

## 线性切换系统的积分不变性原理

林相泽<sup>1,2</sup> 邹云<sup>2</sup>

**摘要** 将积分不变性原理进行推广, 用来讨论线性切换系统的稳定性. 作为 LaSalle 不变性原理的推广, 文中推广的积分不变性原理无需构造 Lyapunov 函数, 而是利用系统输出的可积性, 讨论线性切换系统输出为零的状态集合的稳定性. 另外, 讨论了切换系统状态集合稳定性与切换信号之间的关系. 利用线性切换系统的可观性, 讨论了系统平衡点的渐近稳定性. 数值例子说明了文中方法的有效性.

**关键词** 线性切换系统, 积分不变性原理, 集合稳定, 可观测

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.00196

## An Integral Invariance Principle for Switched Linear Systems

LIN Xiang-Ze<sup>1,2</sup> ZOU Yun<sup>2</sup>

**Abstract** An integral invariance principle is extended to discuss the stability of switched linear systems. The integral invariance principle proposed in this paper can be viewed as an extension of the LaSalle invariance principle. The convergence of the solutions to a set in which the system outputs are zero is obtained by using the integrability of the system outputs instead of the Lyapunov function. Moreover, the relationship between the stability of the state set and the switching signals is discussed. Asymptotic stability of the equilibrium can be obtained under the condition that the switched linear systems are observable. Numerical examples are employed to verify the proposed method.

**Key words** Switched linear systems, integral invariance principle, set stability, observability

切换系统是由一系列连续动态子系统和一个逻辑切换控制器组成的一类复杂的非线性系统. 现有文献中, 切换系统稳定性的研究成果集中在利用 Lyapunov 稳定性理论对切换系统进行稳定性分析, 主要有公共 Lyapunov 函数法和多 Lyapunov 函数法两种方法.

利用公共 Lyapunov 函数可分析切换系统在任意切换序列下的稳定性<sup>[1-2]</sup>, 但是对于一般的切换系统, 公共 Lyapunov 函数可能不存在, 或者即使存在其构造亦非常困难, 目前只有针对特定系统的公共 Lyapunov 函数构造方法<sup>[3-6]</sup>. 利用多 Lyapunov 函数法可增加系统分析和设计的灵活性, 但是, 多 Lyapunov 函数法要为每个子系统构造一个或多个 Lyapunov 函数, 且需要比较切换时间点的 Lyapunov 函数值<sup>[3-10]</sup>, 因此需要一定切换系统解的信息, 有悖于 Lyapunov 直接法的思想.

鉴于 LaSalle 不变性原理<sup>[11]</sup> 在分析系统稳定性方面的优势, 目前很多学者推广 LaSalle 不变性

原理以适用于切换系统稳定性的研究, 如 Hespanha 利用多 Lyapunov 函数方法, 针对一类线性切换系统, 推广了 LaSalle 不变性原理<sup>[7]</sup>, 并将其进一步推广到非线性切换系统<sup>[8]</sup>; Bacciotti 等<sup>[12]</sup> 针对在具有滞留时间和依赖状态切换的切换信号作用下的非线性切换系统, 推广了 LaSalle 不变性原理, 构造的 Lyapunov 函数只需满足局部 Lipschitz 连续; Mancilla-Aguilar 和 Garcia<sup>[13]</sup> 针对一类非线性切换系统, 推广了 LaSalle 不变性原理, 能够分析一类切换系统不变集的结构; Cheng 等<sup>[14]</sup> 针对一类子系统 Lyapunov 稳定的线性切换系统, 推广了 LaSalle 不变性原理, 并应用其研究多智能体的一致性; Riedinger 等<sup>[15]</sup> 利用 LaSalle 不变性原理讨论了一类线性切换系统不变集的代数特性等.

利用微分包含或差分包含来研究混杂系统和切换系统不变性原理, 也是目前的一个研究热点, 如 Logemann 等<sup>[16]</sup> 利用 Meagre function 提出了微分包含的不变性原理, 并推广了 Babalat 引理; Shevitz 等<sup>[17]</sup> 提出了右端不连续系统的 LaSalle 不变性原理; Bacciotti 等<sup>[18-19]</sup> 提出了在 Filippov 解和 Carathéodory 解意义下的不变性原理等.

上述成果大都建立在 Lyapunov 函数基础上, 仍需构造 Lyapunov 函数. 作为对 LaSalle 不变性原理的推广, 积分不变性原理利用系统输出的可积性及系统的可观性来讨论稳定性, 避免了构造 Lyapunov 函数<sup>[20-22]</sup>. 为进一步研究切换系统的

收稿日期 2010-06-28 录用日期 2010-08-09  
Manuscript received June 28, 2010; accepted August 9, 2010  
国家自然科学基金 (60874007), 南京农业大学青年科技创新基金 (KJ09029) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60874007) and Youth Sci-Tech Innovation Fund, Nanjing Agricultural University (KJ09029)  
1. 南京农业大学工学院 南京 210031 2. 南京理工大学自动化学院 南京 210094  
1. College of Engineering, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210031 2. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094

变性原理, 本文主要工作就是推广适用于线性切换系统的积分不变性原理, 利用切换系统输出的可积性讨论线性切换系统的状态集合的稳定性, 同时可进一步根据切换系统的可观测性讨论平衡点的渐近稳定性.

利用本文推广的积分不变性原理讨论线性切换系统的稳定性, 仅利用系统输出的积分有界性即可判断系统有界轨迹的稳定性, 避免了构造 Lyapunov 函数的困难. 如果子系统都不稳定, 可能存在切换序列使得切换系统稳定, 但是目前基于 Lyapunov 函数的切换系统稳定性判据大多不能用来讨论这类切换系统的稳定性, 而利用文中推广的积分不变性原理可以讨论这类切换系统的稳定性. 同时, 积分不变性原理也适用于分析切换系统的稳定状态是一个状态集合 (如极限环<sup>[23-24]</sup>) 的情况.

另外, 在分析动态系统性能时, 往往不需要讨论所有轨迹的稳定性, 而是对某条感兴趣的轨迹分析其动态性能<sup>[21]</sup>, 因此, 对于切换系统往往只在某个切换序列作用下, 讨论切换系统轨迹的稳定性, 此时利用文中推广的线性切换系统的积分不变性原理, 易于利用数值算法帮助分析切换系统稳定性.

### 1 问题的提出

Morse 在文献 [20] 中提出利用连续线性系统的可观测性和输出可积性来讨论系统稳定性.

引理 1<sup>[20]</sup>. 如果线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

可观,  $x = 0$  渐近稳定等价于输出  $y = Cx$  在  $[0, \infty)$  上平方可积, 即  $\int_0^\infty \|y\|^2 dt < \infty$ .

利用 Byrnes 等的思想<sup>[21]</sup> 不难得到如下推论:

推论 1. 线性系统 (1) 的平衡点  $x = 0$  渐近稳定等价于对  $\forall 0 < p < \infty$ ,  $\int_0^\infty \|y\|^p dt < \infty$ .

证明. 详见附录 A. □

但是, 引理 1 (或推论 1) 的结论对于线性切换系统并不是自然成立的, 参见例 1 所示.

例 1. 具有如下两个子系统的切换系统

$$1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} x, \quad y = [0 \quad 2] x$$

$$2) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -3 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} x, \quad y = [0 \quad 2] x$$

从  $x_1(t_0) > 0$  出发, 取如下周期切换信号: 先取  $\sigma = 1$ , 子系统 1) 作用时间为  $\delta_k = 1/k$ , 然后取  $\sigma =$

2, 子系统 2) 作用时间为  $\Delta\delta_k = 2\delta_k/(15\delta_k + 8)$ .

从  $x_0 = (1, 0)^T$  出发,  $\int_0^\infty \|y\|^2 dt = 0.3296 < \infty$ , 但是, 当  $t \rightarrow \infty$ ,  $x_1(t) \rightarrow \infty$ ,  $x_2(t) \rightarrow 0$ , 仿真图如图 1 和图 2 所示, 例 1 详细分析见附录 B.

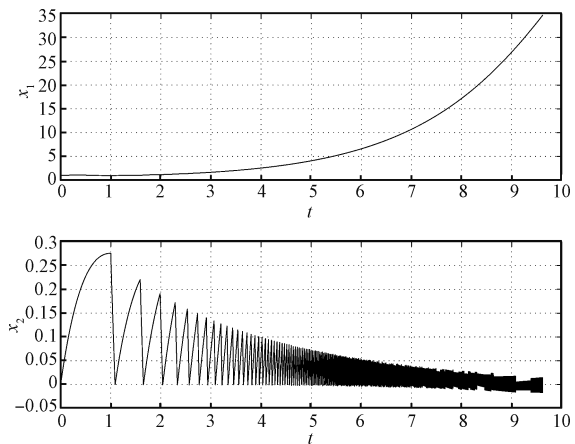


图 1 系统状态轨迹

Fig. 1 Trajectories of the system

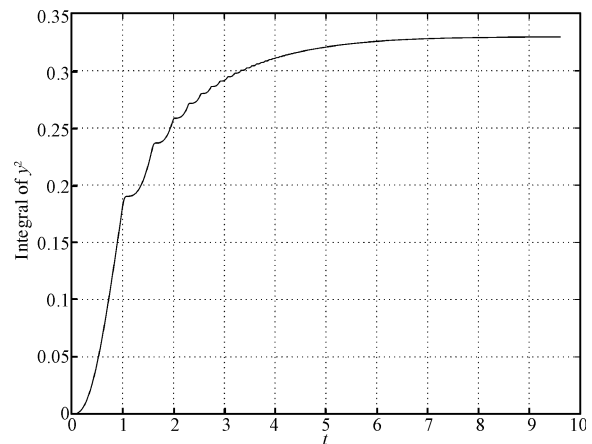


图 2 输出平方的积分

Fig. 2 Integral of output square

由例 1 不难看出, 虽然对于给定的切换序列, 切换系统输出平方可积, 且每个子系统都可观测, 但是系统并不渐近稳定, 而是发散的. 由此可见, 线性切换系统的稳定性与系统输出平方可积及子系统可观测性之间的关系, 并不能由引理 1 简单推知, 有必要详细讨论线性切换系统输出在  $[0, \infty)$  上的可积性、系统可观测性与系统稳定性之间的关系.

### 2 线性切换系统积分不变性原理

线性切换系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A_\sigma x \\ y = C_\sigma x \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $x \in \mathbf{R}^n$  为系统状态,  $y \in \mathbf{R}^m$  为系统输出,

$A_\sigma, C_\sigma$  为定常矩阵,  $\sigma(t)$  表示一个右端连续的逐段常值切换信号,  $\sigma(t) \in \mathbf{W} = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $N$  为子系统个数.

对于线性切换系统 (2), 如果  $C_\sigma = C$ , 那么

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_\sigma \mathbf{x} \\ \mathbf{y} = C \mathbf{x} \end{cases} \quad (3)$$

在这种情况下, 线性切换系统每个子系统有相同输出通道, 可以认为所有子系统共有 1 个输出通道.

为证明文中结论, 引入如下引理:

**引理 2**<sup>[25]</sup>. 设  $k$  为非负常数, 函数  $f(t), g(t)$  连续非负 ( $a \leq t \leq b$ ), 且  $f(t) \leq k + \int_a^t f(s)g(s)ds$ , 那么,  $f(t) \leq ke^{\int_a^t g(s)ds}$ .

### 2.1 任意切换信号的情形

下面给出线性切换系统 (3) 的积分不变性原理.

**定理 1.** 对于线性切换系统 (3), 如果对于任意切换序列  $\sigma(t)$ , 系统状态  $\mathbf{x}(t, t_0), t \geq 0$  有界, 且存在整数  $p > 0$ , 积分  $\int_0^\infty \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t, t_0))\|^p dt$  存在, 即  $\int_0^\infty \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t, t_0))\|^p dt < \infty$ , 那么系统状态  $\mathbf{x}(t, t_0)$  一致收敛于集合  $Z_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ .

**证明.** 由定理条件可知, 系统 (3) 状态有界.

令  $v(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)) = \int_s^\infty \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\|^p dt$ , 可知,  $v$  是非负有界函数. 对  $v$  求导可得  $\dot{v}(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)) = -\|\mathbf{y}(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0))\|^p \leq 0$ . 由于  $v$  连续单调非增, 因此,  $\inf_t v(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \eta$ , 那么存在  $\{t_n\}, t_n \rightarrow \infty$ , 使得  $\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ , 由此可得  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) = v(\mathbf{x}^*) = \eta$ .

由于  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n + t, \mathbf{x}_0)) - \lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0))] = 0$ , 那么

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [-\lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_{t_n}^{t_n+t} \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0))\|^p ds] &= \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [-\lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_0^t \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0))\|^p d\tau] &= \\ -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{y}_n(\tau) d\tau &= 0 \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{y}_n(\tau) = \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0))\|^p$ .

由于  $v(\mathbf{x}(t_n + t, \mathbf{x}_0)) = v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) + \int_0^t \dot{v}(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0)) d\tau \leq v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) + \int_0^t 0 d\tau \leq v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) + \int_0^t 0 \cdot v(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0)) d\tau$ , 两边取极限, 可得  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n + t, \mathbf{x}_0)) \leq \lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) + \lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_0^t 0 \cdot v(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0)) d\tau = \eta + \lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_0^t 0 \cdot v(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0)) d\tau$ . 由引理 2 可知,  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n + t, \mathbf{x}_0)) \leq \eta e^{\int_0^t 0 d\tau} = \eta$ , 因此,  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n + t, \mathbf{x}_0)) = \eta$ .

由  $v$  连续可知, 对  $\forall \tau \in [0, t], \mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0)$  一致收敛到  $\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*)$ , 那么  $\mathbf{y}_n(\tau)$  一致收敛到  $\mathbf{y}(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*))$ , 因此,  $0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [-\lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{y}_n(\tau) d\tau] =$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1}{t} \int_0^t \mathbf{y}(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*)) d\tau = -\mathbf{y}(\mathbf{x}^*)$ , 由此可得  $\mathbf{y}(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*)) = 0$ , 那么当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\|^p \rightarrow 0$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(\mathbf{x}(t)) = 0$ .  $\square$

如果线性切换系统存在公共 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ , 使得

$$PA_p + A_p^T P \leq -C^T C \leq 0 \quad (4)$$

或

$$PA_p + A_p^T P \leq -C^T C < -\gamma I, \quad \gamma > 0 \quad (5)$$

其中,  $p \in \mathbf{W}$ . 可得如下推论:

**推论 2.** 如果线性切换系统 (3) 存在公共 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ , 且  $V(\mathbf{x})$  满足式 (4), 那么对任意切换序列  $\sigma(t), \mathbf{x}(t, t_0)$  一致收敛于集合  $Z_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = C \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ . 如果线性切换系统 (3) 存在公共 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ , 且  $V(\mathbf{x})$  满足式 (5), 那么对任意切换序列  $\sigma(t), \mathbf{x}(t, t_0)$  一致收敛于平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**证明.** 由于切换系统 (3) 存在公共 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ , 且  $V(\mathbf{x})$  满足式 (4), 那么  $\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{x}^T C^T C \mathbf{x} < -\mathbf{x}^T (PA_p + A_p^T P) \mathbf{x} = -\dot{V}(\mathbf{x})$ , 且  $\int_0^\infty \|\mathbf{y}\|^2 dt = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T C^T C \mathbf{x}) dt < -\int_0^\infty \{\mathbf{x}^T (PA_p + A_p^T P) \mathbf{x}\} dt = V(\mathbf{x}(0)) - V(\mathbf{x}(\infty)) < V(\mathbf{x}(0))$ , 由定理 1 可知, 对  $\forall \sigma(t), \mathbf{x}(t, t_0)$  一致收敛于集合  $Z_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = C \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ .

如果公共 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$  满足式 (5), 那么  $\gamma \mathbf{x}^T \mathbf{x} < \|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{x}^T C^T C \mathbf{x} < -\mathbf{x}^T (PA_p + A_p^T P) \mathbf{x} = -\dot{V}(\mathbf{x})$ , 且  $\int_0^\infty (\gamma \mathbf{x}^T \mathbf{x}) dt < \int_0^\infty \|\mathbf{y}\|^2 dt = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T C^T C \mathbf{x}) dt < -\int_0^\infty \{\mathbf{x}^T (PA_p + A_p^T P) \mathbf{x}\} dt = V(\mathbf{x}(0)) - V(\mathbf{x}(\infty)) < V(\mathbf{x}(0))$ , 由定理 1 可知, 对于  $\forall \sigma(t), \mathbf{x}(t, t_0)$  一致收敛于集合  $Z_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = C \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ . 由于  $\|\mathbf{y}\|^2 > \gamma \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ , 所以当  $t \rightarrow \infty, \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ .  $\square$

**注 1.** 如果切换系统 (3) 存在公共 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$  且  $V(\mathbf{x})$  满足式 (5), 可得  $\|\mathbf{y}\|^2 > \gamma \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ . 由于  $\int_0^\infty (\gamma \mathbf{x}^T \mathbf{x}) dt < \int_0^\infty \|\mathbf{y}\|^2 dt < V(\mathbf{x}(0)) < \infty$ , 因此, 对所有  $K$  函数  $\omega(\mathbf{y}) < \|\mathbf{y}\|^2$ , 都有  $\dot{V}(\mathbf{x}) < -\omega(\mathbf{y})$  及

$$\int_0^\infty \omega(\mathbf{y}) dt < \int_0^\infty \|\mathbf{y}\|^2 dt < \infty \quad (6)$$

式 (6) 说明, 如果切换系统存在公共 Lyapunov 函数, 且其导数满足式 (5), 那么对满足  $\omega(\mathbf{y}) < \|\mathbf{y}\|^2$  的  $K$  函数, 式 (6) 成立, 这意味着切换系统的输出  $\mathbf{y}(t) \rightarrow 0$ . 又因为  $\|\mathbf{y}\|^2 > \gamma \mathbf{x}^T \mathbf{x}$  意味着切换系统对任意切换序列都是可观的, 所以  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ .

**注 2.** 定理 1 和推论 2 中“一致收敛”指的是对线性切换系统切换信号的一致性<sup>[1]</sup>.

**注 3.** 与引理 1 和推论 1 不同, 即使线性切换系统渐近稳定, 对  $\forall p > 0$ , 积分  $\int_0^\infty \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t, t_0))\|^p dt$  不一定存在, 如例 2 所示. 因此对不同的线性切换系统, 为利用上述结论, 应选取合适的  $p$ , 使得积分  $\int_0^\infty \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t, t_0))\|^p dt$  存在.

**例 2.** 线性切换系统  $\dot{x} = -\sigma x$ ,  $y = x$ , 切换信号

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2^n, & |x|^2 \in [2^n, 2^{n+1}), n \in \bar{\mathbf{N}} \end{cases}$$

其中,  $\bar{\mathbf{N}}$  为正整数集合.

不失一般性, 设  $x(0) > 0$ , 那么  $x(t) > 0$ . 因为  $2^n \leq |x|^2 < 2^{n+1}$ , 所以  $\frac{1}{2}|x|^2 < 2^n \leq |x|^2$ .

由于  $\dot{x} = -\sigma x = -2^n x$ , 因此,  $-x|x|^2 \leq -2^n x < -\frac{1}{2}x|x|^2$ , 即  $-x|x|^2 \leq \dot{x} < -\frac{1}{2}x|x|^2$ , 整理得  $-x^3 \leq \dot{x} < -x^3/2$ .

解方程  $-x^3 = \dot{x}$ , 可得  $x(t) = \frac{x(0)}{(1+2x(0)^2(t-t_0))^{\frac{1}{2}}}$ .

解方程  $-\frac{1}{2}x^3 = \dot{x}$ , 可得  $x(t) = \frac{x(0)}{(1+x(0)^2(t-t_0))^{\frac{1}{2}}}$ . 因此  $\frac{x(0)}{(1+2x(0)^2(t-t_0))^{\frac{1}{2}}} \leq x(t) \leq \frac{x(0)}{(1+x(0)^2(t-t_0))^{\frac{1}{2}}}$ . 由上式不难看出, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $x(t) \rightarrow 0$ , 切换系统渐近稳定, 但是系统不是输出平方可积的.

取正整数  $\rho = 2$ , 积分  $\int_0^\infty \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t, t_0))\|^2 dt = \int_0^\infty \|x(t, t_0)\|^2 dt > \int_0^\infty \left\| \frac{x(0)}{(1+2x(0)^2(t-t_0))^{\frac{1}{2}}} \right\|^2 dt = \int_0^\infty \frac{x(0)^2}{(1+2x(0)^2(t-t_0))} dt$ . 由于  $\int_0^\infty \frac{x(0)^2}{(1+2x(0)^2(t-t_0))} dt$  不存在, 因此,  $\int_0^\infty \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t, t_0))\|^2 dt$  不存在, 即系统输出平方不可积.

**注 4.** 定理 1 将验证工作分成了两部分, 第一部分验证系统轨迹有界, 第二部分验证系统的输出可积性. 分别验证这两个条件非常方便且易于减弱定理条件的保守性, 在经典的稳定性理论研究中经常用到这种方法<sup>[11]</sup>.

## 2.2 受限制的切换信号的情形

下面讨论每个子系统有专有输出通道的情况, 即每个子系统的输出函数不同.

**定理 2.** 如果线性切换系统 (2) 满足:

- 1) 系统轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$ ,  $t \geq 0$  有界;
- 2)  $\int_0^\infty \|\tilde{\mathbf{y}}_q(\mathbf{x}(t))\|^p dt < \infty$ ,  $0 < p < \infty$ , 其中

$$\tilde{\mathbf{y}}_q(\mathbf{x}(t)) = \begin{cases} \mathbf{y}_q(\mathbf{x}(t)), & t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_{q_i}, t_{q_{i+1}}) \\ \mathbf{0}, & \text{其他} \end{cases}$$

3) 如果发生无穷多次切换, 那么  $\exists \tau_D > 0$ , 对  $\forall T \geq 0$ , 存在正整数  $i$ , 使得  $t_{i+1} - \tau_D \geq t_i \geq T$ . 那么系统轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于集合  $Z_0 = \bigcup_{q=1}^N Z_q^0$ , 其中,  $Z_q^0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{y}_q(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}\}$ .

**证明.** 由定理条件 1) 可知, 系统轨迹有界. 下面分两种情况进行讨论:

**情况 1.** 如果切换系统 (2) 只有有限多个切换时间点, 那么  $\exists T \geq 0$ , 当  $t \geq T$  时, 切换系统 (2) 退化为连续系统. 不失一般性, 假设当  $t \geq T$  时,  $\sigma(t) = q$ , 此时  $\mathbf{y} = C_q \mathbf{x}$ , 定理 2 退化为推论 1.

**情况 2.** 如果切换系统 (2) 无穷多次切换到某个子系统. 不失一般性, 假设切换系统 (2) 无穷多次切换到第  $q$  个子系统, 那么第  $q$  个子系统有一个无穷切换时间点序列  $\{t_{q_k}\}_{k=1}^{\infty}$ .  $\forall t \in [t_{q_k}, t_{q_{k+1}})$ ,  $\sigma(t) = q$ ,  $t_{q_{k+1}} - t_{q_k} \geq \tau_D$ , 且当  $k \rightarrow \infty$  时,  $t_{q_k} \rightarrow \infty$ . 记  $T_q = \bigcup_{k=1}^{\infty} [t_{q_k}, t_{q_{k+1}})$ .

由条件 2) 可知,  $\int_0^\infty \|\tilde{\mathbf{y}}_q(\mathbf{x}(t))\|^p dt < \infty$ . 下面证明当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\tilde{\mathbf{y}}_\Omega(t) = \|\tilde{\mathbf{y}}_q(\mathbf{x}(t))\|^p \rightarrow \mathbf{0}$ .

令  $v_q(\mathbf{x}(s)) = \int_s^\infty \|\tilde{\mathbf{y}}_q(\mathbf{x}(t))\|^p dt$ , 显然,  $v_q$  是非负有界函数. 对  $v_q$  求导可得  $\dot{v}(\mathbf{x}(s)) = -\|\tilde{\mathbf{y}}_q(\mathbf{x}(s))\|^p \leq 0$ . 由于  $v_q$  连续单调非增, 因此  $\inf_t v_q(\mathbf{x}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} v_q(\mathbf{x}(t)) = \eta$ . 那么存在  $\{t_n\} \in T_q$ ,  $t_n \rightarrow \infty$ , 使得  $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \mathbf{x}^*$ , 由此可得,  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} v_q(\mathbf{x}(t_n)) = v_q(\mathbf{x}^*) = \eta$ .

由于  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\lim_{t_n \rightarrow \infty} v_q(\mathbf{x}(t_n + t)) - \lim_{t_n \rightarrow \infty} v_q(\mathbf{x}(t_n))] = 0$ , 那么

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [-\lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_{t_n}^{t_n+t} \|\tilde{\mathbf{y}}_q(\mathbf{x}(s))\|^p ds] &= \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [-\lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_0^t \|\tilde{\mathbf{y}}_q(\mathbf{x}(t_n + \tau))\|^p d\tau] &= \\ -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{y}_n(\tau) d\tau &= 0 \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{y}_n(\tau) = \|\tilde{\mathbf{y}}_q(\mathbf{x}(t_n + \tau))\|^p$ .

由引理 2 可知, 对  $\forall \tau \in [0, t]$ ,  $\mathbf{x}(t_n + \tau)$  一致收敛到  $\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*)$ , 那么  $\mathbf{y}_n(\tau)$  一致收敛到  $\mathbf{y}_q(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*))$ , 因此,  $0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [-\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{y}_n(\tau) d\tau] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1}{t} \int_0^t \mathbf{y}_q(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*)) d\tau = -\mathbf{y}_q(\mathbf{x}^*)$ , 由此可得,  $\mathbf{y}_q(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*)) = \mathbf{0}$ , 那么当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\tilde{\mathbf{y}}_\Omega(t) = \|\tilde{\mathbf{y}}_q(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\|^p \rightarrow 0$ . 综上可知,  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于集合  $Z_0 = \bigcup_{q=1}^N Z_q^0$ .  $\square$

如果线性切换系统存在多 Lyapunov 函数  $V_p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_p \mathbf{x}$ ,  $p \in \mathbf{W}$ , 使得

$$P_p A_p + A_p^T P_p \leq -C_p^T C_p \leq 0 \quad (7)$$

或

$$P_p A_p + A_p^T P_p \leq -C_p^T C_p < -\gamma_p I, \quad \gamma_p > 0 \quad (8)$$

可得如下推论:

**推论 3.** 如果线性切换系统 (2) 存在多 Lyapunov 函数  $V_p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_p \mathbf{x}$ , 且  $V_p(\mathbf{x})$  满足式 (7), 那么在满足定理 2 条件 3) 的切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 系统轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于集合  $Z_0 = \bigcup_{i=1}^N Z_p^0$ .

如果线性切换系统 (2) 存在多 Lyapunov 函数  $V_p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_p \mathbf{x}$ , 且  $V_p(\mathbf{x})$  满足式 (8), 那么在满足定理 2 条件 3) 的切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 系统轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**证明.** 由于线性切换系统 (2) 存在满足式 (7) 的多 Lyapunov 函数  $V_p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_p \mathbf{x}$ , 那么  $\|\mathbf{y}_p\|^2 = \mathbf{x}^T C_p^T C_p \mathbf{x} < -\mathbf{x}^T (P_p A_p + A_p^T P_p) \mathbf{x} = -\dot{V}_p(\mathbf{x})$ , 且  $\int_0^\infty \|\tilde{\mathbf{y}}_p\|^2 dt = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T C_p^T C_p \mathbf{x}) dt < -\int_0^\infty \{\mathbf{x}^T (P_p A_p + A_p^T P_p) \mathbf{x}\} dt = V_p(\mathbf{x}(t_{p_0})) - V_p(\mathbf{x}(t_{p_\infty})) < V_p(\mathbf{x}(t_{p_0}))$ , 由于  $\exists \tau_D > 0$ , 使得  $\forall T \geq 0$ , 存在正整数  $i$ , 使得  $t_{p_{i+1}} - \tau_D \geq t_{p_i} \geq T$ , 因此, 当  $t_{p_i} \rightarrow \infty$  时,  $\int_{t_{p_i}}^{t_{p_i} + \tau_D} \|\tilde{\mathbf{y}}_p\|^2 dt = 0$ , 可知  $\tilde{\mathbf{y}}_p \rightarrow \mathbf{0}$ , 因此,  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于  $Z_0 = \bigcup_{p=1}^N Z_p^0$ .

如果函数  $V_p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_p \mathbf{x}$  满足式 (8), 那么  $\gamma_p \mathbf{x}^T \mathbf{x} < \|\mathbf{y}_p\|^2 = \mathbf{x}^T C_p^T C_p \mathbf{x} < -\mathbf{x}^T (P_p A_p + A_p^T P_p) \mathbf{x} = -\dot{V}_p(\mathbf{x})$ , 且  $\int_0^\infty (\gamma_p \mathbf{x}^T \mathbf{x}) dt < \int_0^\infty \|\mathbf{y}_p\|^2 dt = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T C_p^T C_p \mathbf{x}) dt < -\int_0^\infty \{\mathbf{x}^T (P_p A_p + A_p^T P_p) \mathbf{x}\} dt = V_p(\mathbf{x}(0)) - V_p(\mathbf{x}(\infty)) < V_p(\mathbf{x}(0))$ , 由定理 2 可知,  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于  $Z_0$ . 因为  $\|\mathbf{y}_p\|^2 > \gamma_p \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \gamma_p \|\mathbf{x}\|^2$ , 所以  $t \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ .  $\square$

**注 5.** 当多 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_p \mathbf{x}$  满足式 (8) 时,  $\gamma_p \|\mathbf{x}\|^2 = \gamma_p \mathbf{x}^T \mathbf{x} < \|\mathbf{y}_p\|^2$ , 即切换系统满足状态模可观测的性质<sup>[8]</sup>.

### 2.3 给定切换信号的情形

在实际控制系统中, 往往更倾向于讨论一条给定的系统轨迹的渐近稳定性, 而不是讨论整个系统的稳定性<sup>[21]</sup>. 实际应用中, 也往往需要讨论切换系统在给定切换信号作用下的稳定性. 由定理 1 不难得到以下结论.

**定理 3.** 对于线性切换系统 (3), 如果在给定的切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 系统轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$ ,  $t \geq 0$  满足定理 1 的条件, 那么线性切换系统在给定切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 系统轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于集合  $Z = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ .

**证明.** 定理 3 是定理 1 的特殊情况.  $\square$

由引理 1 猜想: 假设线性切换系统轨迹有界, 输出平方可积, 如果子系统可观测, 线性切换系统是否渐近稳定? 但是子系统可观测并不能保证系统平衡点渐近稳定, 见例 3 (文献 [7] 例 2).

**例 3.** 具有如下两个子系统的切换系统<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned}
 1) \quad \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = [0 \quad 2] \mathbf{x} \\
 2) \quad \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = [0 \quad 2] \mathbf{x}
 \end{aligned}$$

从  $x_1(t_0) > 0$  出发, 取如下周期切换信号: 先取  $\sigma = 1$ , 子系统 1) 作用时间为  $\delta_k = 1/k$ , 然后取  $\sigma = 2$ , 子系统 2) 作用时间为  $\Delta\delta_k = \delta_k / (1 - 2\delta_k)$ .

由文献 [7] 中分析可知, 切换系统轨迹有界, 但是切换系统不是渐近稳定的. 从  $\mathbf{x}_0 = (1, 0)^T$  出发,  $\int_0^\infty \|\mathbf{y}\|^2 dt = 0.5006 < \infty$ , 但是, 当  $t \rightarrow \infty$ ,  $x_1(t) \rightarrow 0.7067$ ,  $x_2(t) \rightarrow 0$ , 如图 3 和图 4 所示.

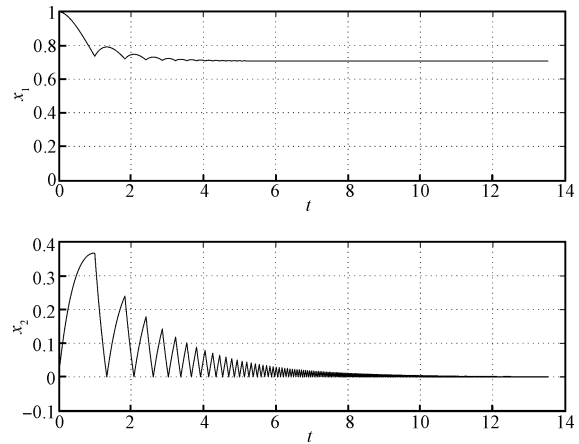


图 3 系统状态轨迹  
Fig. 3 Trajectories of the system

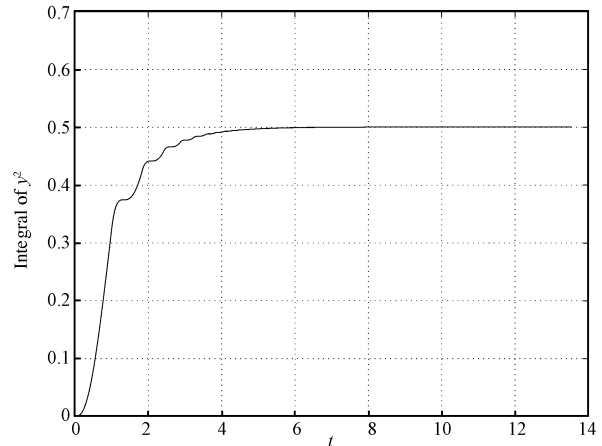


图 4 输出平方的积分  
Fig. 4 Integral of output square

由例 3 可知, 即使切换系统的轨迹有界, 输出平方可积, 且每个子系统都是可观测的, 但是切换系统仍有可能不是渐近稳定的. 因此有必要讨论切换系统可观测性以研究系统平衡点的稳定性.

**定义 1**<sup>[26]</sup>. 在切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 如果线性切换系统 (2) 输出满足  $C_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}, \sigma) = C_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{0}, \sigma), \forall t \geq t_0$ , 则称切换系统 (2) 的状态  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  是不可观测的.

由定义 1 可知, 在切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 如果系统输出满足  $C_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}, \sigma) =$

$C_{\sigma(t)}\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{0}, \sigma), \forall t \geq t_0$ , 那么线性切换系统 (2) 的状态  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  不可观测. 在切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 系统的所有不可观测状态集合, 记做  $UO_{\sigma}$ .

**定义 2**<sup>[26]</sup>. 如果在切换信号  $\sigma(t)$  作用下, 线性切换系统 (2) 的不可观测状态集合为空, 即  $UO_{\sigma} = \emptyset$ , 则称线性切换系统 (2) 在切换序列  $\sigma(t)$  作用下可观测.

设切换信号  $\sigma(t)$  产生如下切换序列  $S_{\sigma(t)} = \{(0, i_0), (t_1, i_1), \dots\}$ , 可得

$$C_{i_k} e^{A_{i_k}(t-t_k)} \dots e^{A_{i_0}(t_1-0)} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall t_k < t < t_{k+1}$$

记  $O_1 = \text{Im}C_1^T + \dots + \text{Im}C_N^T, O_{j+1} = \Gamma_{A_1^T} O_j + \dots + \Gamma_{A_N^T} O_j, j = 1, 2, \dots, O = \sum_{i=1}^{\infty} O_i$ , 其中  $\text{Im}C_i^T$  表示矩阵  $C_i^T$  的值域,  $\Gamma_{A_i^T} O_j = O_j + A_i^T O_j + \dots + (A_i^T)^{n-1} O_j$ .

**引理 3**<sup>[26]</sup>. 线性切换系统 (2) 在  $\sigma(t)$  作用下可观测等价于在  $\sigma(t)$  作用下,  $O = \mathbf{R}^n$ .

**定理 4**. 如果线性切换系统 (3) 在切换序列  $\sigma(t)$  作用下可观测, 且系统轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0), t \geq 0$  满足定理 1 的条件, 那么在切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 线性切换系统 (3) 的轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**证明**. 由定理 1 可知, 在切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 线性切换系统 (3) 的轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于集合  $Z = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ . 由于在切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 线性切换系统 (3) 可观测, 可知集合  $Z = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$  只包含平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 因此在切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 线性切换系统 (3) 的轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .  $\square$

**定理 5**. 如果切换系统 (2) 在切换序列  $\sigma(t)$  作用下可观测, 且满足定理 2 条件 1)~3), 那么系统轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**证明**. 由定理 2 可知, 在切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 线性切换系统 (2) 的轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于集合  $Z_0 = \bigcup_{p=1}^N Z_p^0$ . 由于在切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 线性切换系统 (2) 可观测, 可知集合  $Z_0$  只包含平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 因此在切换序列  $\sigma(t)$  作用下, 线性切换系统 (2) 的轨迹  $\mathbf{x}(t, t_0)$  收敛于  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .  $\square$

下面利用数值例子说明上述结论的有效性.

**例 4**. 切换系统  $\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x}, \mathbf{y} = C_i \mathbf{x}, i = 1, 2$ , 其中,  $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [0 \quad 1]$ .

不难验证, 子系统 1 可观测, 而子系统 2 不可观测. 子系统的状态转移矩阵为

$$\Phi_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t & \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\sin \frac{\sqrt{3}}{2}t & \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

且  $\Phi_1(t)\Phi_2(t) = \Phi_2(t)\Phi_1(t)$ ,

$$\Phi_1(1) = e^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sin \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2(1) = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$$

记  $C = C_1 = C_2 = [0 \quad 1]$ . 给定如下循环切换序列  $S_{\sigma(t)} = \{(0, 1), (t_1, 2), (t_2, 1), (t_3, 2) \dots\}$ ,  $t_k - t_{k-1} = h = 1s, \forall k = 0, 1, 2, \dots$ .

系统输出  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = C\mathbf{x} =$

$$\begin{cases} C\Phi_1(t-t_k)[\Phi_1(1)\Phi_2(1)]^{k-1}\mathbf{x}(0), & \sigma(t) = 1 \\ C\Phi_2(t-t_k)[\Phi_1(1)\Phi_2(1)]^{k-1}\mathbf{x}(0), & \sigma(t) = 2 \end{cases}$$

如果  $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ , 则对  $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

$$C\Phi_1(t-t_k)[\Phi_1(1)\Phi_2(1)]^{k-1}\mathbf{x}(0) \neq 0$$

$$C\Phi_2(t-t_k)[\Phi_1(1)\Phi_2(1)]^{k-1}\mathbf{x}(0) \neq 0$$

因此在切换序列  $S_{\sigma(t)}$  作用下,  $O = \mathbf{R}^n$ , 由引理 3 可知, 线性切换系统可观测.

对输出平方进行积分, 利用数值算法可得  $\int_0^{\infty} \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t))\|^2 dt = 1.0100 < \infty$ , 可知当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}$ , 由于切换系统可观测, 可得线性切换系统渐近稳定. 从  $\mathbf{x}_0 = (-1.2, 1.5)^T$  出发, 系统轨迹如图 5~7 所示.

由文献 [12] 中利用 Lyapunov 函数的分析结论可知系统轨迹有界, 且收敛到集合  $Z = \{\mathbf{x} : x_1 = 0\}$ , 即系统轨线趋向  $x_2$  轴, 但是无法得到更多的信息, 而利用文中方法分析可得切换系统渐近稳定.

**注 6**. 虽然例 4 中输出积分有界条件没有严格的数学证明 (其严格证明可类似例 1 进行详细分析), 但是通过数值方法求得输出积分有界后, 即可利用文中结论得到相应的切换系统稳定性结论. 例 4 说明文中推广的积分不变性原理可以通过数值方法协助分析, 便于利用计算机等辅助设计工具. 利用其他方法分析上述例子的结果也说明了文中结论的有效性<sup>[12-13]</sup>: 例 4 的切换系统取公共 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ , 不难验证,  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial A_i \mathbf{x}} <$

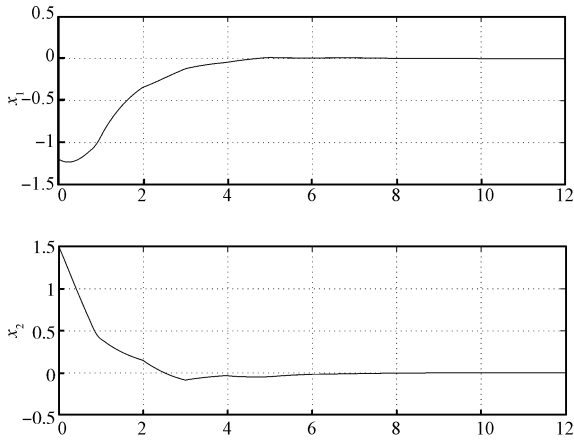


图 5 系统状态轨迹 ( $t-x$  坐标)

Fig. 5 Trajectories of the system ( $t-x$  coordinate)

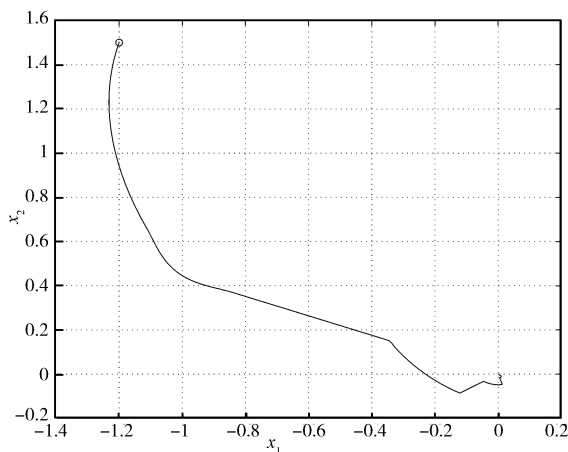


图 6 系统状态轨迹 (相平面)

Fig. 6 Trajectory of the system (phase plane)

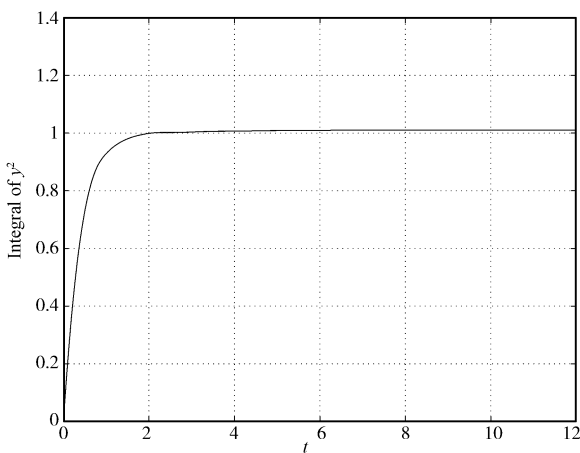


图 7 输出平方的积分

Fig. 7 Integral of output square

$0, i = 1, 2$ , 因此切换系统一致渐近稳定, 那么对文中给定的切换序列, 切换系统也是渐近稳定的, 与利用文中结论的分析结果吻合。

### 3 结论

本文推广了积分不变性原理, 分别在任意切换序列、受限制的切换序列和给定的切换序列的情况下, 得到了线性切换系统轨迹收敛于输出为零的状态集合的结论. 通过分析线性切换系统的可观测性, 讨论了切换系统的渐近稳定性. 文中结论不需要假设所有子系统有共同的平衡点, 不难推广到形如  $\dot{\mathbf{x}} = A_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{b}_\sigma, \mathbf{y} = C_\sigma \mathbf{x}$  的线性仿射切换系统.

### 附录 A

**推论 1 的证明.** 假设  $\int_0^\infty \|\mathbf{y}\|^p dt < \infty$ . 令  $v(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)) = \int_s^\infty \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\|^p dt$ , 可知,  $v$  是非负有界函数. 对  $v$  求导可得  $\dot{v}(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)) = -\|\mathbf{y}(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0))\|^p \leq 0$ . 由于  $v$  连续单调非增, 因此,  $\inf_t v(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \eta$ , 那么存在  $\{t_n\}, t_n \rightarrow \infty$ , 使得  $\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ , 由此可得,  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) = v(\mathbf{x}^*) = \eta$ .

由于  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n + t, \mathbf{x}_0)) - \lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0))] = 0$ , 那么

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [-\lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_{t_n}^{t_n+t} \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0))\|^p ds] &= \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [-\lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_0^t \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0))\|^p d\tau] &= \\ -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{y}_n(\tau) d\tau &= 0 \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{y}_n(\tau) = \|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0))\|^p$ .

由于  $v(\mathbf{x}(t_n + t, \mathbf{x}_0)) = v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) + \int_0^t \dot{v}(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0)) d\tau \leq v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) + \int_0^t 0 d\tau \leq v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) + \int_0^t 0 \times v(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0)) d\tau$ , 两边取极限, 可得  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n + t, \mathbf{x}_0)) \leq \lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) + \lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_0^t 0 \cdot v(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0)) d\tau = \eta + \lim_{t_n \rightarrow \infty} \int_0^t 0 \cdot v(\mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0)) d\tau$ . 由引理 2 可知,  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n + t, \mathbf{x}_0)) \leq \eta e^{\int_{t_n}^t 0 d\tau} = \eta$ , 因此,  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}(t_n + t, \mathbf{x}_0)) = \eta$ .

由  $v$  连续可知, 对  $\forall \tau \in [0, t], \mathbf{x}(t_n + \tau, \mathbf{x}_0)$ , 一致收敛到  $\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*)$ , 因此  $\mathbf{y}_n(\tau)$  一致收敛到  $\mathbf{y}(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*))$ . 因此,  $0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [-\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{y}_n(\tau) d\tau] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1}{t} \int_0^t \mathbf{y}(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*)) d\tau = -\mathbf{y}(\mathbf{x}^*)$ , 由此可得,  $\mathbf{y}(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^*)) = \mathbf{0}$ , 那么当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\|^p \rightarrow 0$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$ . 由于系统可观测, 因此, 平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  渐近稳定.

另外, 假设线性系统 (1) 渐近稳定, 那么  $\mathbf{y}(\mathbf{x}(t)) = C\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^r p_i(t) e^{\lambda_i t}$ , 其中,  $\lambda_i$  为系统矩阵  $A$  的特征值, 在复平面左半平面. 因此, 对  $\forall 0 < p < \infty, \int_0^\infty \|\mathbf{y}\|^p dt < \infty$ . □

### 附录 B

**例 1 的详细证明.** 由于  $|\lambda I - A_1| = |\lambda I - A_2| = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ , 可知  $\lambda = -1 = \lambda_{1,2}$ , 因此

$$e^{A_1 t} = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2}t + 1\right) e^{-t} & -3te^{-t} \\ \frac{3}{4}te^{-t} & \left(-\frac{3}{2}t + 1\right) e^{-t} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2}t + 1\right)e^{-t} & \frac{3}{4}te^{-t} \\ -3te^{-t} & \left(-\frac{3}{2}t + 1\right)e^{-t} \end{bmatrix}$$

记在时刻  $t_k$ , 系统的状态落在  $x_1$  轴上, 此时系统状态为  $\mathbf{x}(t_k) = (x_1(t_k), 0)$ . 下面设计切换信号使得任意一个切换周期, 系统初始值都落在  $x_1$  轴上.

令切换信号  $\sigma = 1$ , 作用时间为  $\delta_k = 1/k$ , 则经过时间段  $\delta_k$  后系统的状态为  $\mathbf{x}(t_k + \delta_k) = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2}\delta_k + 1\right)e^{-\delta_k}x_1(t_k) \\ \frac{3}{4}\delta_k e^{-\delta_k}x_1(t_k) \end{bmatrix}$ , 随后切换信号  $\sigma = 2$ , 其切换时间为  $\Delta\delta_k$ , 作用是为了使得状态重新回到  $x_1$  轴上, 此时切换系统状态为

$$\mathbf{x}(t_k + \delta_k + \Delta\delta_k) = e^{A_2 \Delta\delta_k} \mathbf{x}(t_k + \delta_k) = \begin{bmatrix} \left(\frac{45}{16}\Delta\delta_k\delta_k + \frac{3}{2}\delta_k + \frac{3}{2}\Delta\delta_k + 1\right)e^{-\Delta\delta_k}e^{-\delta_k}x_1(t_k) \\ \left(-\frac{45}{8}\Delta\delta_k\delta_k + \frac{3}{4}\delta_k - 3\Delta\delta_k\right)e^{-\Delta\delta_k}e^{-\delta_k}x_1(t_k) \end{bmatrix}$$

由  $x_2(t_k + \delta_k + \Delta\delta_k) = 0$ , 可得  $-\frac{45}{8}\Delta\delta_k\delta_k + \frac{3}{4}\delta_k - 3\Delta\delta_k = 0$ , 解上式, 可得  $\Delta\delta_k = 2\delta_k/(15\delta_k + 8) = 2/(8k + 15)$ , 因此,  $t_{k+1} = t_k + \delta_k + \Delta\delta_k = t_k + 1/k + 2/(8k + 15)$ . 显然, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $t_k \rightarrow \infty$ ; 同时, 切换信号在有限时间内是切换有极限的.

下面讨论系统状态  $\mathbf{x}(t)$  的变化趋势. 首先, 对于系统状态  $x_1(t)$  而言,  $x_1(t_{k+1}) = x_1(t_k + \delta_k + \Delta\delta_k) = \frac{\frac{15}{8k} + 1}{e^{\frac{1}{k} + \frac{2}{8k+15}}} x_1(t_k) = f\left(\frac{1}{k}\right)x_1(t_k)$ , 其中,  $f(x) = \frac{\frac{15}{8}x + 1}{e^{x + \frac{2}{8+15x}}}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $x = \frac{1}{k}$  对  $f(x)$  求导, 可得

$$f'(x) = \frac{\frac{15}{8} - \frac{1}{8}(8 + 15x + \frac{16}{8 + 15x})}{e^{x + \frac{2}{8+15x}}}$$

令  $t = 8 + 15x$ , 因为  $x = 1/k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 因此  $0 < x \leq 1$ , 那么  $8 < 8 + 15x \leq 23$ , 而  $8(8 + 15x + \frac{16}{8+15x}) \geq 8 \times 2 \times 4 = 64$ , 那么  $f'(x) < 0$ , 因此,  $f(x)$  单调递减.

由  $f(1) = 0.9696 < 1$ ,  $f(1/2) = 1.1017 > 1$ , 因此当  $k = 2, 3, 4, \dots$  时,  $f\left(\frac{1}{k}\right) > 1$ , 而  $x_1(t_{k+1}) = f\left(\frac{1}{k}\right)x_1(t_k)$ , 从而系统状态  $x_1(t)$  发散.

另一方面, 对于  $x_2(t)$  而言, 由于  $x_2(t_k + \delta_k) = \frac{3}{4}\delta_k e^{-\delta_k}x_1(t_k)$ ,  $x_2(t_{k+1} + \delta_{k+1}) = \frac{3}{4}\delta_{k+1}e^{-\delta_{k+1}}\left(\frac{15}{8}\delta_k + 1\right)e^{-\Delta\delta_k}e^{-\delta_k}x_1(t_k)$ , 所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_2(t_{k+1} + \delta_{k+1})}{x_2(t_k + \delta_k)} \right| &= \frac{\delta_{k+1}e^{-\delta_{k+1}}\left(\frac{15}{8}\delta_k + 1\right)e^{-\Delta\delta_k}}{\delta_k} = \\ &= \frac{1}{8(k+1)}(15+8k) \\ &= \frac{2}{e^{8k+15} + k + 1} = g(k) \end{aligned} \quad (B1)$$

对  $g(x) = \frac{1}{e^{\frac{8(x+1)}{2} + \frac{1}{x+1}}}$  求导可得,  $g'(x) > 0$ , 因此,  $g(x)$  单增. 同时, 注意到  $g(k) \rightarrow 1$ ,  $k \rightarrow \infty$ , 因此,  $g(k) < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 故  $|x_2(t_{k+1} + \delta_{k+1})| < |x_2(t_k + \delta_k)|$ .

在时间段  $[t_k, t_k + \delta_k)$  内, 令  $t \in [0, \delta_k)$ , 可知  $\dot{x}_2(t_k + t) = \frac{3}{4}e^{-t}(1-t)x_1(t_k) > 0$ . 因此, 在时间段  $[t_k, t_k + \delta_k)$  内, 切换系统状态  $x_2(t)$  单调递增; 在时间段  $[t_k + \delta_k, t_k + \delta_k + \Delta\delta_k)$  内,

令  $t \in [0, \Delta\delta_k)$ , 可知  $\dot{x}_2(t_k + \delta_k + t) = \left(-\frac{51}{8}\delta_k + \frac{45}{8}t\delta_k - 3 + 3t\right)e^{-(t+\delta_k)}x_1(t_k) < 0$ . 因此在时间段  $[t_k + \delta_k, t_k + \delta_k + \Delta\delta_k)$  内, 切换系统状态  $x_2(t)$  单调递减, 因此在时间段  $[t_k, t_k + \delta_k + \Delta\delta_k)$  内,  $x_2(t_k + \delta_k)$  是最大值. 由于  $|x_2(t_k + \delta_k)|$  单调递减有下界. 且是切换系统状态在时间段  $[t_k, t_k + \delta_k + \Delta\delta_k)$  内最大值. 故当  $t \rightarrow \infty$  时,  $x_2(t) \rightarrow 0$ .

由式 (9) 可知,  $x_2(t_k + \delta_k) < g(k)x_2(t_0 + \delta_0)$ ,  $g(k) < 2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{8k+15} + \frac{1}{k}\right)} = 2e^{-\frac{1}{2}(\delta_k + \Delta\delta_k)}$ , 而  $y < 2g(k)x_2(t_0 + \delta_0)$ , 那么  $\int_0^\infty \|y(\mathbf{x}(t, t_0))\|^2 dt = \int_0^\infty \|4x_2(t)\|^2 dt < 4x_2^2(t_0 + \delta_0) \sum_{k=1}^\infty g^2(k)(\delta_k + \Delta\delta_k) < 16x_2^2(t_0 + \delta_0) \int_0^{\frac{23}{33}} te^{-t} dt < 6.4x_2^2(t_0 + \delta_0) < \infty$ , 可知, 线性切换系统输出平方可积.  $\square$

## References

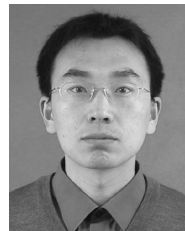
- 1 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, **19**(5): 59–70
- 2 Lin H, Antsaklis P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey on recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 308–322
- 3 Narendra K S, Balakrishnan J. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting  $A$ -matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(12): 2469–2471
- 4 Liberzon D, Tempo R. Common Lyapunov functions and gradient algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(6): 990–994
- 5 Fornasini E, Valcher M E. Linear copositive Lyapunov functions for continuous-time positive switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(8): 1933–1937
- 6 Mojica-Nava E, Quijano N, Rakoto-Ravalontsalama N, Gauthier A. A polynomial approach for stability analysis of switched systems. *Systems and Control Letters*, 2010, **59**(2): 98–104
- 7 Hespanha J P. Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle's invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 470–482
- 8 Hespanha J P, Liberzon D, Angeli D, Sontag E D. Nonlinear norm-observability notions and stability of switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(2): 154–168
- 9 Zhao J, Hill D J. Dissipativity theory for switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(5): 941–953
- 10 Morarescu C I, Brogliato B. Passivity-based switching control of flexible-joint complementarity mechanical systems. *Automatica*, 2010, **46**(1): 160–166
- 11 LaSalle J. Some extensions of Lyapunov's second method. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 1960, **7**(4): 520–527
- 12 Bacciotti A, Mazzi L. An invariance principle for nonlinear switched systems. *Systems and Control Letters*, 2005, **54**(11): 1109–1119
- 13 Mancilla-Aguilar J L, Garcia R A. An extension of LaSalle's invariance principle for switched systems. *Systems and Control Letters*, 2006, **55**(5): 376–384



- 14 Cheng D Z, Wang J H, Hu X M. An extension of LaSalle's invariance principle and its application to multi-agent consensus. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(7): 1765–1770
- 15 Riedinger P, Sigalotti M, Daafouz J. On the algebraic characterization of invariant sets of switched linear systems. *Automatica*, 2010, **46**(6): 1047–1052
- 16 Logemann H, Ryan E P. Asymptotic behaviour of nonlinear systems. *The American Mathematical Monthly*, 2004, **111**: 864–889
- 17 Shevitz D, Paden B. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(9): 1910–1914
- 18 Bacciotti A, Ceragioli F. Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov functions. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1999, **4**: 361–376
- 19 Bacciotti A, Ceragioli F. Nonpathological Lyapunov functions and discontinuous caratheodory systems. *Automatica*, 2006, **42**(3): 453–458
- 20 Morse A S. Toward a unified theory of parameter adaptive control: tunability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(9): 1002–1012
- 21 Byrnes C I, Martin C F. An integral-invariance principle for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(6): 983–994
- 22 Ryan E P. An integral invariance principle for differential inclusions with applications in adaptive control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1998, **36**(3): 960–980
- 23 Lin Xiang-Ze, Li Shi-Hua, Zou Yun. Output feedback stabilization of invariant sets for nonlinear switched systems. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(7): 784–791  
(林相泽, 李世华, 邹云. 非线性切换系统不变集的输出反馈镇定. *自动化学报*, 2008, **34**(7): 784–791)
- 24 Boniolo I, Colaneri P, Bolzern P, Corless M, Shorten R. On the design and synthesis of limit cycles using switching linear systems. *International Journal of Control*, 2010, **83**(5): 915–927
- 25 Liao Xiao-Xin. *Theory Methods and Applications of Stability*. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002. 6–8

(廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用. 武汉: 华中科技大学出版社. 2002. 6–8)

- 26 Sun Z D, Ge S S. *Switched Linear Systems: Control and Design*. New York: Springer-Verlag, 2005



**林相泽** 南京农业大学工学院讲师. 2000 年获得东南大学数学系学士学位, 2006 年获得东南大学自动化学院硕士学位. 现为南京理工大学博士研究生. 主要研究方向为切换系统, 网络控制和非线性系统控制. 本文通信作者.

E-mail: xzlin@njau.edu.cn

(**LIN Xiang-Ze** Lecturer at the College of Engineering, Nanjing Agricultural University and Ph.D. candidate at Southeast University. He received his bachelor degree in mathematics from Southeast University in 2000 and his master degree from the School of Automation, Southeast University in 2006. Now, he is a Ph.D. candidate at the School of Automation, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers switched systems, network control, and nonlinear system control. Corresponding author of this paper.)



**邹云** 南京理工大学自动化学院教授. 1983 年获得西北大学数学系学士学位, 1987 年和 1990 年分别获得南京理工大学自动化学院硕士和博士学位. 主要研究方向为微分代数系统和二维系统.

E-mail: zouyun@vip.163.com

(**ZOU Yun** Professor at the School of Automation, Nanjing University of Science and Technology. He received his bachelor degree in mathematics from Northwestern University in 1983 and his master and Ph.D. degrees in control theory and control engineering from Automation Institute, Nanjing University of Science and Technology in 1987 and 1990, respectively. His research interest covers differential-algebraic equation system and two dimensional systems.)