树结构模型扩展得到的. 与标准贪婪算法相比, 这些算法通过树结构来确定信号支撑, 缩小了算法的搜索范围, 有效提高了重构信号的稀疏性. 练秋生等对上述算法进行了改进, 提出基于双树小波通用 HMT (Hidden Markov tree) 模型的凸集交替投影算法^[131] 和基于小波系数合理树结构模型的迭代硬阈值算法^[132]. He 等^[133] 提出的基于小波 HMT 模型的树结构小波压缩感知 (Tree-structured wavelet CS, TSW-CS) 算法利用小波 HMT 结构通过 Bayesian 学习获得图像小波系数的概率估计. Duarte 等^[134] 提出的基于 HMT 加权方法的迭代重复加权 l_1 最小化 (HMT-based weights for iterative reweighted, HMT+IRWL1) 算法借助小波系数的 HMT 模型构造加权方法, 有效地增加重构系数的稀疏度, 提高重构精度. 赵贻玖等^[135] 使用 4 状态小波 HMT 模型对 HMT+IRWL1 算法进行了改进. 除上述算法之外, 还存在一些将 Markov 链、Markov 场或 Markov 树作为信号的结构化概率先验的置信传播和消息传递算法^[136-137]. 这种方法是在图模型和编码理论领域发展起来的启发式算法.

块稀疏模型反映了稀疏系数间存在的组或块结构, 这种组或块结构模型已被用于同步稀疏逼近^[118]、基于 Bayesian 多层模型的多任务 CS (Multi-task CS) 和学习问题^[138-139]. 在统计学文献中, 当稀疏系数间存在组或块结构相关性时, Yuan 等^[140] 将 Lasso 算法^[141] 推广为 Group Lasso. Jacob 等^[142] 和 Jenatton 等^[143] 通过在模型中加入其他类型的结构稀疏性, 将 Group Lasso 推广为具有更复杂的稀疏正则化条件的情况. Eldar 等^[31] 将块稀疏信号的重构看成是一个混合 l_2/l_1 范数优化问题, 通过凸优化的方法对其进行求解, 提出的算法可看成是 BP 算法在块稀疏信号重构中的推广. Eldar 等^[32] 又将 MP、OMP 算法扩展为块稀疏匹配追踪 (Block MP) 和块稀疏正交匹配追踪 (Block OMP) 算法. 此外, 付宁等提出了块稀疏度自适应迭代算法^[144] 和基于子空间的块稀疏信号 CS 重构算法^[145].

3.3.4 基于先验正则的结构化 CS 重构

除了以上两类使用信号结构模型的重构算法外, 还存在一类基于先验正则的结构化 CS 重构算法. 这类方法多用于图像重构, 使用的结构先验源自于图像本身, 例如, 图像的边缘和纹理、图像像素的邻域结构信息以及图像子块的非局部相似性等, 并且常常以迭代的方式自适应地对结构先验正则模型的参数进行学习, 同步实现图像的恢复.

Wu 等^[146] 将图像的边缘信息加入到 MMV 稀疏重构过程, 提出基于边缘指导的 MPA 算法, 算法对具有强边缘的图像可获得高质量的重构. Wu 等^[147-148] 利用图像在空域中像素间的自回归模型, 提出了基于自回归图像模型的重构算法, 该算法对图像边缘、纹理等细节信息的恢复有显著的提高. 在此基础上, 他们通过在模型中加入对图像非局部相似性的学习, 进一步提高了基于自回归模型的图像重构算法的性能^[149]. Peyré 等^[150]、Zhang 等^[151] 和陈书贞等^[152] 提出基于迭代非局部正则化的图像重构算法, 算法在图像重构和学习与图像结构相匹配的最优非局部图正则之间交替迭代, 能够很好地重构自然图像的边缘和纹理. Peyré 等^[153] 提出的最优基压缩感知通过对树结构字典学习, 得到最优正交基, 从而获得图像自适应正则先验模型和自适应的重构. Duarte-Carvajalino 等^[154] 提出同步学习自适应的先验结构和观测矩阵的图像恢复算法. Yu 等^[155] 通过对局部图像块所赋予的 Gaussian 混合先验参数的最大后验-期望最大化 (Maximum a posteriori: expectation-maximization) 估计, 学习由多个主成分分析 (Principal component analysis, PCA) 基构成的级联字典, 获得图像自适应的结构稀疏表示, 从而实现图像的分段线性估计. Dong 等^[156] 提出一种自适应稀疏域选择 (Adaptive sparse domain selection) 和自适应正则化字典学习算法解决图像恢复问题, 算法对图像块进行聚类, 利用 PCA 方法对每一聚类学习子字典, 构造的字典能够很好地表示图像的结构. Zhou 等^[157] 提出用于图像恢复的基于非参数多层 Bayesian 模型字典学习方法, 在该模型下不需要知道训练样本的任何先验知识, 即可自适应地获得图像块在学习的字典元素的一个低维子集下的稀疏表示, 并且在学习中可以很容易地将图像的结构模型, 如聚类结构、空间结构等, 以随机过程的形式与多层 Bayesian 模型相结合, 提高 CS 重构的性能.

4 总结与展望

本文从压缩感知理论的两个基本方面对结构化压缩感知所涉及的基本模型和关键技术进行了详细的阐述, 综述了结构化压缩感知理论的最新研究成果. 更为复杂的结构模型的引入大大推进了压缩感知理论在实际中的应用能力, 新的结构化压缩感知理论框架扩展了其所能处理的信号类型. 尽管目前关于结构化压缩感知的研究很多, 并已取得了较多的成果, 但仍存在许多有待解决的问题.

1) 自适应观测矩阵的学习

不同的观测方法对压缩感知重构所需测量的数量和算法的恢复性能有显著的影响. 传统压缩感知

采用的随机观测和结构化压缩感知使用的由传感器感知模式确定的结构化观测通常都具有固定的形式,不能自适应复杂信号的内部结构,例如在基于分布式和多任务压缩感知^[23,138]的阵列信号和视频图像等的压缩感知中,通常使用固定的随机观测对各个信号源或图像帧独立采样,没有同时考虑到信号源或图像帧内部及之间的相关性.目前,自适应观测的学习和设计仅限于理论上的初步研究^[109,154,158],仿真实验验证了其降低测量率、提高重构质量的有效性.因此,针对不同的应用,设计最优的自适应结构化观测矩阵和简便的采样实现技术是扩大压缩感知应用范围的重要手段,需要进一步的研究.

2) 基于核方法的压缩感知重构

众所周知,压缩感知能够从低维观测中恢复高维信号,所付出的代价就是非线性的优化恢复过程.近年来有些学者致力于寻求解析形式的解,以构建更加实用高效的压缩感知方案.文献^[159]指出:通过选择合适的核映射,在特征空间形成信号的稀疏表示,就能够利用最小二乘法获得解析形式的解,称之为核压缩感知.核压缩感知本质上是一种非线性稀疏表示下的压缩感知,它不仅能避开迭代的非线性优化的过程,而且相比线性稀疏表示,能够以更少的观测数目恢复信号.研究该理论下结构化模型的构造与实现,也是未来结构化压缩感知的一个发展方向.

3) 非凸结构化压缩感知重构

传统压缩感知重构和结构化压缩感知重构的本源问题都是 l_0 范数下非凸优化问题,是 NP- 难问题.以匹配追踪和正交匹配追踪为代表的贪婪算法和以迭代硬阈值收缩为代表的门限算法可看成是直接求解 l_0 问题的方法.然而,贪婪算法和门限算法都不能保证收敛到全局最优解.目前已有学者着手利用自然计算方法来求解压缩感知重构的非凸问题^[104,160-162],并取得了初步进展.在非凸结构化压缩感知框架下,引入稀疏和结构稀疏模型,并针对超完备冗余字典和要重构的信号设计相应的算子和优化策略,降低基于自然计算方法的非凸重构中算法的复杂度和问题的不确定度,该问题是结构化压缩感知重构研究的一个新的方向.

References

- Candès E J. Compressive sampling. In: Proceedings of the 2006 International Congress of Mathematics. Madrid, Spain: the European Mathematical Society, 2006. 1433-1452
- Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489-509
- Candès E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, **59**(8): 1207-1223
- Candès E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies? *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(12): 5406-5425
- Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289-1306
- Gedalyahu K, Eldar Y C. Time-delay estimation from low-rate samples: a union of subspaces approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(6): 3017-3031
- Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, Laska J N, Sun T, Kelly K F, Baraniuk R G. Single-pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 83-91
- Duarte M F, Sarvotham S, Baron D, Wakin M B, Baraniuk R G. Distributed compressed sensing of jointly sparse signals. In: Proceedings of the 39th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove, California: IEEE, 2005. 1537-1541
- Vasanawala S, Alley M, Barth R, Hargreaves B, Pauly J, Lustig M. Improved pediatric MR imaging with compressed sensing. *Radiology*, 2010, **256**(2): 607-616
- Baraniuk R G. Compressive sensing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, **24**(4): 118-121
- Candès E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 21-30
- Shi Guang-Ming, Liu Dan-Hua, Gao Da-Hua, Liu Zhe, Lin Jie, Wang Liang-Jun. Advances in theory and application of compressed sensing. *Acta Electronica Sinica*, 2009, **37**(5): 1071-1081
(石光明, 刘丹华, 高大化, 刘哲, 林杰, 王良君. 压缩感知理论及其研究进展. 电子学报, 2009, **37**(5): 1071-1081)
- Li Shu-Tao, Wei Dan. A survey on compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(11): 1369-1377
(李树涛, 魏丹. 压缩传感综述. 自动化学报, 2009, **35**(11): 1369-1377)
- Dai Qiong-Hai, Fu Chang-Jun, Ji Xiang-Yang. Research on compressed sensing. *Chinese Journal of Computers*, 2011, **34**(3): 425-434
(戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究. 计算机学报, 2011, **34**(3): 425-434)
- Jiao Li-Cheng, Yang Shu-Yuan, Liu Fang, Hou Biao. Development and prospect of compressive sensing. *Acta Electronica Sinica*, 2011, **39**(7): 1651-1662
(焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 侯彪. 压缩感知回顾与展望. 电子学报, 2011, **39**(7): 1651-1662)
- Duarte M F, Eldar Y C. Structured compressed sensing: from theory to applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(9): 4053-4085
- Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2001, **20**(1): 33-61
- Davenport M A, Duarte M F, Eldar Y C, Kutyniok G. Introduction to compressed sensing. *Compressed Sensing: Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012

- 19 Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathématique*, 2008, **346**(9–10): 589–592
- 20 Foucart S, Lai M J. Sparsest solutions of underdetermined linear systems via l_p -minimization for $0 < p < 1$. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, **26**(3): 395–407
- 21 Cai T T, Wang L, Xu G W. Shifting inequality and recovery of sparse signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(3): 1300–1308
- 22 Cai T T, Wang L, Xu G W. New bounds for restricted isometry constants. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(9): 4388–4394
- 23 Donoho D L, Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l_1 minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2003, **100**(5): 2197–2202
- 24 Baron D, Wakin M B, Duarte M F, Sarvotham S, Baraniuk R G. Distributed Compressed Sensing, Technical Report TREE-0612, Department of Electrical and Computer Engineering, USA, Rice University, 2005
- 25 Phillips J W, Leahy R M, Mosher J C. MEG-based imaging of focal neuronal current sources. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1997, **16**(3): 338–348
- 26 Davies M E, Eldar Y C. Rank awareness in joint sparse recovery. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, **58**(2): 1135–1146
- 27 Chen J, Huo X. Theoretical results on sparse representations of multiple-measurement vectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(12): 4634–4643
- 28 Mishali M, Eldar Y C. Reduce and boost: recovering arbitrary sets of jointly sparse vectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(10): 4692–4702
- 29 Lu Y M, Do M N. A theory for sampling signals from a union of subspaces. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(6): 2334–2345
- 30 Baraniuk R G, Cevher V, Duarte M F, Hegde C. Model-based compressive sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(4): 1982–2001
- 31 Eldar Y C, Mishali M. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(11): 5302–5316
- 32 Eldar Y C, Kuppinger P, Bölcskei H. Block-sparse signals: uncertainty relations and efficient recovery. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(6): 3042–3054
- 33 Peotta L, Vanderghenst P. Matching pursuit with block incoherent dictionaries. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, **55**(9): 4549–4557
- 34 Yuan M, Lin Y. Model selection and estimation in regression with grouped variables. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 2006, **68**(1): 49–67
- 35 Bach F R. Consistency of the group lasso and multiple kernel learning. *Journal of Machine Learning Research*, 2008, **9**: 1179–1225
- 36 Nardi Y, Rinaldo A. On the asymptotic properties of the group lasso estimator for linear models. *Electronic Journal of Statistics*, 2008, **2**: 605–633
- 37 Stojnic M, Parvaresh F, Hassibi B. On the reconstruction of block-sparse signals with an optimal number of measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(8): 3075–3085
- 38 Meier L, van de Geer S, Bühlmann P. The group lasso for logistic regression. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology)*, 2008, **70**(1): 53–71
- 39 Erickson S, Sabatti C. Empirical Bayes estimation of a sparse vector of gene expression changes. *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, 2005, **4**(1): 1544–6115
- 40 Parvaresh F, Vikalo H, Misra S, Hassibi B. Recovering sparse signals using sparse measurement matrices in compressed DNA microarrays. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2008, **2**(3): 275–285
- 41 Cotter S F, Rao B D. Sparse channel estimation via matching pursuit with application to equalization. *IEEE Transactions on Communications*, 2002, **50**(3): 374–377
- 42 Malioutov D, Cetin M, Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, **53**(8): 3010–3022
- 43 Blumensath T, Davies M E. Sampling theorems for signals from the union of finite-dimensional linear subspaces. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(4): 1872–1882
- 44 Baraniuk R G, Davenport M A, DeVore R, Wakin M. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices. *Constructive Approximation*, 2008, **28**(3): 253–263
- 45 Friedman J, Hastie T, Tibshirani R. A note on the group Lasso and a sparse group Lasso [Online], available: <http://www-stat.stanford.edu/tibs/ftp/sparsegrlasso.pdf>, January 5, 2010
- 46 Sprechmann P, Ramirez I, Sapiro G, Eldar Y C. C-HiLasso: a collaborative hierarchical sparse modeling framework. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(9): 4183–4198
- 47 Eldar Y C. Compressed sensing of analog signals in shift-invariant spaces. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(8): 2986–2997
- 48 Mishali M, Eldar Y C. Blind multiband signal reconstruction: compressed sensing for analog signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(3): 993–1009
- 49 Dragotti P L, Vetterli M, Blu T. Sampling moments and reconstructing signals of finite rate of innovation: Shannon meets strang-fix. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(5): 1741–1757
- 50 Gedalyahu K, Tur R, Eldar Y C. Multichannel sampling of pulse streams at the rate of innovation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(4): 1491–1504
- 51 Ben-Haim Z, Michaeli T, Eldar Y C. Performance bounds and design criteria for estimating finite rate of innovation signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, **58**(8): 4993–5015
- 52 Candès E, Li X D, Ma Y, Wright J. Robust principal component analysis? *Journal of ACM*, 2011, **58**(3): 1–37
- 53 Liu G C, Lin Z C, Yan S C, Sun J, Yu Y, Ma Y. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, **35**(1): 171–184

- 54 Candès E, Recht B. Exact matrix completion via convex optimization. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, **9**(6): 717–772
- 55 Candès E, Tao T. The power of convex relaxation: near-optimal matrix completion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(5): 2053–2080
- 56 Donoho D L, Huo X. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2001, **47**(7): 2845–2862
- 57 Elad M, Bruckstein A M. A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2002, **48**(9): 2558–2567
- 58 Kashin B S, Temlyakov V N. A remark on compressed sensing. *Mathematical Notes*, 2007, **82**(5–6): 748–755
- 59 Candès E J, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems*, 2007, **23**(3): 969–985
- 60 Lustig M, Donoho D L, Santos J M, Pauly J M. Compressed sensing MRI. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 72–82
- 61 Gazit S, Szameit A, Eldar Y C, Segev M. Super-resolution and reconstruction of sparse sub-wavelength images. *Optics Express*, 2009, **17**(26): 23920–23946
- 62 Shechtman Y, Gazit S, Szameit A, Eldar Y C, Segev M. Super-resolution and reconstruction of sparse images carried by incoherent light. *Optics Letters*, 2010, **35**(8): 1148–1150
- 63 Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, Laska J N, Sun T, Kelly K F, Baraniuk R G. Single-pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 83–91
- 64 Romberg J, Wakin M B. Compressed sensing: a tutorial. IEEE Statistical Signal Processing Workshop, Madison, Wisconsin [Online], available: <http://users.ece.gatech.edu/~justin/ssp2007>, August 26, 2007
- 65 Pretsch S, Ragheb T, Laska J N, Nejati H, Gilbert A, Strauss M, Baraniuk R, Massoud Y. On the feasibility of hardware implementation of sub-Nyquist random-sampling based analog-to-information conversion. In: Proceedings of the 2008 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Seattle WA: IEEE, 2008. 1480–1483
- 66 Bajwa W U, Sayeed A M, Nowak R. A restricted isometry property for structurally-subsampled unitary matrices. In: Proceedings of the 47th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Monticello, IL: IEEE, 2009. 1005–1012
- 67 Duarte M F, Baraniuk R G. Spectral compressive sensing. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2013, **35**(1): 111–129
- 68 Haupt J D, Bajwa W U, Raz G, Nowak R. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(11): 5862–5875
- 69 Rauhut H. Compressive sensing and structured random matrices. *Theoretical Foundations and Numerical Methods for Sparse Recovery*. Berlin: De Gruyter, 2010
- 70 Rauhut H, Romberg J, Tropp J A. Restricted isometries for partial random circulant matrices. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2012, **32**(2): 242–254
- 71 Duarte M F, Baraniuk R G. Kronecker compressive sensing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, **21**(2): 494–504
- 72 Rivenson Y, Stern A. Compressed imaging with a separable sensing operator. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, **16**(6): 449–452
- 73 Sun T, Kelly K F. Compressive sensing hyperspectral imager. In: Proceedings of the 2009 Computational Optical Sensing and Imaging (COSI). San Jose, California, 2009
- 74 Candès E J, Donoho D L. Curvelets: a surprisingly effective nonadaptive representation of objects with edges. *Curve and Surface Fitting: Saint-Malo*. Nashville: Vanderbilt University Press, 1999. 105–120
- 75 Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, **14**(12): 2091–2106
- 76 Le Pennec E, Mallat S. Sparse geometric image representations with bandelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, **14**(4): 423–438
- 77 Candès E J, Eldar Y C, Needell D, Randall P. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, **31**(1): 59–73
- 78 Starck J L, Donoho D L, Candès E J. Very high quality image restoration by combining wavelets and curvelets. In: Proceedings of the 2001 SPIE: Wavelet Application in Signal and Image Processing IX. San Diego, CA, 2001. 9–19
- 79 Starck J L, Elad M, Donoho D L. Image decomposition via the combination of sparse representations and a variational approach. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, **14**(10): 1570–1582
- 80 Gribonval R, Nielsen M. Sparse representations in unions of bases. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2003, **49**(12): 3320–3325
- 81 Engan K, Aase S O, Hakon H J. Method of optimal directions for frame design. In: Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Phoenix, AZ: IEEE, 1999. 2443–2446
- 82 Engan K, Rao B D, Kreutz-Delgado K. Frame design using FOCUSS with method of optimal directions (MOD). In: Proceedings of the 1999 Norwegian Signal Processing Symposium. Norway, 1999. 65–69
- 83 Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(11): 4311–4322
- 84 Lesage S, Gribonval R, Bimbot F, Benaroya L. Learning unions of orthonormal bases with thresholded singular value decomposition. In: Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Philadelphia, PA: IEEE, 2005. 293–296
- 85 Sardy S, Bruce A G, Tseng P. Block coordinate relaxation methods for nonparametric wavelet denoising. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 2000, **9**(2): 361–379
- 86 Rubinstein R, Zibulevsky M, Elad M. Double sparsity: learning sparse dictionaries for sparse signal approximation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(3): 1553–1564

- 87 Aharon M, Elad M. Sparse and redundant modeling of image content using an image-signature-dictionary. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, **1**(3): 228–247
- 88 Elad M. *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*. New York: Springer-Verlag, 2010
- 89 Rubinstein R, Bruckstein A M, Elad M. Dictionaries for sparse representation modeling. *Proceedings of the IEEE*, 2010, **98**(6): 1045–1057
- 90 Zelnik-Manor L, Rosenblum K, Eldar Y C. Dictionary optimization for block-sparse representations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(5): 2386–2395
- 91 Li S T, Yin H T, Fang L Y. Group-sparse representation with dictionary learning for medical image denoising and fusion. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2012, **59**(12): 3450–3459
- 92 Jenatton R, Mairal J, Obozinski G, Bach F. Proximal methods for hierarchical sparse coding. *Journal of Machine Learning Research*, 2011, **12**: 2297–2334
- 93 Zhao Song, Ma Rong-Hua, Xue Chao-Gai, Li Heng-Jian. Sparse decomposition based on orthogonal matching pursuit with tree-structure redundant dictionary. *Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition)*, 2011, **14**(4): 52–55, 82
(赵嵩, 马荣华, 薛朝改, 李恒建. 基于树型冗余字典正交匹配追踪的信号稀疏分解. 扬州大学学报(自然科学版), 2011, **14**(4): 52–55, 82)
- 94 Xu Jian, Chang Zhi-Guo. Self-adaptive image sparse representation algorithm based on clustering and its application. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(2): 316–320
(徐健, 常志国. 基于聚类的自适应图像稀疏表示算法及其应用. 光子学报, 2011, **40**(2): 316–320)
- 95 Hu Zheng-Ping, Liu Wen, Xu Cheng-Qian. Image inpainting based on non-local sparsity representation with multi-region learning dictionary. *Mathematics in Practice and Theory*, 2011, **41**(7): 98–108
(胡正平, 刘文, 许成谦. 基于分类学习字典全局稀疏表示模型的图像修复算法研究. 数学的认识与实践, 2011, **41**(7): 98–108)
- 96 Li Min, Cheng Jian, Li Xiao-Wen, Le Xiang. Image inpainting based on non-local learned dictionary. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, **33**(11): 2672–2678
(李民, 程建, 李小文, 乐翔. 非局部学习字典的图像修复. 电子与信息学报, 2011, **33**(11): 2672–2678)
- 97 Sun Yu-Bao, Xiao Liang, Wei Zhi-Hui, Liu Qing-Shan. A structure-adaptive matching pursuit subspace search algorithm for effective image sparse representation. *Chinese Journal of Computers*, 2012, **35**(8): 1751–1758
(孙玉宝, 肖亮, 韦志辉, 刘青山. 图像稀疏表示的结构自适应子空间匹配追踪算法研究. 计算机学报, 2012, **35**(8): 1751–1758)
- 98 Chartrand R. Exact reconstruction of sparse signals via non-convex minimization. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, **14**(10): 707–710
- 99 Chartrand R, Staneva V. Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing. *Inverse Problems*, 2008, **24**(3): 1–14
- 100 Saab R, Chartrand R, Yilmaz Ö. Stable sparse approximations via nonconvex optimization. In: Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Las Vegas, NV: IEEE, 2008. 3885–3888
- 101 Trzasko J, Manduca A. Relaxed conditions for sparse signal recovery with general concave priors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(11): 4347–4354
- 102 Davies M E, Gribonval R. Restricted isometry constants where l_p sparse recovery can fail for $0 < p \leq 1$. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(5): 2203–2214
- 103 Xu Z B, Zhang H, Wang Y, Chang X Y, Liang Y. $L_{1/2}$ regularization. *Science China Information Sciences*, 2010, **53**(6): 1159–1169
- 104 Wu J, Liu F, Jiao L C, Wang X D. Compressive sensing SAR image reconstruction based on Bayesian framework and evolutionary computation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, **20**(7): 1904–1911
- 105 Gorodnitsky I F, Rao B D. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: a re-weighted minimum norm algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, **45**(3): 600–616
- 106 Rao B D, Kreutz-Delgado K. An affine scaling methodology for best basis selection. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(1): 187–200
- 107 Chartrand R, Yin W T. Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing. In: Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Las Vegas, NV: IEEE, 2008. 3869–3872
- 108 Tipping M E, Faul A C. Fast marginal likelihood maximization for sparse Bayesian models. In: Proceedings of the 9th International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics. Key West, FL, 2003. 3–6
- 109 Ji S H, Xue Y, Carin L. Bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(6): 2346–2356
- 110 Tropp J A, Wright S J. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems. *Proceedings of the IEEE*, 2010, **98**(6): 948–958
- 111 Yang Hai-Rong, Zhang Cheng, Ding Da-Wei, Wei Sui. The theory of compressed sensing and reconstruction algorithm. *Acta Electronica Sinica*, 2011, **39**(1): 142–148
(杨海蓉, 张成, 丁大为, 韦穗. 压缩传感理论与重构算法. 电子学报, 2011, **39**(1): 142–148)
- 112 Mallat S, Yu G S. Super-resolution with sparse mixing estimators. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, **19**(11): 2889–2900
- 113 Tropp J A. Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part II: Convex relaxation. *Signal Processing*, 2006, **86**(3): 589–602
- 114 Cotter S F, Rao B D, Engan K, Kreutz-Delgado K. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, **53**(7): 2477–2488
- 115 Fornasier M, Rauhut H. Recovery algorithms for vector-valued data with joint sparsity constraints. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, **46**(2): 577–613
- 116 Gribonval R, Rauhut H, Schnass K, Vandergheynst P. Atoms of all channels, unite! Average case analysis of multi-channel sparse recovery using greedy algorithms. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, **14**(5–6): 655–687
- 117 Tropp J A, Gilbert A C, Strauss M J. Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part I: Greedy pursuit. *Signal Processing*, 2006, **86**(3): 572–588

- 118 Wipf D P, Rao B D. An empirical Bayesian strategy for solving the simultaneous sparse approximation problem. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(7): 3704–3716
- 119 Mackay D J C. Bayesian non-linear modeling for the energy prediction competition. *ASHRAE Transactions*, 1994, **100**(2): 1053–1062
- 120 Neal R M. *Bayesian Learning for Neural Networks*. New York: Springer-Verlag, 1996
- 121 Wipf D P, Nagarajan S. Iterative reweighted l_1 and l_2 methods for finding sparse solutions. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 317–329
- 122 Zhang Z L, Rao B D. Sparse signal recovery in the presence of correlated multiple measurement vectors. In: Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Dallas, TX: IEEE, 2010. 3986–3989
- 123 Cho Y M, Saul L K. Sparse decomposition of mixed audio signals by basis pursuit with autoregressive models. In: Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Washington, DC, USA: IEEE, 2009. 1705–1708
- 124 Zhang Z L, Rao B D. Sparse signal recovery with temporally correlated source vectors using sparse Bayesian learning. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, **5**(5): 912–926
- 125 Zhang Z L, Rao B D. Iterative reweighted algorithms for sparse signal recovery with temporally correlated source vectors. In: Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Prague, Czech Republic: IEEE, 2011. 3932–3935
- 126 Wu J, Liu F, Jiao L C, Wang X D, Hou B. Multivariate compressive sensing for image reconstruction in the wavelet domain: using scale mixture models. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, **20**(12): 3483–3494
- 127 Tsaig Y, Donoho D L. Extensions of compressed sensing. *Signal Processing*, 2006, **86**(3): 549–571
- 128 Wang Fa-Song, Zhang Lin-Rang, Zhou Yu. Multiple measurement vectors for compressed sensing: model and algorithms analysis. *Signal Processing*, 2012, **28**(6): 785–792 (王法松, 张林让, 周宇. 压缩感知的多重测量向量模型与算法分析. 信号处理, 2012, **28**(6): 785–792)
- 129 Duarte M F, Wakin M B, Baraniuk R G. Fast reconstruction of piecewise smooth signals from random projections. In: Proceedings of the 2005 Workshop on Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations (SPARS). Rennes, France, 2005
- 130 La C N H, Do M N. Tree-based orthogonal matching pursuit algorithm for signal reconstruction. In: Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Image Processing. Atlanta, GA: IEEE, 2006. 1277–1280
- 131 Lian Qiu-Sheng, Wang Yan. Image compressed sensing based on universal HMT of the dual-tree wavelets. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, **32**(10): 2301–2306 (练秋生, 王艳. 基于双树小波通用隐马尔可夫树模型的图像压缩感知. 电子与信息学报, 2010, **32**(10): 2301–2306)
- 132 Lian Qiu-Sheng, Xiao Ying. Image compressed sensing algorithm based on wavelet tree structure and iterative shrinkage. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, **33**(4): 967–971 (练秋生, 肖莹. 基于小波树结构和迭代收缩的图像压缩感知算法研究. 电子与信息学报, 2011, **33**(4): 967–971)
- 133 He L H, Carin L. Exploiting structure in wavelet-based bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(9): 3488–3497
- 134 Duarte M F, Wakin M B, Baraniuk R G. Wavelet-domain compressive signal reconstruction using a hidden Markov tree model. In: Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Las Vegas, NV: IEEE, 2008. 5137–5140
- 135 Zhao Yi-Jiu, Wang Hou-Jun, Dai Zhi-Jian. Compressive sampling signal reconstruction in wavelet-domain based on hidden Markov tree model. *Journal of Electronic Measurement and Instrument*, 2010, **24**(4): 314–318 (赵贻玖, 王厚军, 戴志坚. 基于隐马尔可夫树模型的小波域压缩采样信号重构方法. 电子测量与仪器学报, 2010, **24**(4): 314–318)
- 136 Schniter P. Turbo reconstruction of structured sparse signals. In: Proceedings of the 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems. Princeton, NJ: IEEE, 2010. 1–6
- 137 Som S, Schniter P. Compressive imaging using approximate message passing and a Markov-tree prior. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(7): 3439–3448
- 138 Argyriou A, Evgeniou T, Pontil M. Convex multi-task feature learning. *Machine Learning*, 2008, **73**(3): 243–272
- 139 Ji S H, Dunson D, Carin L. Multitask compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(1): 92–106
- 140 Yuan M, Lin Y. Model selection and estimation in regression with grouped variables. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 2006, **68**(1): 49–67
- 141 Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the LASSO. *Journal of the Royal Statistical Society*, 1996, **58**(1): 267–288
- 142 Jacob L, Obozinski G, Vert J P. Group Lasso with overlap and graph Lasso. In: Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning. New York, USA: ACM, 2009. 433–440
- 143 Jenatton R, Audibert J Y, Bach F R. Structured variable selection with sparsity-inducing norms. *Journal of Machine Learning Research*, 2011, **12**: 2777–2824
- 144 Fu Ning, Cao Li-Ran, Peng Xi-Yuan. Compressed sensing of block-sparse signals recovery based on subspace. *Acta Electronica Sinica*, 2011, **39**(10): 2238–2342 (付宁, 曹离然, 彭喜元. 基于子空间的块稀疏信号压缩感知重构算法. 电子学报, 2011, **39**(10): 2238–2342)
- 145 Fu Ning, Qiao Li-Yan, Cao Li-Ran. Block sparsity adaptive iteration algorithm for compressed sensing. *Acta Electronica Sinica*, 2011, **39**(3A): 75–79 (付宁, 乔立岩, 曹离然. 面向压缩感知的块稀疏度自适应迭代算法. 电子学报, 2011, **39**(3A): 75–79)
- 146 Wu J, Liu F, Jiao L, Wang X D. Multivariate pursuit image reconstruction using prior information beyond sparsity. *Signal Processing*, 2013, **96**(6): 1662–1672

- 147 Wu X L, Zhang X Q, Wang J. Model-guided adaptive recovery of compressive sensing. In: Proceedings of the 2009 Data Compression Conference. Snowbird, UT: IEEE, 2009. 123–132
- 148 Wu X L, Dong W S, Zhang X J, Shi G M. Model-assisted adaptive recovery of compressed sensing with imaging applications. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, **21**(2): 451–458
- 149 Wu F F, Shi G M, Dong W S, Wu X L. Learning-based recovery of compressive sensing with application in multiple description coding. In: Proceedings of the 2009 IEEE International Workshop on Multimedia Signal Processing. Rio De Janeiro: IEEE, 2009. 1–5
- 150 Peyré G, Bougleux S, Cohen L D. Non-local regularization of inverse problems. *Lecture Notes in Computer Science*, New York: Springer, 2008, **5304**: 57–68
- 151 Zhang X, Burger M, Bresson X, Osher S. Bregmanized Non-local Regularization for Deconvolution and Sparse Reconstruction, CAM Technical Report 09-03, 2009
- 152 Chen Shu-Zhen, Li Guang-Yao, Lian Qiu-Sheng. Image compressed sensing based on nonlocal similarity and alternating iterative optimization algorithm. *Signal Processing*, 2012, **28**(2): 200–205
(陈书贞, 李光耀, 练秋生. 基于非局部相似性和交替迭代优化算法的图像压缩感知. 信号处理, 2012, **28**(2): 200–205)
- 153 Peyré G. Best basis compressed sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(5): 2613–2622
- 154 Duarte-Carvajalino J M, Sapiro G. Learning to sense sparse signals: simultaneous sensing matrix and sparsifying dictionary optimization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, **18**(7): 1395–1408
- 155 Yu G S, Sapiro G, Mallat S. Solving inverse problems with piecewise linear estimators: from Gaussian mixture models to structured sparsity. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, **21**(5): 2481–2499
- 156 Dong W S, Zhang D, Shi G M, Wu X L. Image deblurring and super-resolution by adaptive sparse domain selection and adaptive regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, **20**(7): 1838–1857
- 157 Zhou M Y, Chen H J, Paisley J, Ren L, Li L B, Xing Z M, Dunson D, Sapiro G, Carin L. Nonparametric Bayesian dictionary learning for analysis of noisy and incomplete images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, **21**(1): 130–144
- 158 Seeger M W, Nickisch H. Compressed sensing and Bayesian experimental design. In: Proceedings of the 25th International Conference on Machine Learning. New York, USA: ACM, 2008. 912–919
- 159 Qi H C, Shannon H. Using the kernel trick in compressive sensing: accurate signal recovery from fewer measurements. In: Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Prague, Czech Republic: IEEE, 2011. 3940–3943
- 160 Yang Li. Compressive Sensing Reconstruction Based on Ridgelet Redundant Dictionary and Genetic Evolution [Master dissertation], Xidian University, China, 2012
(杨丽. 基于 Ridgelet 冗余字典和遗传进化的压缩感知重构 [硕士学位论文], 西安电子科技大学, 中国, 2012)
- 161 Ma Hong-Mei. Compressed Sensing Reconstruction via Curvelet Redundant Dictionary and Immune Clone Optimization [Master dissertation], Xidian University, China, 2012
(马红梅. 基于 Curvelet 冗余字典和免疫克隆优化的压缩感知重构 [硕士学位论文], 西安电子科技大学, 中国, 2012)

- 162 Gao Guo-Dong. Image Reconstruction of Compressive Sensing with Alternative Learning and Immune Optimization [Master dissertation], Xidian University, China, 2012
(郇国栋. 基于交替学习和免疫优化的压缩感知图像重构 [硕士学位论文], 西安电子科技大学, 中国, 2012)



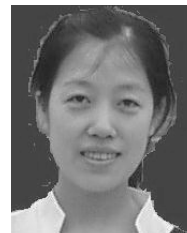
刘芳 西安电子科技大学计算机学院教授。1995 年获西安电子科技大学计算机学院硕士学位。主要研究方向为信号和图像处理, 学习理论与算法, 模式识别。E-mail: lf204310@163.com

(LIU Fang Professor at the School of Computer Science, Xidian University. She received her master degree in computer science and technology from Xidian University in 1995. Her research interest covers signal and image processing, learning theory and algorithms, and pattern recognition.)



武娇 中国计量学院理学院讲师。2012 年获西安电子科技大学计算机学院博士学位。主要研究方向为图像处理, 机器学习, 统计学习理论与算法。本文通信作者。E-mail: wuujiao@163.com

(WU Jiao Lecturer at the College of Sciences, China Jiliang University. She received her Ph. D. degree from Xidian University in 2012. Her research interest covers image processing, machine learning, and statistics learning theory and algorithms. Corresponding author of this paper.)



杨淑媛 西安电子科技大学电子工程学院教授。2005 年获西安电子科技大学电子工程学院博士学位。主要研究方向为机器学习, 多尺度分析, 压缩采样。E-mail: syyang@xidian.edu.cn

(YANG Shu-Yuan Professor at the School of Electronic Engineering, Xidian University. She received her Ph. D. degree from Xidian University in 2005. Her research interest covers machine learning, multiscale geometric, and compressive sampling.)



焦李成 西安电子科技大学电子工程学院特聘教授。1990 年获西安交通大学博士学位。主要研究方向为信号和图像处理, 自然计算, 智能信息处理。E-mail: lchjiao@mail.xidian.edu.cn

(JIAO Li-Cheng Professor at the School of Electronic Engineering, Xidian University. He received his Ph. D. degree from Xi'an Jiaotong University in 1990. His research interest covers signal and image processing, natural computation, and intelligent information processing.)