

# 布尔网络的分析与控制 — 矩阵半张量积方法

程代展<sup>1</sup> 齐洪胜<sup>1</sup> 赵寅<sup>1</sup>

**摘要** 布尔网络是描述基因调控网络的一个有力工具. 由于系统生物学的发展, 布尔网络的分析与控制成为生物学与系统控制学科的交叉热点. 本文综述作者用其原创的矩阵半张量积方法在布尔网络的分析与控制中得到的一系列结果. 内容包括: 布尔网络的拓扑结构, 布尔控制网络的能控、能观性与实现, 布尔网络的稳定性和布尔控制网络的镇定, 布尔控制网络的干扰解耦, 布尔(控制)网络的辨识, 以及布尔网络的最优控制等.

**关键词** 矩阵半张量积, 逻辑系统, 布尔(控制)网络, 状态空间与正规子空间

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.00529

## Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach

CHENG Dai-Zhan<sup>1</sup> QI Hong-Sheng<sup>1</sup> ZHAO Yin<sup>1</sup>

**Abstract** Boolean network is a powerful tool for describing gene regulatory network. With the development of the systems biology, the analysis and control of Boolean networks become a hot topic for multidisciplinary research. This paper surveys some recent results obtained in the analysis and control of Boolean networks using semi-tensor product of matrices. The contents of this paper include the topological structure of Boolean networks, the controllability and observability, realization, stability and stabilization, disturbance decoupling, identification, and optimal control of Boolean (control) networks.

**Key words** Semi-tensor product of matrices, logical dynamic systems, Boolean (control) networks, state space and regular subspace

早在 1943 年, McCulloch 和 Pitts 在其论文《内在神经活动的逻辑微积分》一文中宣称: “大脑可以模拟成逻辑运行的网络, 比如‘与’、‘或’、‘非’等等”, “在当时, 往轻了说, 这也是一个革命性的思想, 产生了极大的影响.”<sup>[1]</sup> “从 1961 年到 1963 年, Jacob 和 Monod 发表了他们关于遗传回路的一系列论文. 这项工作使他们获得了诺贝尔奖. 他们论述说: ‘任何细胞都包含着几个调节基因, 这些基因像开关一样, 能够打开或关闭其他基因’. 如果基因能够相互打开和关闭, 那么就会有遗传回路”<sup>[1]</sup>. 正是在这些工作的基础上<sup>[1]</sup>, Kauffman 经过多年的努力, 在 1969 年首次提出了用布尔网络刻画细胞和基因调控网络的理论<sup>[2]</sup>. 文献 [1] 对 Kauffman 提出布尔网络理论的经过作了感人描述. 而 Kauffman 自己在此后的一本通俗读物中对布尔网络与基因和生命的关系作了极其详尽生动的解释<sup>[3]</sup>. 他的另一本著作<sup>[4]</sup> 则对细胞、基因和布尔网络作了系统深入的理论探讨.

由于布尔网络较好地揭示了细胞和基因的结构和演化过程, 它随后成为系统生物学家、物理学家和系统科学家们共同关心的热点问题. 这方面的论文非常多. 主要关心的问题有布尔网络的拓扑结构<sup>[5-7]</sup>、动力学特征<sup>[8-9]</sup>、生物系统的布尔建模与分析<sup>[10-11]</sup> 等. 除确定性布尔网络外, 概率布尔网络也是一个研究热点<sup>[12]</sup>. 近年来, 对布尔控制网络的研究兴趣正在上升. 文献 [13] 指出: “系统生物学的主要目标之一就是要发展复杂生物系统的控制理论 (One of the major goals of systems biology is to develop a control theory for complex biological systems)”.

由于布尔网络的动力学过程是一个逻辑演化系统, 而现有的对逻辑系统进行数学分析的工具甚少, 因此, 在讨论上比较困难. 例如, 对布尔网络的不动点和极限圈的讨论, 在笔者之前的工作基本上是针对一个一个具体系统来讨论, 缺少统一公式和一般性结果. 布尔控制系统方面的理论研究结果更是少得可怜.

笔者十几年来致力于矩阵半张量积的研究, 该乘法将普通矩阵乘法推广到任意两个矩阵. 这方面的第一篇论文介绍概念及其在线性系统解耦中的应用<sup>[14]</sup>. 后来发现, 它不仅在控制系统的分析与设计中许多应用<sup>[15-17]</sup>, 而且, 它在一些物理和数学问题中也得到了应用<sup>[18-19]</sup>. 关于矩阵半张量积的综

收稿日期 2010-07-02 录用日期 2011-01-14  
Manuscript received July 2, 2010; accepted January 14, 2011  
国家自然科学基金 (60736022, 60821091, 61074114) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60736022, 60821091, 61074114)  
1. 中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所系统与控制重点实验室 北京 100190  
1. Key Laboratory of Systems and Control, Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190

合介绍可见专著<sup>[20]</sup>或综述<sup>[21]</sup>. 清华大学梅生伟等长期从事半张量积在电力系统方面的应用工作, 得到一系列进展. 有关工作可在他们的最新专著中查到<sup>[22]</sup>.

与布尔网络相关的主要工作是: 我们发现, 利用半张量积, 逻辑方程可以用矩阵表达<sup>[20, 23]</sup>. 后来, 我们将这种方法应用于布尔(控制)网络, 它使我们能够将逻辑动态系统转化为本质上普通的离散动态系统. 这个转换是根本性的, 它使许多经典的处理量变过程的数学工具可直接用来分析逻辑动态系统. 从而使我们在布尔网络的分析与控制上得到一系列初步的而又具有突破意义的成果. 本文是对这些工作的一个综述.

本文通用记号列举如下:

- 1)  $\mathcal{M}_{m \times n}$ :  $m \times n$  维实矩阵集合, 当  $m = n$  时简记为  $\mathcal{M}_n$ ;
- 2)  $\text{Col}(A)$  ( $\text{Row}(A)$ ): 矩阵  $A$  的列(行)集合,  $\text{Col}_i(A)$  ( $\text{Row}_i(A)$ ) 为  $A$  的第  $i$  列(行);
- 3)  $\text{Blk}_i(A)$ :  $n \times nm$  维矩阵  $A$  的第  $i$  个  $n \times n$  的块;
- 4)  $\mathcal{D}_k$ :  $\mathcal{D}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2$ ;
- 5)  $f: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$  称为逻辑函数;
- 6)  $\delta_n^i$ : 单位阵  $I_n$  的第  $i$  列;
- 7)  $\Delta_n$ :  $\Delta_n = \{\delta_n^i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ ;
- 8)  $L \in \mathcal{M}_{m \times r}$  称为一个逻辑矩阵, 如果  $\text{Col}(L) \subset \Delta_m$ ,  $m \times r$  维逻辑矩阵全体记作  $\mathcal{L}_{m \times r}$ ;
- 9) 设  $L$  为一逻辑矩阵, 即  $L \in \mathcal{L}_{m \times r}$ , 那么  $L = [\delta_m^{i_1} \delta_m^{i_2} \dots \delta_m^{i_r}]$ . 为简洁起见, 将它记作

$$L = \delta_m [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r]$$

- 10)  $B \in \mathcal{M}_{m \times r}$  称为一个布尔矩阵, 如果  $B$  的元素  $b_{i,j} \in \mathcal{D}$ ,  $m \times r$  维布尔矩阵全体记作  $\mathcal{B}_{m \times r}$ ;

- 11) 设  $\{x_1, \dots, x_s\}$  为一组逻辑变量,  $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_s)$  表示关于  $x_1, \dots, x_s$  的逻辑函数的全体;

- 12)  $\otimes$  是矩阵间的 Kronecker 积, 令  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ,  $A \otimes B$  定义为

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

## 1 矩阵的半张量积

设  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p \times q}$ .

- 1) 如果  $n = p$ , 则称  $A$  与  $B$  满足等维数关系;
- 2) 如果  $n = tp$  (记为  $A \succ_t B$ ), 或者  $nt = p$  (记为  $A \prec_t B$ ), 则称  $A$  与  $B$  满足倍维数关系. 否则

称一般维数关系. 本文只介绍矩阵乘积在倍维数关系下的一种推广, 更一般的情况见文献 [20].

**定义 1.** 1) 设  $\mathbf{X}$  为  $n = qp$  维行向量,  $\mathbf{Y}$  为  $p$  维列向量. 将  $\mathbf{X}$  等分成  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \dots, \mathbf{X}^p)$ , 这里  $\mathbf{X}^i \in \mathbf{R}^q$ ,  $i = 1, \dots, p$ , 那么,  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  的半张量积, 记作  $\mathbf{X} \ltimes \mathbf{Y}$ , 定义为一个行向量

$$\mathbf{X} \ltimes \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^p \mathbf{X}^i y_i \in \mathbf{R}^q \quad (1)$$

类似的

$$\mathbf{Y}^T \ltimes \mathbf{X}^T = \sum_{i=1}^p y_i (\mathbf{X}^i)^T \in \mathbf{R}^q \quad (2)$$

为一列向量.

- 2) 设  $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ,  $N \in \mathcal{M}_{p \times q}$ , 且  $n|p$  或  $p|n$ . 则它们的半张量积  $C = M \ltimes N$  定义为  $C = (C^{ij})$ , 其中, 子块

$$C^{ij} = \text{Row}_i(M) \ltimes \text{Col}_j(N), \\ i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, q.$$

下面给出一个简单的例子.

**例 1.** 1) 设  $\mathbf{X} = [1 \ 2 \ 3 \ -1]$ ,  $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 则

$$\mathbf{X} \ltimes \mathbf{Y} = [1 \ 2] \times 1 + [3 \ -1] \times 2 = [7 \ 0].$$

2) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

则

$$A \ltimes B = \begin{bmatrix} (1 \ 2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & (1 \ 2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (2 \ 3 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & (2 \ 3 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (3 \ 2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & (3 \ 2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & -5 & -8 \\ 5 & 2 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

- 注 1.** 1) 设  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p \times q}$ . 如果  $n = p$  则显然  $A \ltimes B = AB$ , 即半张量积退化为普

通积. 因此, 无须区分两者. 一般情况下, 半张量积记号“ $\times$ ”也可以省略.

2) 由定义可知, 当  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^p$  与  $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^q$  同为行(列)向量时, 它们的半张量积  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{pq}$  是有定义的行(列)向量. 因此

$$\mathbf{X}^k = \underbrace{\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \cdots \times \mathbf{X}}_k$$

也是有定义的.

结合律与分配律是普通矩阵积的基本性质, 推广相应乘法到半张量积, 它们仍成立.

**命题 1.** 1) 分配律. 对  $a, b \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} F \times (aG \pm bH) = aF \times G \pm bF \times H \\ (aF \pm bG) \times H = aF \times H \pm bG \times H \end{cases} \quad (3)$$

2) 结合律

$$(F \times G) \times H = F \times (G \times H) \quad (4)$$

定义这种新矩阵乘法的初衷是为了解决多线性映射的矩阵表示问题. 下面给出一个例子: 张量计算的矩阵(半张量积)表示, 从中可以看出半张量积是如何完美地解决了这个问题. 可以说, 半张量积天生就是用来表示多线性映射的.

**例 2.** 设  $\mathcal{V}$  为一个  $n$  维向量空间,  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  是它的基底,  $\mathcal{V}^*$  是  $\mathcal{V}$  的对偶空间(即  $\mathcal{V}$  上的线性函数空间),  $\{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*\}$  是它关于  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  的对偶基底, 且满足

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在这对基底上, 向量  $\mathbf{X} \in \mathcal{V}$  可表示为一个  $n$  维列向量, 对偶向量  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}^*$  可表示为一个  $n$  维行向量. 即

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \\ \mathbf{w} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i^* = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

一个张量  $t$  是一个多线性函数:

$$t: \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_r \times \underbrace{\mathcal{V}^* \times \cdots \times \mathcal{V}^*}_s \rightarrow \mathbf{R}$$

$r$  称为它的协变阶,  $s$  称为它的逆变阶<sup>[24]</sup>.

定义  $t$  的一组结构常数为

$$\begin{aligned} r_{j_1 i_1 j_2 i_2 \cdots j_s i_s}^{i_1 i_2 \cdots i_r} &= t(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}^*, \mathbf{e}_{j_2}^*, \dots, \mathbf{e}_{j_s}^*), \\ i_p, j_q &= 1, \dots, n, \quad p = 1, \dots, r, \quad q = 1, \dots, s \end{aligned}$$

我们可构造一个矩阵, 称为  $t$  的结构矩阵, 如下

$$M_t = \begin{bmatrix} r_{11 \cdots 1}^{11 \cdots 1} & r_{11 \cdots 1}^{11 \cdots 2} & \cdots & r_{11 \cdots 1}^{nn \cdots n} \\ r_{11 \cdots 2}^{11 \cdots 1} & r_{11 \cdots 2}^{11 \cdots 2} & \cdots & r_{11 \cdots 2}^{nn \cdots n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{nn \cdots n}^{11 \cdots 1} & r_{nn \cdots n}^{11 \cdots 2} & \cdots & r_{nn \cdots n}^{nn \cdots n} \end{bmatrix}$$

那么

$$t(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_s) = \boldsymbol{\omega}_s \times \cdots \times \boldsymbol{\omega}_1 \times M_t \times \mathbf{X}_1 \times \cdots \times \mathbf{X}_r \quad (5)$$

下面继续讨论半张量积的一些主要性质.

**命题 2.** 1)

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T \quad (6)$$

2) 设  $A, B$  可逆, 则

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \quad (7)$$

下面的定理十分基本, 它可作为半张量积的另一种定义.

**定理 1.** 1) 设  $A \succ_t B$ , 则

$$A \times B = A(B \otimes I_t) \quad (8)$$

2) 设  $A \prec_t B$ , 则

$$A \times B = (A \otimes I_t)B \quad (9)$$

下面的性质非常有用.

**命题 3.** 给定  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ .

1) 设  $\mathbf{Z} \in \mathbf{R}^t$  为一列向量, 则

$$\mathbf{Z}A = (I_t \otimes A)\mathbf{Z} \quad (10)$$

2) 设  $\mathbf{Z} \in \mathbf{R}^t$  为一行向量, 则

$$A\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(I_t \otimes A) \quad (11)$$

**注 2.** 矩阵运算与数字运算相比, 有两个主要的不便之处: 1) 有维数限制; 2) 乘法不可交换. 从某种意义上讲, 当把矩阵乘积推广到半张量积时, 这两个弱点都得到相当程度的克服. 除对维数限制的放松外, 半张量积还有包括命题 3 等的伪交换性质(具有交换作用的另一个工具是换位矩阵, 参见文献 [20]). 这些都使推广后的矩阵乘法比经典矩阵乘法更为方便有效. 下面这个例子在一定意义上说明了这一点.

**例 3.** 设  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} \in \mathbf{R}^n$  为 4 个列向量. 则

$$(\mathbf{X}\mathbf{Y}^T)(\mathbf{Z}\mathbf{W}^T) \in \mathcal{M}_{n \times n} \quad (12)$$

为一方阵. 由于  $\mathbf{Y}^T\mathbf{Z}$  是一个数, 利用结合律, 则有

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}\mathbf{Y}^T)(\mathbf{Z}\mathbf{W}^T) &= \mathbf{X}(\mathbf{Y}^T\mathbf{Z})\mathbf{W}^T = \\ (\mathbf{Y}^T\mathbf{Z})\mathbf{X}\mathbf{W}^T &= \mathbf{Y}^T(\mathbf{Z}\mathbf{X})\mathbf{W}^T \end{aligned} \quad (13)$$

这里  $ZX$  是什么? 这似乎是标准矩阵乘法的一个“漏洞”: 合法的运算导致了非法的表达式.

然而, 在半张量积意义上,  $ZX$  是有定义的. 并且, 不难证明, 式 (13) 与式 (12) 相等.

### 2 逻辑的矩阵表示

一个逻辑变量取值于  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ . 常用的一元逻辑算子是“非” ( $\neg$ ).  $\neg(0) = 1, \neg(1) = 0$ . 常用的二元逻辑算子及其真值表见表 1.

表 1  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bar{\vee}, \uparrow, \downarrow$  的真值表  
Table 1 Truth table of  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bar{\vee}, \uparrow, \downarrow$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \bar{\vee} q$	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0	1	1

为使用矩阵表达式, 我们将 1 等同于  $\delta_2^1$ , 即  $1 \sim \delta_2^1$ , 将 0 等同于  $\delta_2^2$ , 即  $0 \sim \delta_2^2$ . 于是, 一个逻辑变量  $x \in \Delta$ . 在这个向量形式下, 一个逻辑函数  $f: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$  变为一个映射  $f: \Delta_{2^n} \rightarrow \Delta$ . 下面这个定理至关重要<sup>[20]</sup>.

**定理 2.** 设  $f(x_1, \dots, x_n)$  为一个逻辑函数, 在向量形式下  $f: \Delta_{2^n} \rightarrow \Delta$ . 则存在唯一逻辑矩阵  $M_f \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$ , 称为  $f$  的结构矩阵, 使得

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = M_f \times \mathbf{x} \quad (14)$$

这里  $\mathbf{x} = \times_{i=1}^n \mathbf{x}_i$ .

考虑常用逻辑算子及其结构矩阵. 显然, “非”的结构矩阵为  $M_{\neg} = \delta_2[2 \ 1]$ . 表中算子的结构矩阵为

$$\begin{aligned} M_{\wedge} &= \delta_2[1 \ 2 \ 2 \ 2], & M_{\vee} &= \delta_2[1 \ 1 \ 1 \ 2], \\ M_{\neg} &= \delta_2[1 \ 2 \ 1 \ 1], & M_{\leftrightarrow} &= \delta_2[1 \ 2 \ 2 \ 1], \\ M_{\bar{\vee}} &= \delta_2[2 \ 1 \ 1 \ 2], & M_{\uparrow} &= \delta_2[2 \ 1 \ 1 \ 1], \\ M_{\downarrow} &= \delta_2[2 \ 2 \ 2 \ 1]. \end{aligned}$$

更一般地, 我们有<sup>[25]</sup>:

**定理 3.** 设  $F(x_1, \dots, x_n): \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^k$  为一个逻辑函数, 在向量形式下  $F: \Delta_{2^n} \rightarrow \Delta_{2^k}$ , 则存在唯一逻辑矩阵  $M_F \in \mathcal{L}_{2^k \times 2^n}$ , 称为  $F$  的结构矩阵, 使得

$$F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = M_F \times \mathbf{x} \quad (15)$$

### 3 布尔 (控制) 网络及其代数表达式

一个布尔网络, 其网络图含若干结点及若干有向边, 每个结点可以从  $\mathcal{D}$  中取值, 边  $(A, B)$  表示结

点  $B$  下一时刻的状态依赖于结点  $A$  此刻的状态. 它的动态过程要用其逻辑动态方程来表示, 用下例说明.

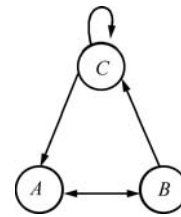


图 1 布尔网络

Fig. 1 A Boolean network

**例 4.** 图 1 是一个三结点的布尔网络. 设其动态方程为

$$\begin{cases} A(t+1) = B(t) \wedge C(t) \\ B(t+1) = \neg A(t) \\ C(t+1) = B(t) \vee C(t) \end{cases} \quad (16)$$

带有输入及输出的布尔网络即为布尔控制网络, 见下例.

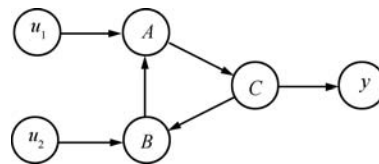


图 2 布尔控制网络

Fig. 2 Boolean control network

**例 5.** 图 2 是一个三结点的布尔控制网络. 设其动态方程为

$$\begin{cases} A(t+1) = B(t) \wedge u_1(t) \\ B(t+1) = C(t) \vee u_2(t) \\ C(t+1) = A(t) \\ y(t) = \neg C(t) \end{cases} \quad (17)$$

布尔 (控制) 网络的一般动态方程可定义如下:

**定义 2.** 布尔网络的动态方程为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (18)$$

这里  $x_i(t) \in \mathcal{D}, i = 1, \dots, n$  为状态变量,  $f_i: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}, i = 1, \dots, n$  为逻辑函数.

2) 布尔控制网络的动态方程为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), \\ \quad u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \quad \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), \\ \quad u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ y_j(t) = h_j(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (19)$$

这里  $x_i(t) \in \mathcal{D}, i = 1, \dots, n$  为状态变量,  $u_i(t) \in \mathcal{D}, i = 1, \dots, m$  为控制,  $y_i(t) \in \mathcal{D}, i = 1, \dots, p$  为输出,  $f_i: \mathcal{D}^{n+m} \rightarrow \mathcal{D}, i = 1, \dots, n, h_i: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}, i = 1, \dots, p$  为逻辑函数.

在向量表达式下设  $\mathbf{x} = \times_{i=1}^n \mathbf{x}_i, \mathbf{u} = \times_{i=1}^m \mathbf{u}_i$  及  $\mathbf{y} = \times_{i=1}^p \mathbf{y}_i$ . 利用定理 3 可知<sup>[25-26]</sup>:

定理 4. 利用向量表达式, 则

1) 式 (18) 可表示为

$$\mathbf{x}(t+1) = L\mathbf{x}(t) \quad (20)$$

这里  $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$ .

2) 式 (19) 可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = L\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = H\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (21)$$

这里  $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^{m+n}}, H \in \mathcal{L}_{2^p \times 2^n}$ . 式 (20) 和 (21) 分别称为式 (18) 和 (19) 的代数形式,  $L$  称为其结构矩阵或状态转移矩阵.

例 6. 1) 布尔网络 (16) 有代数表达式 (20), 其中

$$L = \delta_8[3\ 7\ 7\ 8\ 1\ 5\ 5\ 6]$$

2) 布尔控制网络 (17) 有代数表达式 (21), 其中

$$\begin{aligned} L &= \delta_8[1\ 1\ 5\ 5\ 2\ 2\ 6\ 6\ 1\ 3\ 5\ 7\ 2\ 4\ 6\ 8 \\ &\quad 5\ 5\ 5\ 5\ 6\ 6\ 6\ 6\ 5\ 7\ 5\ 7\ 6\ 8\ 6\ 8] \\ H &= \delta_2[2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1] \end{aligned}$$

注 3. 将式 (18) 和 (19) 与式 (20) 和 (21) 相比, 式 (20) 和 (21) 的优越性在于, 在它们的动态表达式中只涉及到代数运算, 完全避开了逻辑运算. 作者以为, 自然界的动态演化过程大致可分为两类: 一类是基于数量变化的, 如行星运动、波传播、热传导等. 另一类是基于逻辑过程的, 如博弈、基因调控等. 对前者, 人们发展了大量有效的数学工具来处理它, 如微分方程、差分方程等. 而对后者, 却显得十分无力. 半张量积将逻辑动态 (控制) 系统转化为普通离散时间系统, 从而使经典数学工具能够用于逻辑系统, 这是一个关键的步骤.

## 4 布尔网络的拓扑结构

布尔网络只有有限状态, 其轨线一定要进入一个不动点或极限环. 因此, 不动点与极限环是布尔网络的基本拓扑特性. 探讨布尔网络不动点与极限环的文章不少, 如文献 [6-7]. 文献 [6-7] 给出的研究布尔网络不动点和极限环的方法只适用于具体的网络. 文献 [25] 以半张量积作为主要工具, 将布尔网络转化为离散线性形式 (20), 得到了布尔网络不动点与极限环的显式表达.

定义 3. 考虑系统 (19), 记输入-状态乘积空间为

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(\mathbf{U}, \mathbf{X}) \mid \mathbf{U} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{D}^p, \\ &\quad \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}^n\} \end{aligned}$$

其中,  $\mathcal{S}$  的势  $|\mathcal{S}| = 2^{m+n}$ .

1) 令  $\mathcal{S}_i = (\mathbf{U}^i, \mathbf{X}^i) \in \mathcal{S}, \mathcal{S}_j = (\mathbf{U}^j, \mathbf{X}^j) \in \mathcal{S}$ . 记  $\mathbf{U}^i = (u_1^i, \dots, u_m^i), \mathbf{X}^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$ .  $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j)$  称为一个有向边, 如果  $\mathbf{X}^i, \mathbf{U}^i, \mathbf{X}^j$  满足式 (18) 和 (19). 确切地说,

$$x_k^j = f_k(x_1^i, \dots, x_n^i, u_1^i, \dots, u_m^i), \quad k = 1, \dots, n$$

所有边的集合记为  $\mathcal{E} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ .

2)  $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$  构成一个有向图, 称为输入-状态转移图.

3)  $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_\ell)$  被称为一条路径, 如果  $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_{i+1}) \in \mathcal{E}, i = 1, 2, \dots, \ell - 1$ .

4) 一条路径  $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots)$  被称为极限环, 如果对所有  $i, \mathcal{S}_{i+\ell} = \mathcal{S}_i$ , 最小的  $\ell$  称为极限环的长度. 特别地, 长度为 1 的极限环称为不动点.

5) 一个极限环  $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_\ell), \mathcal{S}_i = (\mathbf{U}^i, \mathbf{X}^i)$  被称为简单环 (Simple cycle), 如果对任意  $1 \leq i < j \leq \ell, \mathbf{X}^i \neq \mathbf{X}^j$ .

注 4. 系统 (18) 可视为系统 (19) 的特殊情况, 因此, 上述定义同样可用. 但此时  $m = 0$ , 输入-状态转移图变为状态转移图.

定理 5. 1) 对于布尔网络 (18), 它的代数形式为式 (20).  $\delta_{2^n}^i$  是式 (20) 的不动点当且仅当结构矩阵  $L$  的对角元  $l_{ii} = 1$ . 因此, 布尔网络 (18) 的不动点数目为  $N_e$ ,

$$N_e = \text{tr}(L) \quad (22)$$

2) 记长度为  $s$  的极限环的数目为  $N_s$ , 则有

$$\begin{cases} N_1 = N_e \\ \text{tr}(L^s) - \sum_{t \in \mathcal{P}(s)} t N_t \\ N_s = \frac{\quad}{s}, \quad 2 \leq s \leq 2^n \end{cases} \quad (23)$$

其中,  $\mathcal{P}(s)$  为  $s$  的真因子集合,  $s \in \mathbf{Z}^+$ . 如  $\mathcal{P}(6) = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{P}(10) = \{1, 2, 5\}$ .

对于布尔控制网络也有类似结果. 布尔控制网络 (19) 的输入状态空间中的顶点可以表示为  $\{\delta_{2^{m+n}}^i | i = 1, \dots, 2^{m+n}\}$ , 定义其输入状态关联矩阵为  $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_{ij})$ , 其中

$$\mathcal{J}_{ij} = \begin{cases} 1, & (\delta_{2^{m+n}}^j, \delta_{2^{m+n}}^i) \in \mathcal{E} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

我们发现, 布尔控制网络 (19) 的输入状态关联矩阵  $\mathcal{J}$ , 与其状态转移矩阵  $L$  具有如下关系:

$$\mathcal{J} = \left. \begin{matrix} L \\ L \\ \vdots \\ L \end{matrix} \right\} 2^m \in \mathcal{B}_{2^{m+n} \times 2^{m+n}} \quad (24)$$

可以证明, 如果  $\mathcal{J}$  的行是周期的, 则  $\mathcal{J}^s$  的行也具有同样的周期, 即

$$\mathcal{J}^s = \left. \begin{matrix} \mathcal{J}_0^s \\ \mathcal{J}_0^s \\ \vdots \\ \mathcal{J}_0^s \end{matrix} \right\} 2^m \quad (25)$$

其中,  $\mathcal{J}_0^s$  称为  $\mathcal{J}^s$  的基本块矩阵, 不难证明

$$\mathcal{J}_0^{s+1} = M^s L \quad (26)$$

其中,  $M = \sum_{i=1}^{2^m} \text{Blk}_i(\mathcal{J}_0) = \sum_{i=1}^{2^m} \text{Blk}_i(L)$ .

**定理 6.** 考虑布尔控制网络 (19).

1) 输入状态图中不动点的个数为

$$N_1 = \sum_{i=1}^{2^m} \text{tr}(\text{Blk}_i(\mathcal{J}_0)) = \text{tr}(M) \quad (27)$$

2) 长度为  $s$  的极限环的个数可以递推得到

$$N_s = \frac{\text{tr}(M^s) - \sum_{k \in \mathcal{P}(s)} k N_k}{s}, \quad 2 \leq s \leq 2^{m+n} \quad (28)$$

### 5 能控、能观性与实现

在线性系统理论中, 能从系统的能控能观矩阵直接判断系统是否能控能观. 对于布尔控制系统, 也可以定义相应的能控性矩阵、能观测矩阵. 为此, 我们先要定义布尔矩阵的布尔乘法及布尔幂.

1) 设  $\alpha, \beta, \alpha_i \in \mathcal{D}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 则布尔加

法定义为

$$\begin{cases} \alpha +_{\mathcal{B}} \beta = \alpha \vee \beta, \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_n \end{cases} \quad (29)$$

2) 设  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{B}_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{B}_{n \times p}$ . 则布尔乘法定义为

$$A \times_{\mathcal{B}} B = C \in \mathcal{B}_{m \times p} \quad (30)$$

其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p$$

3) 设  $A \prec_t B$  ( $A \succ_t B$ ). 则  $A$  和  $B$  的布尔乘法定义为

$$\begin{aligned} A \times_{\mathcal{B}} B &= (A \otimes I_t) \times_{\mathcal{B}} B \\ (A \times_{\mathcal{B}} B) &= A \times_{\mathcal{B}} (B \otimes I_t) \end{aligned} \quad (31)$$

4) 设  $A \times_{\mathcal{B}} A$  有定义. 则布尔幂定义为

$$A^{(k)} = \underbrace{A \times_{\mathcal{B}} A \times_{\mathcal{B}} \dots \times_{\mathcal{B}} A}_k$$

首先将布尔控制网络 (19) 表示为代数形式 (21). 利用式 (24) ~ (26), 定义能控性矩阵为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_C &= \sum_{s=1}^{2^{m+n}} \sum_{i=1}^{2^m} \text{Blk}_i(\mathcal{J}_0^{(s)}) = \\ & \sum_{s=1}^{2^{m+n}} M^{(s)} \in \mathcal{B}_{2^n \times 2^n} \end{aligned} \quad (32)$$

记  $\mathcal{M}_C = (c_{ij})$ . 我们有:

**定理 7.** 考虑布尔控制网络系统 (19).

1) 从  $\delta_{2^n}^j$  出发状态  $\delta_{2^n}^i$  是可达的, 当且仅当  $c_{ij} > 0$ ;

2) 系统 (19) 在状态  $\delta_{2^n}^j$  是能控的, 当且仅当  $\text{Col}_j(\mathcal{M}_C) > 0$ ;

3) 系统 (19) 是能控的, 当且仅当  $\mathcal{M}_C > 0$ .

需要注意, 因为  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$  是实矩阵,  $A > 0$  是指  $A$  是正的, 即对任意的  $i, j$ ,  $a_{i,j} > 0$ .

将  $L$  等分为  $2^m$  块

$$L = [\text{Blk}_1(L), \text{Blk}_2(L), \dots, \text{Blk}_{2^m}(L)] = [B_1, B_2, \dots, B_{2^m}],$$

其中,  $B_i \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$ ,  $i = 1, \dots, 2^m$ .

定义一组矩阵集合  $\Omega_i \in \mathcal{L}_{2^p \times 2^n}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  (19) 在新的坐标系下有下面的 Kalman 分解形式

$$\begin{cases} \Omega_0 = \{H\} \\ \Omega_1 = \{HB_i | i = 1, 2, \dots, 2^m\} \\ \vdots \\ \Omega_s = \{HB_{i_1}B_{i_2} \cdots B_{i_s} | i_1, \dots, i_s = 1, \dots, 2^m\} \\ \vdots \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{z}^1(t+1) = F^1(\mathbf{z}^1(t), \mathbf{z}^3(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{z}^2(t+1) = F^2(\mathbf{z}^1(t), \mathbf{z}^2(t), \mathbf{z}^3(t), \mathbf{z}^4(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{z}^3(t+1) = F^3(\mathbf{z}^3(t)) \\ \mathbf{z}^4(t+1) = F^4(\mathbf{z}^3(t), \mathbf{z}^4(t)) \\ y_s(t) = h_s(\mathbf{z}^1(t), \mathbf{z}^3(t)), \quad s = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (35)$$

可以证明存在  $s$ , 使得

$$\Omega_{s+1} \subset \bigcup_{k=1}^s \Omega_k$$

记  $s^*$  为使上式成立的最小正整数. 从  $\Omega_i$  中分别选取矩阵  $\Gamma_i$ , 比如

$$\Gamma_0 = H, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} HB_1 \\ HB_2 \\ \vdots \\ HB_{2^m} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} HB_1B_1 \\ HB_1B_2 \\ \vdots \\ HB_{2^m}B_{2^m} \end{bmatrix}, \quad \dots$$

定义布尔控制系统 (19) 的能观测矩阵为

$$\mathcal{M}_O = \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_{s^*} \end{bmatrix} \quad (33)$$

**定理 8.** 设布尔控制系统 (19) 是能控的. 那么系统 (19) 是能观的, 当且仅当

$$\text{rank}(\mathcal{M}_O) = 2^n \quad (34)$$

以下是关于布尔控制系统的 Kalman 分解. 记  $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{O}$ 、 $\mathcal{C}_c$ 、 $\mathcal{O}_c$  分别为布尔控制系统 (19) 的能控、能观、不能控、不能观子空间. 设

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathcal{C} \cap \mathcal{O} = D^n \setminus (\mathcal{C}_c \cup \mathcal{O}_c) \\ V_2 &= \mathcal{C} \cap \mathcal{O}_c = (\mathcal{C}_c \cup \mathcal{O}_c) \setminus \mathcal{C}_c \\ V_3 &= \mathcal{C}_c \cap \mathcal{O} = \mathcal{C}_c \setminus (\mathcal{C}_c \cap \mathcal{O}_c) \\ V_4 &= \mathcal{C}_c \cap \mathcal{O}_c \end{aligned}$$

**定理 9.** 如果  $\mathcal{C}_c$ 、 $\mathcal{O}_c$ 、 $\mathcal{C}_c \cup \mathcal{O}_c$ 、 $\mathcal{C}_c \cap \mathcal{O}_c$  都是  $\mathcal{X}$  的正规子空间, 那么存在一个坐标变换, 使得系统

其中,  $\mathbf{z}^i(t) \in V_i$ ,  $V_1$  是能控能观子空间,  $V_2$  是能控不能观子空间,  $V_3$  是不能控能观子空间,  $V_4$  是不能控不能观子空间. 分解形式 (35) 在坐标变换等价意义下是唯一的.

更多的相关结果见文献 [27–30].

### 6 子空间与解耦

关于布尔 (控制) 网络的状态空间与子空间的详细讨论见文献 [31]. 下面介绍一些基本概念.

**定义 4.** 1) 设  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  为一组独立逻辑变量 (如布尔网络结点). 记状态空间为  $\mathcal{X} = \mathcal{F}_\ell\{x_1, \dots, x_n\}$ .  $\{x_1, \dots, x_n\}$  称为  $\mathcal{X}$  的一个基底.

2) 如果  $Z = \{z_1, \dots, z_n\} \subset \mathcal{X}$  且  $\mathcal{X} = \mathcal{F}_\ell\{z_1, \dots, z_n\}$ , 则  $\{z_1, \dots, z_n\}$ , 也是  $\mathcal{X}$  的一个基底.  $X \rightarrow Z$  称为一个坐标变换.

3) 设  $y_1, \dots, y_k \in \mathcal{X}$ , 则  $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_\ell\{y_1, \dots, y_k\}$  称为  $\mathcal{X}$  的一个子空间.

4)  $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_\ell\{y_1, \dots, y_k\}$  称为一个正规子空间, 如果存在  $y_{k+1}, \dots, y_n \in \mathcal{X}$ , 使得  $\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n\}$  成为  $\mathcal{X}$  的基底.

正规子空间极其重要, 下面考虑如何检验它. 设  $y_1, \dots, y_k \in \mathcal{X}$ , 则  $y_i$  可表示为

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, k \quad (36)$$

记  $\mathbf{y} = \times_{i=1}^k \mathbf{y}_i$ ,  $\mathbf{x} = \times_{i=1}^n \mathbf{x}_i$ . 则式 (36) 可表示为

$$\mathbf{y} = E\mathbf{x}, \quad E \in \mathcal{L}_{2^s \times 2^n} \quad (37)$$

记矩阵  $E$  为

$$E = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \cdots & \ell_{12^n} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \cdots & \ell_{22^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{2^s 1} & \ell_{2^s 2} & \cdots & \ell_{2^s 2^n} \end{bmatrix}$$

我们有以下结果.

**定理 10.** 设  $y_1, \dots, y_k$  ( $k \leq n$ ) 满足式 (37).  $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_\ell\{y_1, \dots, y_k\}$  为正规子空间 ( $\{y_1, \dots, y_k\}$  为

其正规基底), 当且仅当系数矩阵  $E$  满足

$$\sum_{i=1}^{2^n} \ell_{j,i} = 2^{n-k}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^k \quad (38)$$

解耦问题有很多, 下面以干扰解耦为例<sup>[32]</sup>. 考虑系统

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), \\ \quad \xi_1(t), \dots, \xi_q(t)) \\ \quad \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), \\ \quad \xi_1(t), \dots, \xi_q(t)) \\ y_j(t) = h_j(x(t)), \quad j = 1, \dots, p \end{cases} \quad (39)$$

这里  $\xi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$  为干扰. 所谓干扰解耦, 就是要寻找控制, 使得在闭环系统中干扰不影响输出.

**定义 5.** 令  $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_\ell\{y_1, \dots, y_p\}$ .  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$  称为  $\mathcal{Y}$  友好子空间, 如果  $\mathcal{S}$  为正规子空间, 且

$$y_i \in \mathcal{S}, \quad i = 1, \dots, p$$

寻找  $\mathcal{Y}$  友好子空间的算法在文献 [32] 中给出. 设  $\mathcal{S}$  为  $\mathcal{Y}$  友好子空间. 则存在坐标  $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_n\}$ , 使  $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{F}_\ell\{z_{k+1}, \dots, z_n\}$  为  $\mathcal{S}$ . 系统 (39) 在这个坐标下可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{z}^1(t+1) = F_1(z_1(t), \dots, z_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), \\ \quad \xi_1(t), \dots, \xi_q(t)) \\ \mathbf{z}^2(t+1) = F_2(z_1(t), \dots, z_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), \\ \quad \xi_1(t), \dots, \xi_q(t)) \\ y_j(t) = h_j(\mathbf{z}^2(t)), \quad j = 1, \dots, p \end{cases} \quad (40)$$

**定理 11.** 考虑系统 (39). 干扰解耦问题可解, 当且仅当

- 1) 存在  $\mathcal{Y}$  友好子空间, 使系统变为  $\mathcal{Y}$  友好形式 (40);
- 2) 存在反馈控制

$$u_i(t) = \phi_i(\mathbf{z}(t)), \quad i = 1, \dots, m$$

使

$$\begin{aligned} F_2(z_1(t), \dots, z_n(t), \phi_1(\mathbf{z}(t)), \dots, \phi_m(\mathbf{z}(t)), \\ \xi_1(t), \dots, \xi_q(t)) = \tilde{F}_2(\mathbf{z}^2(t)) \end{aligned}$$

## 7 布尔网络的稳定性与镇定

本节考虑利用文献 [33] 提出的向量距离来研究布尔系统的稳定与镇定问题.

首先给出布尔矩阵上一些布尔运算的定义.

**定义 6.** 1) 设  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{B}_{m \times n}$ ,  $\sigma$  是一个一元逻辑算子. 则

$$\sigma A = (\sigma a_{ij}) \quad (41)$$

2) 设  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{B}_{m \times n}$ ,  $\sigma$  是一个二元逻辑算子. 则

$$A\sigma B = (a_{ij}\sigma b_{ij}) \quad (42)$$

3) 设  $\alpha \in \mathcal{D}$ . 则  $\alpha$  与  $A \in \mathcal{B}_{m \times n}$  的标量乘法定义为

$$\alpha A = A\alpha = \alpha \wedge A \quad (43)$$

特别地, 设  $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ , 则  $\alpha\beta = \alpha \wedge \beta$ .

下面给出布尔矩阵向量距离的定义.

**定义 7.** 设  $A, B \in \mathcal{B}_{m \times n}$ . 则  $A$  和  $B$  的向量距离  $D_v(A, B)$  定义为

$$D_v(A, B) = A \vee B \quad (44)$$

向量距离满足下面的性质.

**命题 4.** 设  $A, B, C \in \mathcal{B}_{m \times n}$ . 则向量距离满足以下性质

- 1)  $D_v(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- 2)  $D_v(A, B) = D_v(B, A)$
- 3)  $D_v(A, C) \leq D_v(A, B) +_{\mathcal{B}} D_v(B, C)$

考虑布尔系统 (18) 和布尔控制系统 (19). 记  $\mathcal{X} = \mathcal{D}^n$  为它们的状态空间. 点  $X \in \mathcal{X}$  可以表示为  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ . 考虑逻辑映射  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , 其形式如下

$$\begin{cases} z_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \quad \vdots \\ z_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (46)$$

将它简记为

$$\mathbf{Z} = F(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}, \mathbf{Z} \in \mathcal{X} \quad (47)$$

对于形如式 (18) 的布尔网络的逻辑映射, 有

$$\mathbf{X}_{t+1} = F(\mathbf{X}_t) \quad (48)$$

**定义 8.** 逻辑映射  $F$  的关联矩阵  $\mathcal{I}(F) = (b_{ij})$  是一个  $n \times n$  矩阵, 定义如下

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & x_j(t+1) \text{ 依赖于 } x_i(t) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

现在考虑布尔系统稳定与镇定问题.



**定义 9.** 1) 如果存在一个不动点  $\mathbf{X}^e$  和一个固定的时间  $T_0$ , 使得对于任意的初始状态  $\mathbf{X}(0) = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , 都有  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^e, t \geq T_0$ , 则称系统 (18) 是 (全局) 能稳的.

2) 如果存在一个状态反馈  $\mathbf{u}(t) = g(\mathbf{x}(t))$ , 使得闭环系统是稳定的, 则称系统 (19) 是 (全局) 能镇定的.

**定理 12.** 设  $\xi$  是式 (18) 的一个不动点, 则

$$D_v(\mathbf{X}(k), \xi) \leq [\mathcal{I}(F)]^{(k)} \times D_v(\mathbf{X}(0), \xi) \quad (49)$$

特别地, 如果关联矩阵是幂零的, 即存在  $k$  使得  $[\mathcal{I}(F)]^{(k)} = 0$ , 则系统 (18) 是 (全局) 能稳的.

**定理 13.** 系统 (19) 是 (全局) 能镇定的, 如果可以找到一个反馈  $\mathbf{u}(t) = \varphi(\mathbf{x}(t))$ , 使得闭环系统变为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(\mathbf{x}(t), \varphi(\mathbf{x}(t))) = \text{const} \\ x_2(t+1) = f_2(\mathbf{x}(t), \varphi(\mathbf{x}(t))) = \tilde{f}_2(x_1(t)) \\ x_3(t+1) = f_3(\mathbf{x}(t), \varphi(\mathbf{x}(t))) = \tilde{f}_3(x_1(t), x_2(t)) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(\mathbf{x}(t), \varphi(\mathbf{x}(t))) = \tilde{f}_n(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)) \end{cases} \quad (50)$$

且式 (50) 有一个不动点.

关于布尔系统的稳定与镇定更详细的讨论见文献 [34].

### 8 最优控制

本节考虑布尔控制系统 (19) 的无穷时域最优控制问题, 即对该系统设计控制律  $\mathbf{u}(t)$ , 极大化目标函数

$$J(\mathbf{u}) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (51)$$

相关模型与详细讨论见文献 [35].

**定理 14.** 对于布尔控制系统 (19), 存在最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  使目标函数 (51) 极大化, 并且相应的最优路径  $\mathbf{s}^*(t) = \mathbf{u}^*(t)\mathbf{x}^*(t)$  在有限步后成为周期的.

对任一长度为  $\ell$  的极限环  $C$ , 记

$$P(C) = \frac{1}{\ell} \sum_{t=1}^{\ell} P(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

**命题 5.** 任意极限环  $C$  包含一个简单环  $C_s$  满足:

$$P(C_s) \geq P(C)$$

由上面的定理及性质可以看出, 存在一个最优路径最终会进入一个简单环. 这样, 布尔控制系统的最优控制问题就转化为了寻找最优简单环的问题. 下面给出一个简单的数值算例.

**例 7.** 考虑无穷重复的囚徒困境. 玩家 1 ( $P_1$ ) 是机器, 玩家 2 ( $P_2$ ) 是人. 双方的行动可以是 C (合作) 或 D (背叛). 收益矩阵如表 2 所示.

表 2 收益矩阵  
Table 2 Payoff bimatrix

$P_1 \backslash P_2$	C	D
C	3, 3	0, 5
D	5, 0	1, 1

假设机器的策略固定为“一报还一报”, 即第一步为合作, 以后每步仅当上一步人的行动为“D”时机器才也选择“D”. 记机器的行动为  $x(t)$ , 人的行动为  $u(t)$ ,  $C \sim \delta_2^1, D \sim \delta_2^2$ , 上述过程可以用布尔控制系统描述为

$$\mathbf{x}(t+1) = L\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t) \quad (52)$$

其中

$$L = \delta_2[1 \ 1 \ 2 \ 2]$$

人要选择行动  $\mathbf{u}(t)$ , 极大化自己的收益

$$J(\mathbf{u}) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

其中

$$P_h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{u}^T(t) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

因为简单环的长度不会超过 2, 我们不用再计算长度为 2 以上的极限环. 通过定理 6, 可以找到所有长度不超过 2 的极限环:

$$C_1 = \delta_2 \times \delta_2((1, 1))$$

$$C_2 = \delta_2 \times \delta_2((2, 2))$$

$$C_3 = \delta_2 \times \delta_2((1, 2), (2, 1))$$

并且这些极限环都是简单环.

容易看出  $C_1 = \delta_2 \times \delta_2((1, 1))$  是最优的. 因为机器的第一步行动是合作, 即初值  $\mathbf{x}(0) = \delta_2^1$ , 令  $\mathbf{u}(0) = \delta_2^1$ , 则可从初值直接进入最优环. 最后我们还可以得到人可选的最优策略为

$$G^* = \delta_2[1 \ * \ * \ *]$$

其中, “\*” 可以任意选取. 比如可取  $G^* = \delta_2[1 \ 1 \ 1 \ 1]$ , 即无论如何人总合作, 或者  $G^* = \delta_2[1 \ 2 \ 1 \ 2]$ , 即也选取“一报还一报”策略.

### 9 布尔网络辨识

布尔网络辨识包括两种: 一是无控制布尔网络, 由观测到的状态辨识它的动态模型<sup>[36]</sup>, 另一种是布尔控制网络, 由输入-输出数据辨识系统模型<sup>[37]</sup>. 我们仅举前者的一个例子说明.

最小入度 (Least in-degree) 实现指根据观测到的数据来寻找一个入度最小的实现. 设一个布尔网络为

$$x_i(t+1) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, \dots, n \quad (53)$$

它的分量代数形式为

$$x_i(t+1) = M_i x, \quad i = 1, \dots, n \quad (54)$$

这里,  $M_i \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$ . 我们的辨识步骤是: 先辨识  $M_i$ , 再由  $M_i$  构造  $f_i$ . 定义

$$M_{i,j} = M_i W_{[2, 2^{j-1}]}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (55)$$

然后将它等分成两块:

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} M_{i,j}^1 & M_{i,j}^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

有以下结果.

**命题 6.**  $f_i$  具有不依赖于  $x_j$  的实现, 当且仅当

$$M_{i,j}^1 = M_{i,j}^2 \quad (57)$$

对未确定列有解.

辨识的过程是: 先用已知数据辨识出部分参数. 然后, 只要式 (57) 有解, 就假定  $f_i$  具有不依赖于  $x_j$ , 从而找到最小入度的  $f_i$ . 我们给出一个数值例子.

**例 8.** 观测 4 个细胞的变化如图 3 所示.



图 3 例 8 中的实验数据  
Fig. 3 Experiment data of Example 8

记白 (良性) 为  $\delta_2^1$ , 黑 (恶性) 为  $\delta_2^2$ , 且  $x = \times_{i=1}^4 x_i$ . 则 6 个状态值为

$$\begin{aligned} x(0) &= \delta_{16}^{12}, & x(1) &= \delta_{16}^{16}, & x(2) &= \delta_{16}^8, \\ x(3) &= \delta_{16}^2, & x(4) &= \delta_{16}^{10}, & x(5) &= \delta_{16}^{12} \end{aligned}$$

记结点的动态方程为

$$x_i(t+1) = f_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$$

其分量代数形式为

$$x_i(t+1) = M_i x(t), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

这里  $M_i \in \mathcal{L}_{2 \times 16}$ ,  $x(t) = x_1(t) \times \dots \times x_4(t)$ .

先考虑  $M_1$ , 由已知数据可得

$$M_1 = \delta_2[* 2 * * * * 1 * 2 * 2 * * * 1]$$

令  $M_1^1 = M_1^2$ , 可得

$$M_1^1 = M_1^2 = \delta_2[* 2 * 2 * * * 1]$$

因此,  $x_1(t+1)$  不依赖于  $x_1(t)$ , 方程变为

$$x_1(t+1) = \delta_2[* 2 * 2 * * * 1]x_2(t)x_3(t)x_4(t)$$

将  $M_1^1$  分为两部分, 得以下方程:

$$\delta_2[* 2 * 2] = \delta_2[* * * 1]$$

它无解, 故  $x_1(t+1)$  不依赖于  $x_2(t)$ .

考虑

$$M_{1,2} = M_1^1 W_{[2,2]} = \delta_2[* 2 * * * 2 * 1]$$

那么

$$\delta_2[* 2 * *] = \delta_2[* 2 * 1]$$

有解

$$\delta_2[* 2 * 1]$$

于是方程简化为

$$x_1(t+1) = \delta_2[* 2 * 1]x_2(t)x_4(t)$$

最后, 考虑  $x_4(t)$ . 由于

$$\delta_2[* 2 * 1]W_{[2,2]} = \delta_2[* * 2 1]$$

并且

$$\delta_2[* *] = \delta_2[2 1]$$

有解

$$\delta_2[2 1]$$

最后得到

$$x_1(t+1) = \delta_2[2 1]x_2(t)$$

其逻辑方程为

$$x_1(t+1) = \neg x_2(t)$$

用同样的方法简化另外三个方程, 最后可得到网络动态方程为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \neg x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_4(t) \vee x_1(t) \\ x_3(t+1) = x_1(t) \\ x_4(t+1) = x_3(t) \bar{\vee} x_4(t) \end{cases} \quad (58)$$

## 10 结论

布尔网络的分析与控制是一个极具挑战性的新方向, 许多理论问题有待解决. 由于它产生于系统生物学, 这使它成为一个具有重大应用价值的研究课题. 我们的研究表明: 矩阵的半张量积是研究布尔网络的强有力工具. 有兴趣的作者可参见文献 [29]. 同时, 我们相信: 矩阵的半张量积是计算机时代对付复杂计算的一个便捷而有力的工具, 具有广泛的应用前景.

## References

- Waldrop M M [Author], Chen Ling [Translator]. *Complexity*. Beijing: San Lian Bookstore, 1997  
(Waldrop M M [著], 陈玲 [译]. 复杂. 北京: 三联书店, 1997)
- Kauffman S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, **22**(3): 437–467
- Kauffman S A [Author], Li Shao-Ming, Xu Bin [Translator]. *At Home in the Universe*. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 2003  
(Kauffman S A [著], 李绍明, 徐彬 [译]. 宇宙为家. 长沙: 湖南科技出版社, 2003)
- Kauffman S A. *The Origins of Order: Self-organization and Selection in Evolution*. New York: Oxford University Press, 1993
- Aldana M. Boolean dynamics of networks with scale-free topology. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2003, **185**(1): 45–66
- Farrow C, Heidel J, Maloney H, Rogers J. Scalar equations for synchronous Boolean networks with biological applications. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, **15**(2): 348–354
- Heidel J, Maloney H, Farrow C, Rogers J. Finding cycles in synchronous Boolean networks with applications to biochemical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, **13**(3): 535–552
- Albert R, Barabasi A. Dynamics of complex systems: scaling laws or the period of Boolean networks. *Physical Review Letters*, 2000, **84**(24): 5660–5663
- Akutsu T, Miyano S, Kuhara S. Inferring qualitative relations in genetic networks and metabolic pathways. *Bioinformatics*, 2000, **16**(8): 727–734
- Huang S, Ingber D E. Shape-dependent control of cell growth, differentiation, and apoptosis: switching between attractors in cell regulatory networks. *Experimental Cell Research*, 2000, **261**(1): 91–103
- Huang S. *Regulation of cellular states in mammalian cells from a genome wide view. Gene Regulation and Metabolism*. Cambridge: The MIT Press, 2002. 181–220
- Shmulevich I, Dougherty E R, Kim S, Zhang W. Probabilistic Boolean networks: a rule-based uncertainty model for gene regulatory networks. *Bioinformatics*, 2002, **18**(2): 261–274
- Akutsu T, Hayashida M, Ching W K, Ng M K. Control of Boolean networks: hardness results and algorithms for tree structured networks. *Journal of Theoretical Biology*, 2007, **244**(4): 670–679
- Cheng D Z. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgan's problem. *Science in China (Series F)*, 2001, **44**(3): 195–212
- Cheng D Z, Hu X M, Wang Y Z. Non-regular feedback linearization of nonlinear systems via a normal form algorithm. *Automatica*, 2004, **40**(3): 439–447
- Cheng D Z, Ma J, Lu Q, Mei S W. Quadratic form of stable sub-manifold for power systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2004, **14**(9–10): 773–788
- Cheng D Z, Yang G W, Xi Z R. Nonlinear systems possessing linear symmetry. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, **17**(1): 51–81
- Cheng D Z, Dong Y L. Semi-tensor product of matrices and its some applications to physics. *Methods and Applications of Analysis*, 2003, **10**(4): 565–588
- Cheng D Z. Some applications of semitensor product of matrices in algebra. *Computers and Mathematics with Applications*, 2006, **52**(6–7): 1045–1066
- Cheng Dai-Zhan, Qi Hong-Sheng. *Semi-tensor Product of Matrices: Theory and Applications*. Beijing: Science Press, 2007  
(程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积: 理论与应用. 北京: 科学出版社, 2007)
- Cheng D Z. Semi-tensor product of matrices and its applications: a survey. In: Proceedings of the 4th International Congress of Chinese Mathematicians. Hangzhou, China: Higher Education Press, 2007. 641–668
- Mei Sheng-Wei, Liu Feng, Xue An-Cheng. *A Semi-tensor Product Approach to Transient Analysis of Power Systems*. Beijing: Tsinghua University Press, 2010  
(梅生伟, 刘锋, 薛安成. 电力系统暂态分析中的半张量积方法. 北京: 清华大学出版社, 2010)
- Cheng D Z, Qi H S. Matrix expression of logic and fuzzy control. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decisions and Control. Washington D. C., USA: IEEE, 2005. 3273–3278
- Boothby W M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry (Second Edition)*. New York: Academic Press, 1986
- Cheng D Z, Qi H S. A linear representation of dynamics of Boolean networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(10): 2251–2258
- Cheng D Z. Input-state approach to Boolean networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2009, **20**(3): 512–521
- Cheng D Z, Qi H S. Controllability and observability of Boolean control networks. *Automatica*, 2009, **45**(7): 1659–1667
- Zhao Y, Qi H S, Cheng D Z. Input-state incidence matrix of Boolean control networks and its applications. *Systems and Control Letters*, 2010, **59**(12): 767–774
- Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach*. London: Springer, 2011

- 30 Cheng D Z, Li Z Q, Qi H S. Realization of Boolean control networks. *Automatica*, 2010, **46**(1): 62–69
- 31 Cheng D Z, Qi H S. State-space analysis of Boolean networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, **21**(4): 584–594
- 32 Cheng D Z. Disturbance decoupling of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(1): 2–10
- 33 Robert F [Author], Rokne J [Translator]. *Discrete Iterations: A Metric Study*. Berlin: Springer-Verlag, 1986
- 34 Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q, Liu J B. Stability and stabilization of Boolean networks. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, **21**(2): 134–156
- 35 Zhao Y, Li Z Q, Cheng D Z. Optimal control of logical control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, to be published
- 36 Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q. Model construction of Boolean network via observed data. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, **22**(4): 525–536
- 37 Cheng D Z, Zhao Y. Identification of Boolean control networks. *Automatica*, 2011, **47**(4): 702–710



**程代展** 1970年毕业于清华大学, 1981年于中国科学院研究生院获硕士学位, 1985年于美国华盛顿大学获得博士学位。自1990年起为中国科学院数学与系统科学研究院研究员。主要研究方向为非线性控制系统, 切换系统, 哈密尔顿系统, 逻辑动态系统和控制设计的数值实现。本文通信作者。

E-mail: dcheng@iss.ac.cn

(**CHENG Dai-Zhan** Professor at the Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences. He received his bachelor degree from Tsinghua University in 1970, the master degree from Graduate School, Chinese Academy of Sciences in 1981, and the

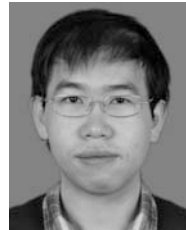
Ph.D. degree from Washington University, USA in 1985. His research interest covers nonlinear control systems, switched systems, Hamiltonian systems, logical dynamic systems, and numerical realization for control design. Corresponding author of this paper.)



**齐洪胜** 中国科学院数学与系统科学研究院助理研究员。2003年于安徽大学获得数学与应用数学专业学士学位, 2008年于中国科学院数学与系统科学研究院获得系统理论专业博士学位。主要研究方向为非线性控制和复杂系统。

E-mail: qihongsh@amss.ac.cn

(**QI Hong-Sheng** Assistant professor at the Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences. He received his bachelor degree in mathematics and applied mathematics from Anhui University in 2003 and received the Ph.D. degree in systems theory from the Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences in 2008. His research interest covers nonlinear control and complex systems.)



**赵寅** 中国科学院数学与系统科学研究院博士研究生。2008年获得清华大学数学与应用数学专业学士学位。主要研究方向为逻辑动态系统, 复杂系统和博弈论。E-mail: zhaoyin@amss.ac.cn

(**ZHAO Yin** Ph.D. candidate at the Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences.

He received his bachelor degree in mathematics and applied mathematics from Tsinghua University in 2008. His research interest covers logical dynamic systems, complex systems, and game theory.)